

济南市 2023 年九年级学业水平考试

数学试题

本试卷共 8 页，满分 150 分。考试时间为 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、座号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，用 0.5mm 黑色签字笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。每小题只有一个选项符合题目要求。

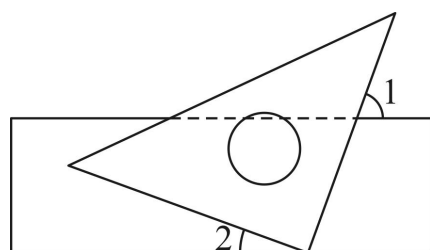
1. 下列几何体中，主视图是三角形的为（ ）



2. 2022 年我国粮食总产量再创新高，达 686530000 吨。将数字 686530000 用科学记数法表示为（ ）

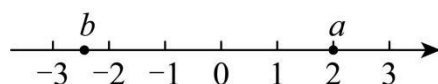
- A. 0.68653×10^8 B. 6.8653×10^8
C. 6.8653×10^7 D. 68.653×10^7

3. 如图，一块直角三角板的直角顶点放在直尺的一边上。如果 $\angle 1 = 70^\circ$ ，那么 $\angle 2$ 的度数是（ ）



- A. 20° B. 25° C. 30° D. 45°

4. 实数 a ， b 在数轴上对应点的位置如图所示，则下列结论正确的是（ ）



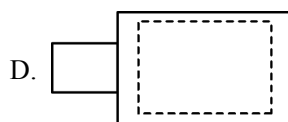
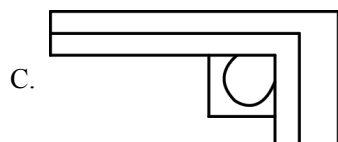
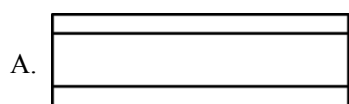
A. $ab > 0$

B. $a + b > 0$

C. $a + 3 < b + 3$

D. $-3a < -3b$

5. 下图是度量衡工具汉尺、秦权、新莽铜卡尺和商鞅方升的示意图，其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



6. 下列运算正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^4 = a^8$

B. $a^4 - a^3 = a$

C. $(a^2)^3 = a^5$

D. $a^4 \div a^2 = a^2$

7. 已知点 $A(-4, y_1)$, $B(-2, y_2)$, $C(3, y_3)$ 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图象上，则 y_1 , y_2 , y_3 的大小关系为 ()

A. $y_3 < y_2 < y_1$

B. $y_1 < y_3 < y_2$

C. $y_3 < y_1 < y_2$

D. $y_2 < y_3 < y_1$

8. 从甲、乙、丙、丁 4 名同学中随机抽取 2 名同学参加图书节志愿服务活动，其中甲同学是女生，乙、丙、丁同学都是男生，被抽到的 2 名同学都是男生的概率为 ()

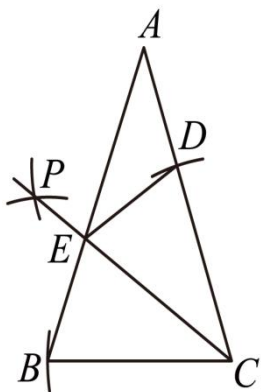
A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$, $\angle BAC = 36^\circ$ ，以点 C 为圆心，以 BC 为半径作弧交 AC 于点 D ，再分别以 B , D 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径作弧，两弧相交于点 P ，作射线 CP 交 AB 于点 E ，连接 DE 。以下结论不正确的是 ()



A. $\angle BCE = 36^\circ$

B. $BC = AE$

C. $\frac{BE}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D. $\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

10. 定义：在平面直角坐标系中，对于点 $P(x_1, y_1)$ ，当点 $Q(x_2, y_2)$ 满足 $2(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$ 时，称点 $Q(x_2, y_2)$ 是点 $P(x_1, y_1)$ 的“倍增点”，已知点 $P_1(1, 0)$ ，有下列结论：

①点 $Q_1(3, 8)$ ， $Q_2(-2, -2)$ 都是点 P_1 的“倍增点”；

②若直线 $y = x + 2$ 上的点 A 是点 P_1 的“倍增点”，则点 A 的坐标为 $(2, 4)$ ；

③抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 上存在两个点是点 P_1 的“倍增点”；

④若点 B 是点 P_1 的“倍增点”，则 P_1B 的最小值是 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 。

其中，正确结论的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

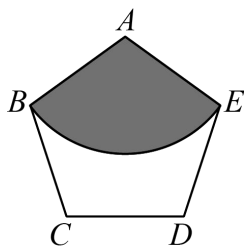
二、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。直接填写答案。

11. 因式分解： $x^2 - 16 =$ _____。

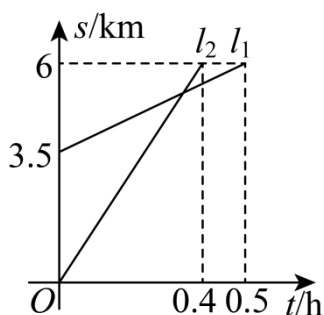
12. 围棋起源于中国，棋子分黑白两色。一个不透明的盒子中装有 3 个黑色棋子和若干个白色棋子，每个棋子除颜色外都相同，任意摸出一个棋子，摸到黑色棋子的概率是 $\frac{1}{4}$ ，则盒子中棋子的总个数是_____。

13. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + 2a = 0$ 有实数根，则 a 的值可以是_____ (写出一个即可)。

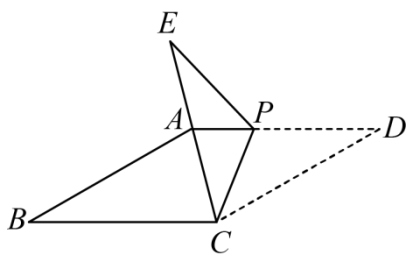
14. 如图，正五边形 $ABCDE$ 的边长为 2，以 A 为圆心，以 AB 为半径作弧 BE ，则阴影部分的面积为_____ (结果保留 π)。



15. 学校提倡“低碳环保，绿色出行”，小明和小亮分别选择步行和骑自行车上学，两人各自从家同时同向出发，沿同一条路匀速前进. 如图所示， l_1 和 l_2 分别表示两人到小亮家的距离 $s(\text{km})$ 和时间 $t(\text{h})$ 的关系，则出发_____h后两人相遇.



16. 如图，将菱形纸片 $ABCD$ 沿过点 C 的直线折叠，使点 D 落在射线 CA 上的点 E 处，折痕 CP 交 AD 于点 P . 若 $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AP = 2$ ，则 PE 的长等于_____.

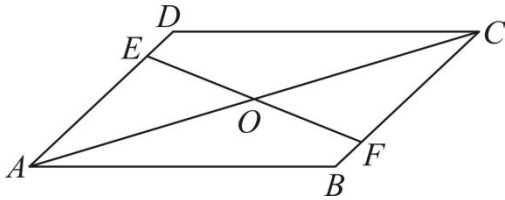


三、解答题：本题共 10 小题，共 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

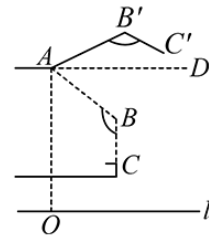
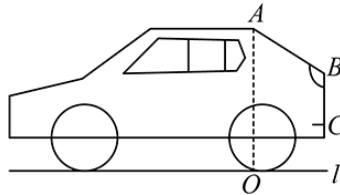
17. 计算： $|\sqrt{3}| + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (\pi + 1)^0 - \tan 60^\circ$.

18. 解不等式组：
$$\begin{cases} 2(x+2) > x+3 & \text{①} \\ \frac{x}{3} < \frac{x+2}{5} & \text{②} \end{cases}$$
，并写出它的所有整数解.

19. 已知：如图，点 O 为 $ABCD$ 对角线 AC 的中点，过点 O 的直线与 AD ， BC 分别相交于点 E ， F .
求证： $DE = BF$.



20. 图 1 是某越野车的侧面示意图, 折线段 ABC 表示车后盖, 已知 $AB = 1\text{m}$, $BC = 0.6\text{m}$, $\angle ABC = 123^\circ$, 该车的高度 $AO = 1.7\text{m}$. 如图 2, 打开后备箱, 车后盖 ABC 落在 $AB'C'$ 处, AB' 与水平面的夹角 $\angle B'AD = 27^\circ$.



- (1) 求打开后备箱后, 车后盖最高点 B' 到地面 l 的距离;
- (2) 若小琳爸爸的身高为 1.8m , 他从打开的车后盖 C' 处经过, 有没有碰头的危险? 请说明理由.

(结果精确到 0.01m , 参考数据: $\sin 27^\circ \approx 0.454$, $\cos 27^\circ \approx 0.891$, $\tan 27^\circ \approx 0.510$, $\sqrt{3} \approx 1.732$)

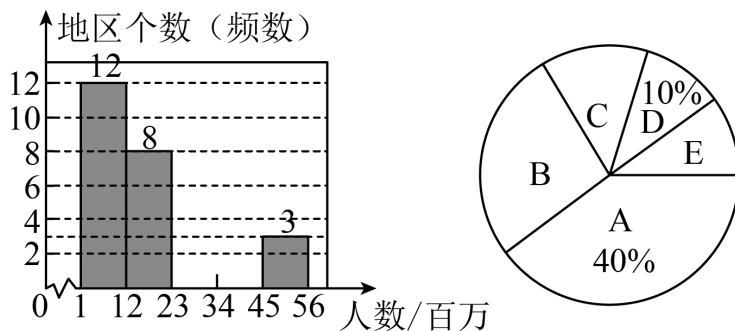
21. 2023 年, 国内文化和旅游行业复苏势头强劲. 某社团对 30 个地区“五一”假期的出游人数进行了调查, 获得了它们“五一”假期出游人数 (出游人数用 m 表示, 单位: 百万) 的数据, 并对数据进行统计整理. 数据分成 5 组:

A 组: $1 \leq m < 12$; B 组: $12 \leq m < 23$; C 组: $23 \leq m < 34$; D 组: $34 \leq m < 45$; E 组: $45 \leq m < 56$.

下面给出了部分信息:

a. B 组的数据: 12, 13, 15, 16, 17, 17, 18, 20.

b. 不完整的“五一”假期出游人数的频数分布直方图和扇形统计图如下:



请根据以上信息完成下列问题:

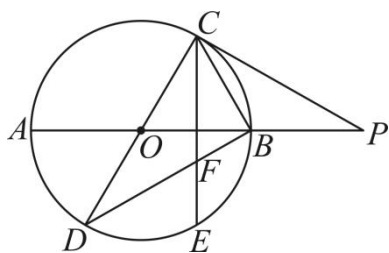
- (1) 统计图中 E 组对应扇形的圆心角为_____度;
- (2) 请补全频数分布直方图;
- (3) 这 30 个地区“五一”假期出游人数的中位数是_____百万;

(4) 各组“五一”假期的平均出游人数如下表:

组别	A $1 \leq m < 12$	B $12 \leq m < 23$	C $23 \leq m < 34$	D $34 \leq m < 45$	E $45 \leq m < 56$
平均出游人数 (百万)	5.5	16	32.5	42	50

求这 30 个地区“五一”假期的平均出游人数.

22. 如图, AB , CD 为 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, 过点 C 的切线与 AB 的延长线交于点 P , $\angle ABC = 2\angle BCP$, 点 E 是 $\widehat{BD}$ 的中点, 弦 CE , BD 相交于点 F .



(1) 求 $\angle OCB$ 的度数;

(2) 若 $EF = 3$, 求 $\odot O$ 直径的长.

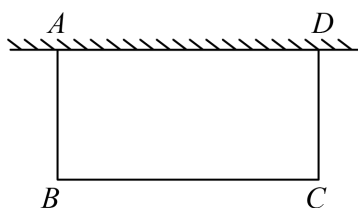
23. 某校开设智能机器人编程的校本课程, 购买了 A , B 两种型号的机器人模型. A 型机器人模型单价比 B 型机器人模型单价多 200 元, 用 2000 元购买 A 型机器人模型和用 1200 元购买 B 型机器人模型的数量相同.

(1) 求 A 型, B 型机器人模型的单价分别是多少元?

(2) 学校准备再次购买 A 型和 B 型机器人模型共 40 台, 购买 B 型机器人模型不超过 A 型机器人模型的 3 倍, 且商家给出了两种型号机器人模型均打八折的优惠. 问购买 A 型和 B 型机器人模型各多少台时花费最少? 最少花费是多少元?

24 综合与实践

如图 1, 某兴趣小组计划开垦一个面积为 8m^2 的矩形地块 $ABCD$ 种植农作物, 地块一边靠墙, 另外三边用木栏围住, 木栏总长为 $a\text{m}$.



【问题提出】

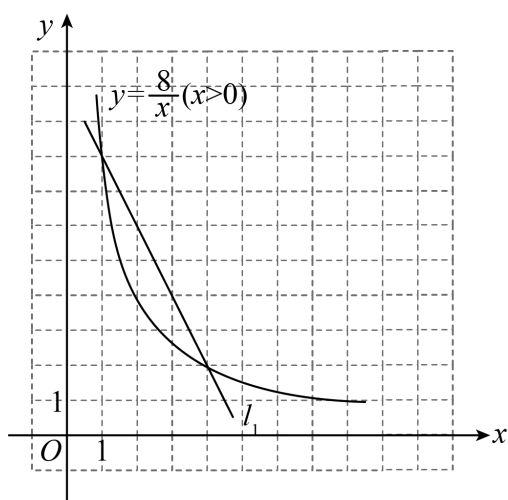
小组同学提出这样一个问题: 若 $a = 10$, 能否围出矩形地块?

【问题探究】

小颖尝试从“函数图象”的角度解决这个问题：

设 AB 为 $x\text{m}$ ， BC 为 $y\text{m}$ ．由矩形地块面积为 8m^2 ，得到 $xy = 8$ ，满足条件的 (x, y) 可看成是反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象在第一象限内点的坐标；木栏总长为 10m ，得到 $2x + y = 10$ ，满足条件的 (x, y) 可看成一次函数 $y = -2x + 10$ 的图象在第一象限内点的坐标，同时满足这两个条件的 (x, y) 就可以看成两个函数图象交点的坐标．

如图 2，反比例函数 $y = \frac{8}{x} (x > 0)$ 的图象与直线 $l_1: y = -2x + 10$ 的交点坐标为 $(1, 8)$ 和 _____，因此，木栏总长为 10m 时，能围出矩形地块，分别为： $AB = 1\text{m}$ ， $BC = 8\text{m}$ ；或 $AB = \underline{\hspace{2cm}}\text{m}$ ， $BC = \underline{\hspace{2cm}}\text{m}$ ．



(1) 根据小颖的分析思路，完成上面的填空．

【类比探究】

(2) 若 $a = 6$ ，能否围出矩形地块？请仿照小颖的方法，在图 2 中画出一条函数图象并说明理由．

【问题延伸】

当木栏总长为 $a\text{m}$ 时，小颖建立了一次函数 $y = -2x + a$ ．发现直线 $y = -2x + a$ 可以看成是直线 $y = -2x$ 通过平移得到的，在平移过程中，当过点 $(2, 4)$ 时，直线 $y = -2x + a$ 与反比例函数 $y = \frac{8}{x} (x > 0)$ 的图象有唯一交点．

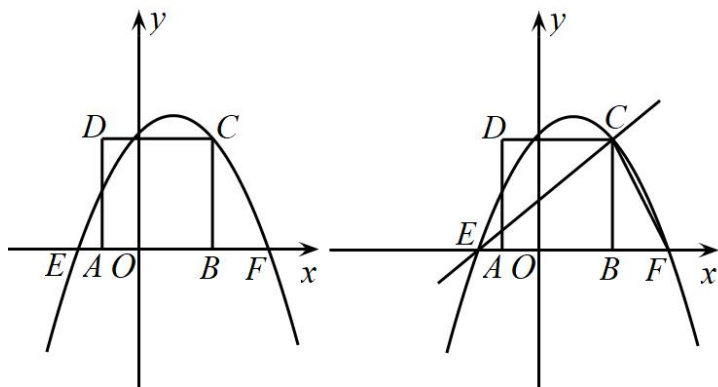
(3) 请在图 2 中画出直线 $y = -2x + a$ 过点 $(2, 4)$ 时的图象，并求出 a 的值．

【拓展应用】

小颖从以上探究中发现“能否围成矩形地块问题”可以转化为“ $y = -2x + a$ 与 $y = \frac{8}{x}$ 图象在第一象限内交点的存在问题”．

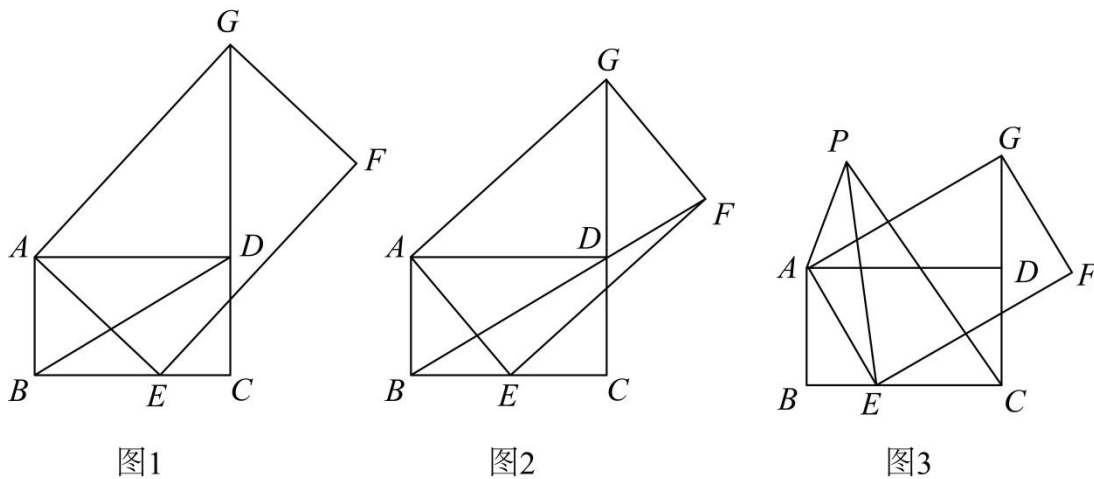
(4) 若要围出满足条件的矩形地块，且 AB 和 BC 的长均不小于 1m ，请直接写出 a 的取值范围．

25. 在平面直角坐标系 xOy 中，正方形 $ABCD$ 的顶点 A, B 在 x 轴上， $C(2,3)$ ， $D(-1,3)$ 。抛物线 $y = ax^2 - 2ax + c (a < 0)$ 与 x 轴交于点 $E(-2,0)$ 和点 F 。



- (1) 如图 1，若抛物线过点 C ，求抛物线的表达式和点 F 的坐标；
- (2) 如图 2，在 (1) 的条件下，连接 CF ，作直线 CE ，平移线段 CF ，使点 C 的对应点 P 落在直线 CE 上，点 F 的对应点 Q 落在抛物线上，求点 Q 的坐标；
- (3) 若抛物线 $y = ax^2 - 2ax + c (a < 0)$ 与正方形 $ABCD$ 恰有两个交点，求 a 的取值范围。

26. 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $AD = 2\sqrt{3}$ ，点 E 在边 BC 上，将射线 AE 绕点 A 逆时针旋转 90° ，交 CD 延长线于点 G ，以线段 AE, AG 为邻边作矩形 $AEFG$ 。



- (1) 如图 1，连接 BD ，求 $\angle BDC$ 的度数和 $\frac{DG}{BE}$ 的值；
- (2) 如图 2，当点 F 在射线 BD 上时，求线段 BE 的长；
- (3) 如图 3，当 $EA = EC$ 时，在平面内有一动点 P ，满足 $PE = EF$ ，连接 PA, PC ，求 $PA + PC$ 的最小值。

