

2023 年潍坊市初中学业水平考试

数学试题

注意事项:

1. 本试题满分 150 分, 考试时间 120 分钟;
2. 答卷前, 请将试卷和答题纸上的项目填涂清楚;
3. 请在答题纸相应位置作答, 不要超出答题区域, 不要答错位置.

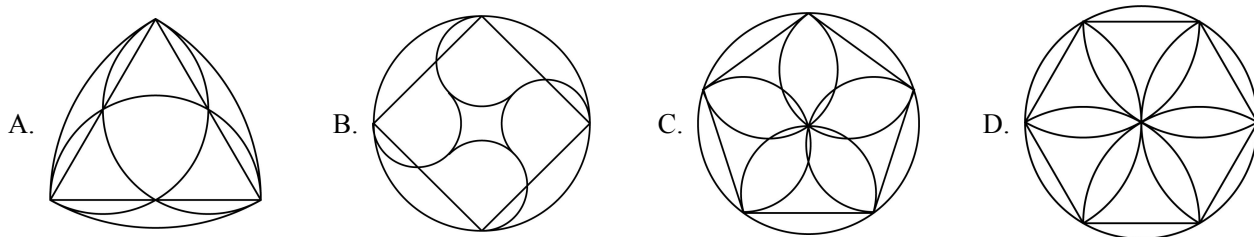
第 I 卷 (选择题共 44 分)

一、单项选择题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 每小题的四个选项中只有一项正确)

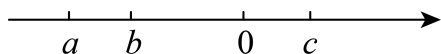
1. 在实数 1, -1 , 0 , $\sqrt{2}$ 中, 最大的数是 ()

- A. 1 B. -1 C. 0 D. $\sqrt{2}$

2. 下列图形由正多边形和圆弧组成, 其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

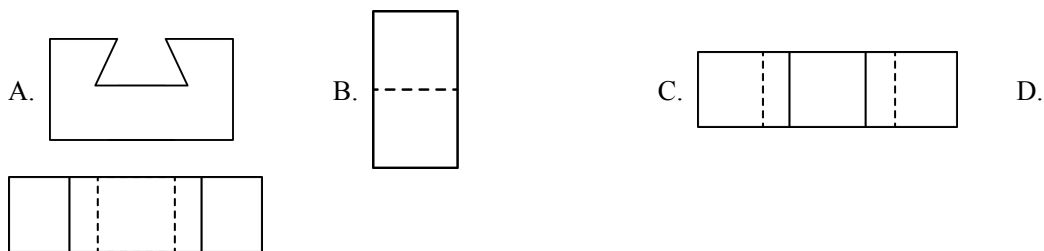
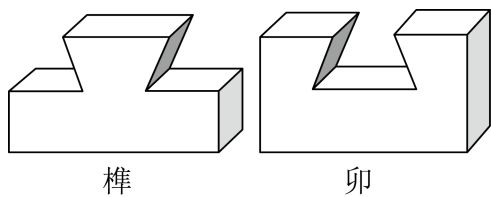


3. 实数 a , b , c 在数轴上对应的点如图所示, 下列判断正确的是 ()

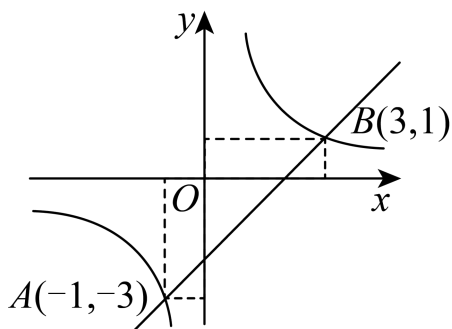


- A. $-c < b$ B. $a > -c$ C. $|a - b| = b - a$ D. $|c - a| = a - c$

4. 在我国古代建筑中经常使用榫卯构件, 如图是某种榫卯构件的示意图, 其中, 卯的俯视图是 ()



5. 如图, 在直角坐标系中, 一次函数 $y_1 = x - 2$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{3}{x}$ 的图象交于 A , B 两点, 下列结论正确的是 ()



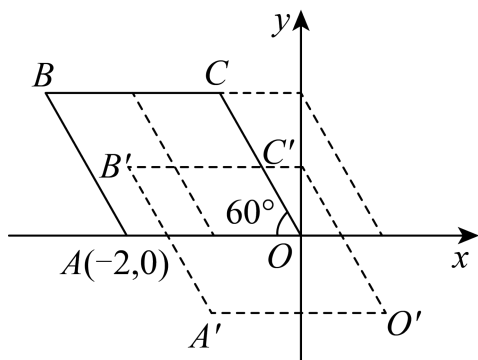
A. 当 $x > 3$ 时, $y_1 < y_2$

B. 当 $x < -1$ 时, $y_1 < y_2$

C. 当 $0 < x < 3$ 时, $y_1 > y_2$

D. 当 $-1 < x < 0$ 时, $y_1 < y_2$

6. 如图, 在直角坐标系中, 菱形 $OABC$ 的顶点 A 的坐标为 $(-2, 0)$, $\angle AOC = 60^\circ$. 将菱形 $OABC$ 沿 x 轴向右平移 1 个单位长度, 再沿 y 轴向下平移 1 个单位长度, 得到菱形 $OA'B'C'$, 其中点 B' 的坐标为 ()



A. $(-2, \sqrt{3} - 1)$

B. $(-2, 1)$

C. $(-\sqrt{3}, 1)$

D. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3} - 1)$

二、多项选择题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 每小题的四个选项中, 有多项正确, 全部选对得 5 分, 部分选对得 3 分, 有错选的得 0 分)

7. 下列运算正确的是 ()

A. $\sqrt[3]{-64} = 4$

B. $\sqrt{4} = 2$

C. $(-3a)^2 = 9a^2$

D. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

8. 下列命题正确的是 ()

A. 在一个三角形中至少有两个锐角

B. 在圆中, 垂直于弦的直径平分弦

C. 如果两个角互余, 那么它们的补角也互余

D. 两条直线被第三条直线所截, 同位角一定相等

9. 已知抛物线 $y = ax^2 - 5x - 3$ 经过点 $(-1, 4)$, 则下列结论正确的是 ()

A. 抛物线的开口向下

B. 抛物线的对称轴是 $x = \frac{5}{4}$

C. 抛物线与 x 轴有两个交点

D. 当 $t < -\frac{49}{8}$ 时, 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 5x - 3 - t = 0$ 有实根

10. 发动机的曲柄连杆将直线运动转化为圆周运动, 图①是发动机的实物剖面图, 图②是其示意图. 图②中, 点 A 在直线 l 上往复运动, 推动点 B 做圆周运动形成 $\odot O$, AB 与 BO 表示曲柄连杆的两直杆, 点 C 、 D 是直线 l 与 $\odot O$ 的交点; 当点 A 运动到 E 时, 点 B 到达 C ; 当点 A 运动到 F 时, 点 B 到达 D . 若 $AB = 12$, $OB = 5$, 则下列结论正确的是 ()

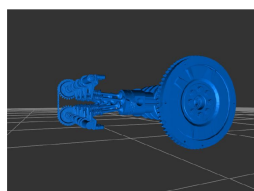


图1

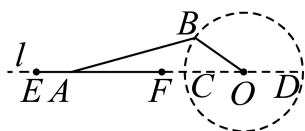


图2

A. $FC = 2$

B. $EF = 12$

C. 当 AB 与 $\odot O$ 相切时, $EA = 4$

D. 当 $OB \perp CD$ 时, $EA = AF$

第 II 卷 (非选择题共 106 分)

三、填空题 (共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 只写最后结果)

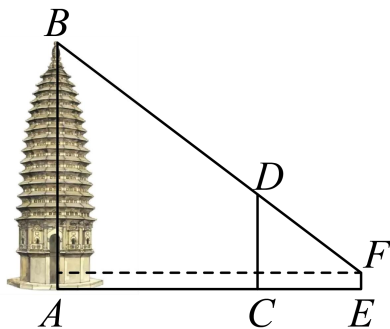
11. 从 $-\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{6}$ 中任意选择两个数, 分别填在算式 $(\square + \bigcirc)^2 \div \sqrt{2}$ 里面的“ $\square$ ”与“ $\bigcirc$ ”中, 计算该算式的结果是_____. (只需写出一种结果)

12. 用与教材中相同型号的计算器, 依次按键 $\sqrt{\quad}$ 5 $=$, 显示结果为 2.236067977 . 借助显示结果, 可以将一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的正数解近似表示为_____. (精确到 0.001)

13. 投掷两枚骰子, 朝上一面的点数之和为 7 的概率是_____.



14. 在《数书九章》(宋·秦九韶)中记载了一个测量塔高的问题: 如图所示, AB 表示塔的高度, CD 表示竹竿顶端到地面的高度, EF 表示人眼到地面的高度, AB 、 CD 、 EF 在同一平面内, 点 A 、 C 、 E 在一条水平直线上. 已知 $AC = 20$ 米, $CE = 10$ 米, $CD = 7$ 米, $EF = 1.4$ 米, 人从点 F 远眺塔顶 B , 视线恰好经过竹竿的顶端 D , 可求出塔的高度. 根据以上信息, 塔的高度为_____米.

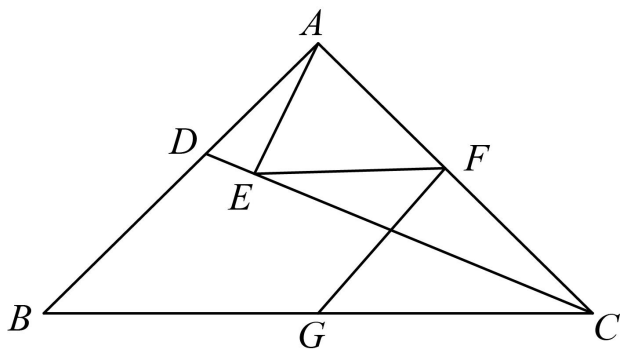


四、解答题（共 8 小题，共 90 分．请写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤）

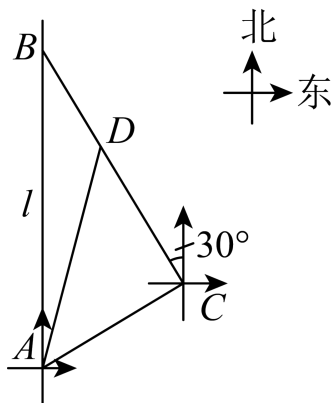
15. (1) 化简: $\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}\right) + \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$

(2) 利用数轴，确定不等式组 $\begin{cases} 3(x+4) \geq 2(1-x) \\ \frac{x-1}{2} < 3 - \frac{2x}{3} \end{cases}$ 的解集.

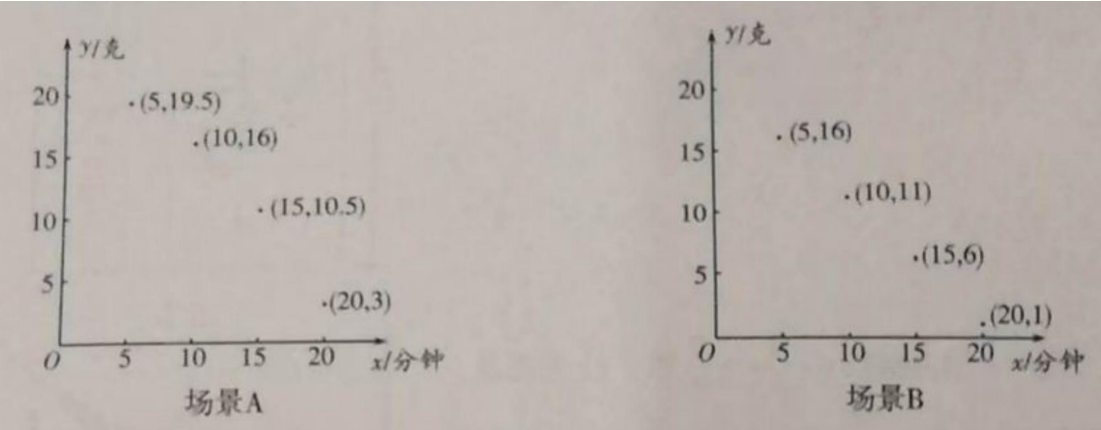
16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， CD 平分 $\angle ACB$ ， $AE \perp CD$ ，垂足为点 E ，过点 E 作 $EF \parallel BC$ ，交 AC 于点 F ， G 为 BC 的中点，连接 FG ．求证: $FG = \frac{1}{2}AB$ ．



17. 如图， l 是南北方向的海岸线，码头 A 与灯塔 B 相距 24 千米，海岛 C 位于码头 A 北偏东 60° 方向．一艘勘测船从海岛 C 沿北偏西 30° 方向往灯塔 B 行驶，沿线勘测石油资源，勘测发现位于码头 A 北偏东 15° 方向的 D 处石油资源丰富．若规划修建从 D 处到海岸线的输油管道，则输油管道的最短长度是多少千米？（结果保留根号）



18. 为研究某种化学试剂的挥发情况，某研究团队在两种不同的场景下做对比实验，收集了该试剂挥发过程中剩余质量 y （克）随时间 x （分钟）变化的数据（ $0 \leq x \leq 20$ ），并分别绘制在直角坐标系中，如下图所示.



- (1) 从 $y = ax + 21(a \neq 0)$, $y = \frac{k}{x}(k \neq 0)$, $y = -0.04x^2 + bx + c$ 中，选择适当的函数模型分别模拟两种场景下 y 随 x 变化的函数关系，并求出相应的函数表达式；
- (2) 查阅文献可知，该化学试剂发挥作用的最低质量为 3 克. 在上述实验中，该化学试剂在哪种场景下发挥作用的时间更长？

19. 某中学积极推进校园文学创作，倡导每名学生每学期向校报编辑部至少投 1 篇稿件. 学期末，学校对七、八年级的学生投稿情况进行调查.

【数据的收集与整理】

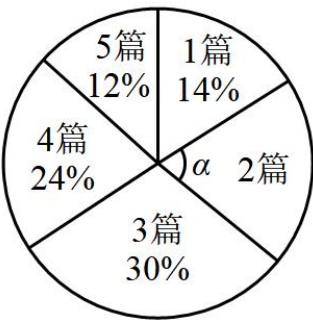
分别从两个年级随机抽取相同数量的学生，统计每人在本学期投稿的篇数，制作了频数分布表.

投稿篇数（篇）	1	2	3	4	5
七年级频数（人）	7	10	15	12	6
八年级频数（人）	2	10	13	21	4

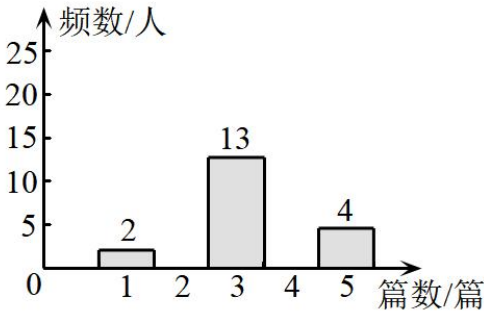
【数据的描述与分析】

- (1) 求扇形统计图中圆心角 α 的度数，并补全频数直方图.

七年级样本学生投稿篇数扇形统计图



八年级样本学生投稿篇数频数直方图



(2) 根据频数分布表分别计算有关统计量:

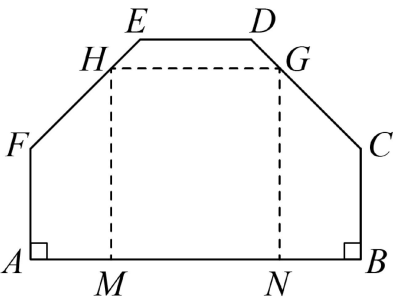
统计量	中位数	众数	平均数	方差
七年级	3	3	$\bar{x}$	1.48
八年级	m	n	3.3	1.01

直接写出表格中 m 、 n 的值，并求出 $\bar{x}$ 。

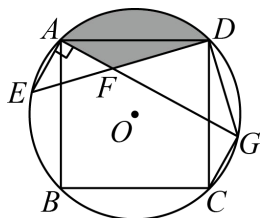
【数据的应用与评价】

(3) 从中位数、众数、平均数、方差中，任选两个统计量，对七、八年级学生的投稿情况进行比较，并做出评价。

20. 工匠师傅准备从六边形的铁皮 $ABCDEF$ 中，裁出一块矩形铁皮制作工件，如图所示。经测量， $AB \parallel DE$ ， AB 与 DE 之间的距离为 2 米， $AB=3$ 米， $AF=BC=1$ 米， $\angle A=\angle B=90^\circ$ ， $\angle C=\angle F=135^\circ$ 。 MH ， HG ， GN 是工匠师傅画出的裁剪虚线。当 MH 的长度为多少时，矩形铁皮 $MNGH$ 的面积最大，最大面积是多少？



21. 如图，正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，在 $\widehat{AB}$ 上取一点 E ，连接 AE ， DE 。过点 A 作 $AG \perp AE$ ，交 $\odot O$ 于点 G ，交 DE 于点 F ，连接 CG ， DG 。



(1) 求证: $\triangle AFD \cong \triangle CGD$;

(2) 若 $AB = 2$, $\angle BAE = 30^\circ$, 求阴影部分的面积.

22. [材料阅读]

用数形结合的方法, 可以探究 $q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$ 的值, 其中 $0 < q < 1$.

例求 $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$ 的值.

方法 1: 借助面积为 1 的正方形, 观察图①可知

$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$ 的结果等于该正方形的面积,

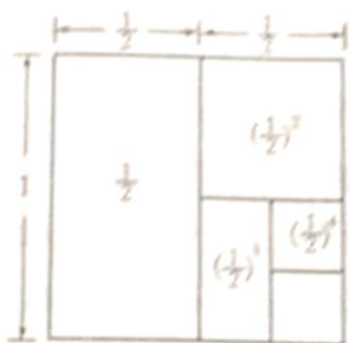
即 $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots = 1$.

方法 2: 借助函数 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 和 $y = x$ 的图象, 观察图②可知

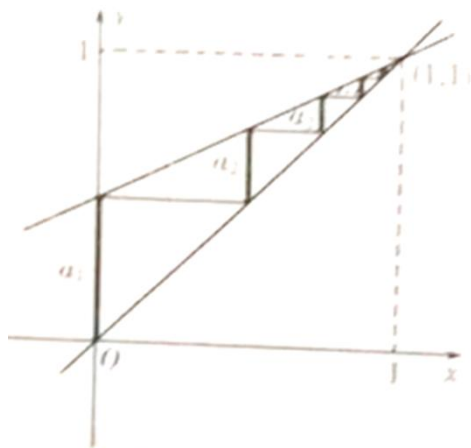
$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$ 的结果等于 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$ 等各条竖直线段的长度之和,

即两个函数图象的交点到 x 轴的距离. 因为两个函数图象的交点 $(1, 1)$ 到 x 轴的距为 1,

所以, $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots = 1$.



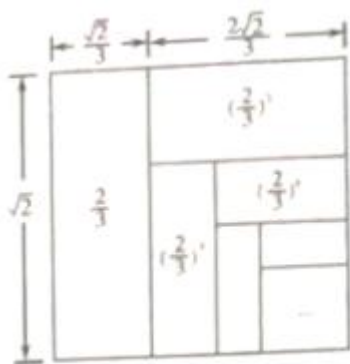
图①



图②

【实践应用】

任务一 完善 $\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \cdots$ 的求值过程.



图③

方法 1: 借助面积为 2 的正方形, 观察图③可知 $\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \cdots = \underline{\hspace{2cm}}$.

方法 2: 借助函数 $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ 和 $y = x$ 的图象, 观察图④可知

因为两个函数图象的交点的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$,

所以, $\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \cdots = \underline{\hspace{2cm}}$.

任务二 参照上面的过程, 选择合适的方法, 求 $\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots$ 的值.

任务三 用方法 2, 求 $q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots$ 的值 (结果用 q 表示).

【迁移拓展】

长宽之比为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1$ 的矩形是黄金矩形，将黄金矩形依次截去一个正方形后，得到的新矩形仍是黄金矩形。

观察图⑤，直接写出 $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6 + \cdots + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n} + \cdots$ 的值。

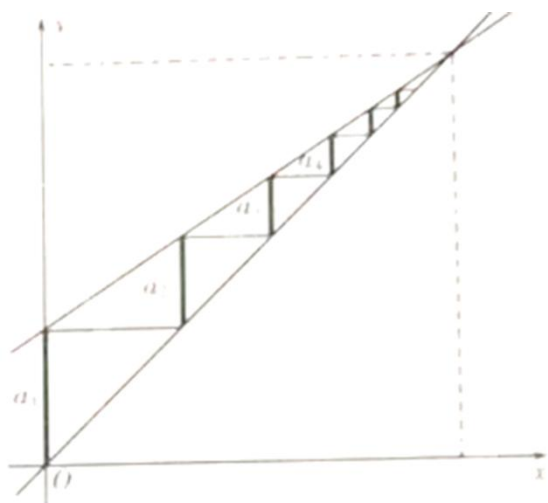


图 4

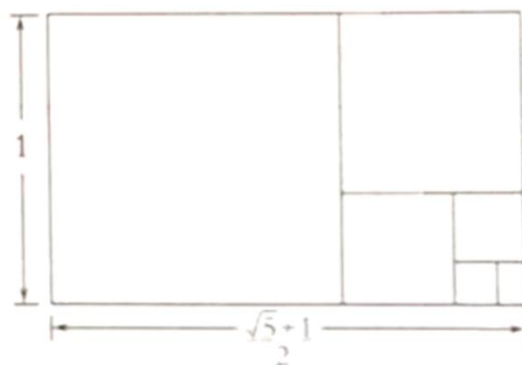


图 5

