

山东省潍坊市 2024 年初中学业水平考试

数学

(本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟)

第 I 卷 (选择题 共 44 分)

一、单项选择题 (共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。每小题的四个选项中只有一项正确)

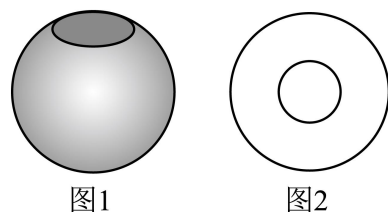
1. 下列著名曲线中，既是轴对称图形也是中心对称图形的是 ()



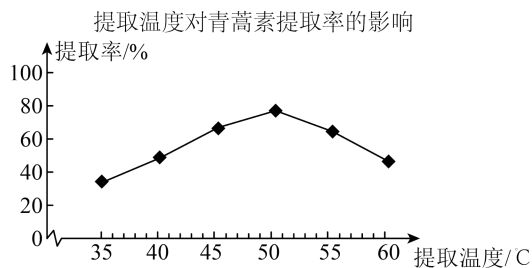
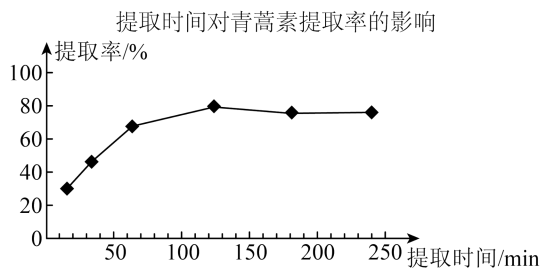
2. 2024 年 3 月份，低空经济首次被写入《政府工作报告》。截止 2023 年底，全国注册通航企业 690 家、无人机 126.7 万架，运营无人机的企业达 1.9 万家。将 126.7 万用科学记数法表示为 ()

- A. 1.267×10^5 B. 1.267×10^6 C. 1.267×10^7 D. 126.7×10^4

3. 某厂家生产的海上浮漂的形状是中间穿孔的球体，如图 1 所示。该浮漂的俯视图是图 2，那么它的主视图是 ()



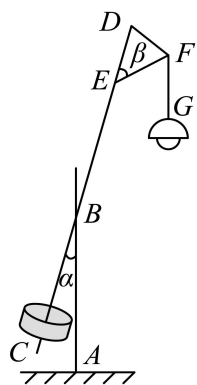
4. 中国中医科学院教授屠呦呦因其在青蒿素抗疟方面的研究获 2015 年诺贝尔生理学或医学奖。某科研小组用石油醚做溶剂进行提取青蒿素的实验，控制其他实验条件不变，分别研究提取时间和提取温度对青蒿素提取率的影响，其结果如图所示：



由图可知，最佳的提取时间和提取温度分别为（ ）

- A. 100min, 50℃ B. 120min, 50℃ C. 100min, 55℃ D. 120min, 55℃

5. 一种路灯的示意图如图所示，其底部支架 AB 与吊线 FG 平行，灯杆 CD 与底部支架 AB 所成锐角 $\alpha = 15^\circ$ 。顶部支架 EF 与灯杆 CD 所成锐角 $\beta = 45^\circ$ ，则 EF 与 FG 所成锐角的度数为（ ）



- A. 60° B. 55° C. 50° D. 45°

6. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx - n^2 + mn + 1 = 0$ ，其中 m, n 满足 $m - 2n = 3$ ，关于该方程根的情况，下列判断正确的是（ ）

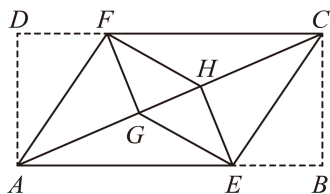
- A. 无实数根 B. 有两个相等的实数根
C. 有两个不相等的实数根 D. 无法确定

二、多项选择题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分）

7. 下列命题是真命题的有（ ）

- A. 若 $a = b$ ，则 $ac = bc$
B. 若 $a > b$ ，则 $ac > bc$
C. 两个有理数的积仍为有理数
D. 两个无理数的积仍为无理数

8. 如图，圆柱的底面半径为 $\sqrt{3}$ ，高为 1，下列关于该圆柱的结论正确的有（ ）

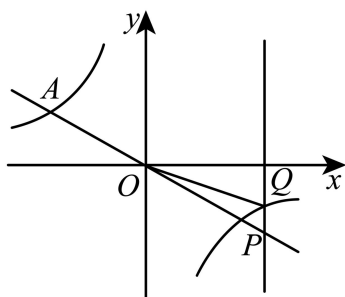


求证:

- (1) $\triangle AEH \cong \triangle CFG$;
- (2) 四边形 $EGFH$ 为平行四边形.

17. 如图, 正比例函数 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象的一个交点是 $A(m, \sqrt{3})$. 点

$P(2\sqrt{3}, n)$ 在直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上, 过点 P 作 y 轴的平行线, 交 $y = \frac{k}{x}$ 的图象于点 Q .

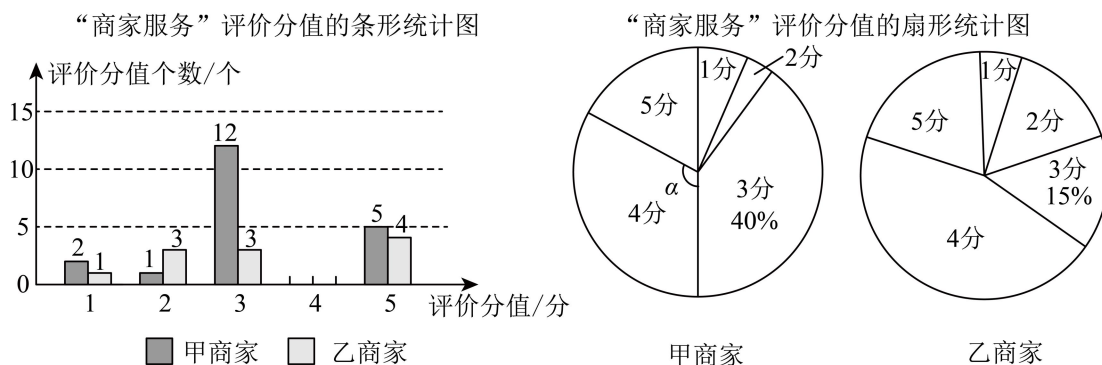


- (1) 求这个反比例函数的表达式;
- (2) 求 $\triangle OPQ$ 的面积.

18. 在某购物电商平台上, 客户购买商家的商品后, 可从“产品质量”“商家服务”“发货速度”“快递服务”等方面给予商家分值评价 (分值为1分、2分、3分、4分和5分). 该平台上甲、乙两个商家以相同价格分别销售同款 T 恤衫, 平台为了了解他们的客户对其“商家服务”的评价情况, 从甲、乙两个商家各随机抽取了一部分“商家服务”的评价分值进行统计分析.

【数据描述】

下图是根据样本数据制作的不完整的统计图, 请回答问题 (1) (2).



- (1) 平台从甲、乙两个商家分别抽取了多少个评价分值? 请补全条形统计图;

(2) 求甲商家的“商家服务”评价分值的扇形统计图中圆心角 α 的度数.

【分析与应用】

样本数据的统计量如下表, 请回答问题 (3) (4).

商家	统计量			
	中位数	众数	平均数	方差
甲商家	a	3	3.5	1.05
乙商家	4	b	$\bar{x}$	1.24

(3) 直接写出表中 a 和 b 的值, 并求 $\bar{x}$ 的值;

(4) 小亮打算从甲、乙两个商家中选择“商家服务”好的一家购买此款 T 恤衫. 你认为小亮应该选择哪一家? 说明你的观点.

19. 2024 年 6 月, 某商场为了减少夏季降温和冬季供暖的能源消耗, 计划在商场的屋顶和外墙建造隔热层, 其建造成本 P (万元) 与隔热层厚度 x (cm) 满足函数表达式: $P = 10x$. 预计该商场每年的能源消耗费用 T

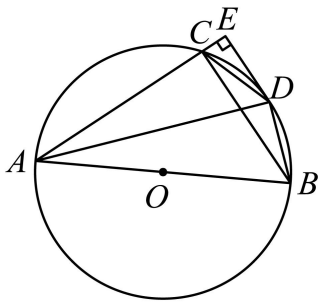
(万元) 与隔热层厚度 x (cm) 满足函数表达式: $T = 21 - \frac{(x+2)(x+4)}{8}$, 其中 $0 \leq x \leq 9$. 设该商场的隔

热层建造费用与未来 8 年能源消耗费用之和为 y (万元).

(1) 若 $y = 148$ 万元, 求该商场建造的隔热层厚度;

(2) 已知该商场未来 8 年的相关规划费用为 t (万元), 且 $t = y + x^2$, 当 $172 \leq t \leq 192$ 时, 求隔热层厚度 x (cm) 的取值范围.

20. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, AB 是 $\odot O$ 的直径, $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D , 过点 D 作 $DE \perp AC$, 交 AC 的延长线于点 E , 连接 BD , CD .



(1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $CE=1$, $\sin \angle BAD = \frac{1}{3}$, 求 $\odot O$ 的直径.

21. 在光伏发电系统运行时, 太阳能板 (如图 1) 与水平地面的夹角会对太阳辐射的接收产生直接影响. 某地区工作人员对日平均太阳辐射量 y (单位: $\text{kW} \cdot \text{h} \cdot 10^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{d}^{-1}$) 和太阳能板与水平地面的夹角 $x^\circ (0 \leq x \leq 90)$ 进行统计, 绘制了如图 2 所示的散点图, 已知该散点图可用二次函数刻画.



图1

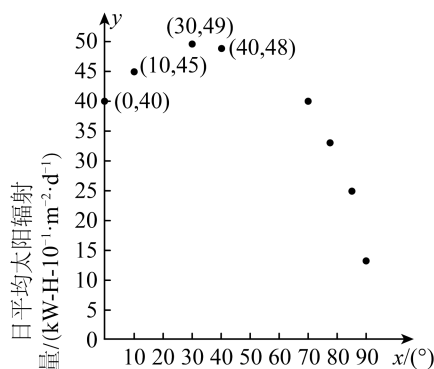


图2

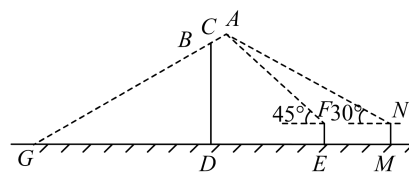


图3

(1) 求 y 关于 x 的函数表达式;

(2) 该地区太阳能板与水平地面的夹角为多少度时, 日平均太阳辐射量最大?

(3) 图 3 是该地区太阳能板安装后的示意图 (此时, 太阳能板与水平地面的夹角使得日平均太阳辐射量最大), $\angle AGD$ 为太阳能板 AB 与水平地面 GD 的夹角, CD 为支撑杆. 已知 $AB=2\text{m}$, C 是 AB 的中点, $CD \perp GD$. 在 GD 延长线上选取一点 M , 在 D, M 两点间选取一点 E , 测得 $EM=4\text{m}$, 在 M, E 两点处分别用测角仪测得太阳能板顶端 A 的仰角为 30° , 45° , 该测角仪支架的高为 1m . 求支撑杆 CD 的长. (精确到 0.1m , 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$)

22. 【问题提出】

在绿化公园时, 需要安装一定数量的自动喷洒装置, 定时喷水养护, 某公司准备在一块边长为 18m 的正方形草坪 (如图 1) 中安装自动喷洒装置, 为了既节约安装成本, 又尽可能提高喷洒覆盖率, 需要设计合适的安装方案.

说明：一个自动喷洒装置的喷洒范围是半径为 r (m) 的圆面. 喷洒覆盖率 $\rho = \frac{k}{s}$, s 为待喷洒区域面积, k 为待喷洒区域中的实际喷洒面积.

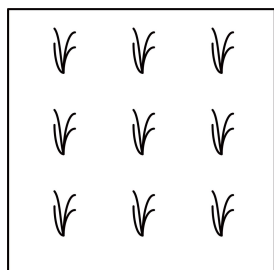


图1

【数学建模】

这个问题可以转化为用圆面覆盖正方形面积的数学问题.

【探索发现】

(1) 如图 2, 在该草坪中心位置设计安装 1 个喷洒半径为 9m 的自动喷洒装置, 该方案的喷洒覆盖率

$\rho = \underline{\hspace{2cm}}$.

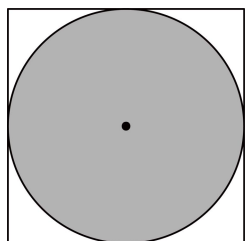


图2

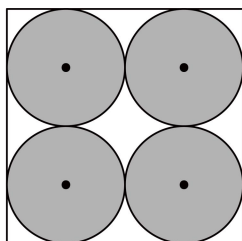


图3

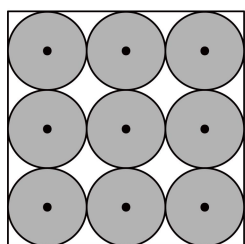


图4

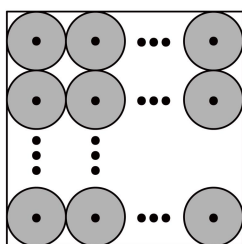


图5

(2) 如图 3, 在该草坪内设计安装 4 个喷洒半径均为 $\frac{9}{2}$ m 的自动喷洒装置; 如图 4, 设计安装 9 个喷洒半径均为 3m 的自动喷洒装置; …… , 以此类推, 如图 5, 设计安装 n^2 个喷洒半径均为 $\frac{9}{n}$ m 的自动喷洒装置. 与

(1) 中的方案相比, 采用这种增加装置个数且减小喷洒半径的方案, 能否提高喷洒覆盖率? 请判断并给出理由.

(3) 如图 6 所示, 该公司设计了用 4 个相同的自动喷洒装置喷洒的方案, 且使得该草坪的喷洒覆盖率 $\rho = 1$. 已知正方形 $ABCD$ 各边上依次取点 F, G, H, E , 使得 $AE = BF = CG = DH$, 设 $AE = x$ (m),

$\odot O_1$ 的面积为 $y(\text{m}^2)$ ，求 y 关于 x 的函数表达式，并求当 y 取得最小值时 r 的值.

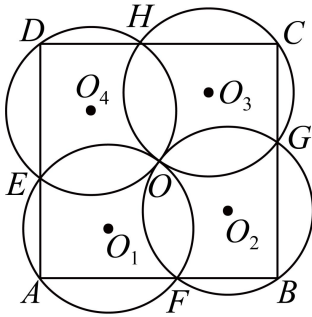


图6

【问题解决】

(4) 该公司现有喷洒半径为 $3\sqrt{2}\text{m}$ 的自动喷洒装置若干个，至少安装几个这样的喷洒装置可使该草坪的喷洒覆盖率 $\rho=1$ ？（直接写出结果即可）