

# 2024 年长春市初中学业水平考试

## 数学

本试卷包括三道大题，共 6 页. 全卷满分为 120 分，考试时间为 120 分钟. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将条形码准确粘贴在条形码区域内.

2. 答题时，考生务必按照考试要求在答题卡上的指定区域内作答，在草稿纸、试卷上答题无效.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 根据有理数加法法则，计算  $2+(-3)$  过程正确的是 ( )

- A.  $+(3+2)$                       B.  $+(3-2)$                       C.  $-(3+2)$                       D.  $-(3-2)$

2. 南湖公园是长春市著名旅游景点之一，图①是公园中“四角亭”景观的照片，图②是其航拍照片，则图③是“四角亭”景观的 ( ).



图 ①

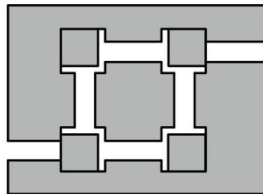


图 ②

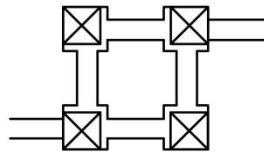
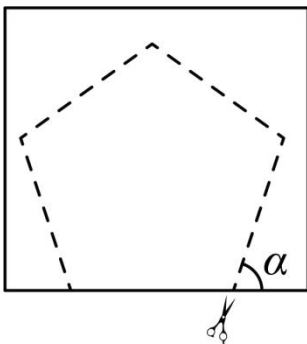


图 ③

- A. 主视图                      B. 俯视图                      C. 左视图                      D. 右视图

3. 在剪纸活动中，小花同学想用一张矩形纸片剪出一个正五边形，其中正五边形的一条边与矩形的边重合，如图所示，则  $\angle \alpha$  的大小为 ( )



- A. 54                      B. 60°                      C. 70°                      D. 72°

4. 下列运算一定正确的是 ( )

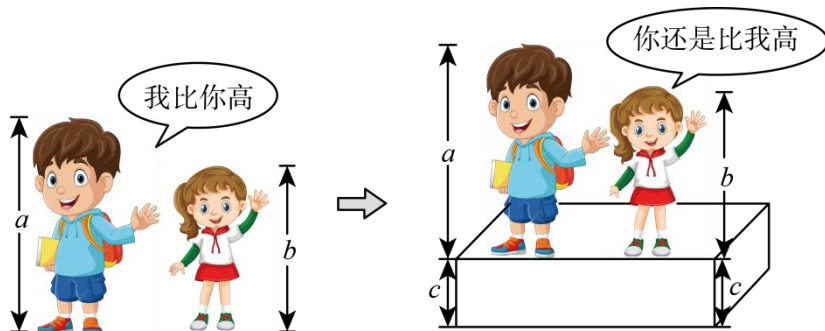
A.  $2a \cdot 3a = 6a$

B.  $a^2 \cdot a^3 = a^6$

C.  $(ab)^2 = a^2b^2$

D.  $(a^3)^2 = a^5$

5. 不等关系在生活中广泛存在. 如图,  $a$ 、 $b$  分别表示两位同学的身高,  $c$  表示台阶的高度. 图中两人的对话体现的数学原理是 ( )



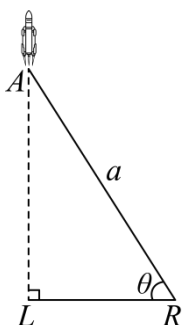
A. 若  $a > b$ , 则  $a + c > b + c$

B. 若  $a > b$ ,  $b > c$ , 则  $a > c$

C. 若  $a > b$ ,  $c > 0$ , 则  $ac > bc$

D. 若  $a > b$ ,  $c > 0$ , 则  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

6. 2024 年 5 月 29 日 16 时 12 分, “长春净月一号”卫星搭乘谷神星一号火箭在黄海海域成功发射. 当火箭上升到点 A 时, 位于海平面 R 处的雷达测得点 R 到点 A 的距离为  $a$  千米, 仰角为  $\theta$ , 则此时火箭距海平面的高度 AL 为 ( )



A.  $a \sin \theta$  千米

B.  $\frac{a}{\sin \theta}$  千米

C.  $a \cos \theta$  千米

D.  $\frac{a}{\cos \theta}$  千米

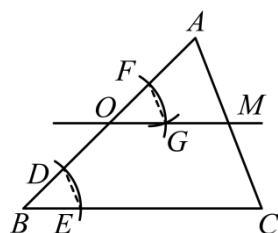
7. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $O$  是边  $AB$  的中点. 按下列要求作图:

①以点  $B$  为圆心、适当长为半径画弧, 交线段  $BO$  于点  $D$ , 交  $BC$  于点  $E$ ;

②以点  $O$  为圆心、 $BD$  长为半径画弧, 交线段  $OA$  于点  $F$ ;

③以点  $F$  为圆心、 $DE$  长为半径画弧, 交前一条弧于点  $G$ , 点  $G$  与点  $C$  在直线  $AB$  同侧;

④作直线  $OG$ , 交  $AC$  于点  $M$ . 下列结论不一定成立的是 ( )



A.  $\angle AOM = \angle B$

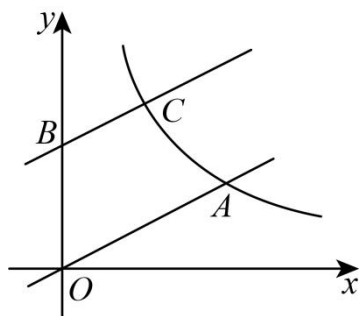
B.  $\angle OMC + \angle C = 180^\circ$

C.  $AM = CM$

D.  $OM = \frac{1}{2}AB$

8. 如图，在平面直角坐标系中，点  $O$  是坐标原点，点  $A(4,2)$  在函数  $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$  的图象上. 将直线  $OA$  沿  $y$  轴向上平移，平移后的直线与  $y$  轴交于点  $B$ ，与函数  $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$  的图象交于点  $C$ . 若

$BC = \sqrt{5}$ ，则点  $B$  的坐标是 ( )



A.  $(0, \sqrt{5})$

B.  $(0, 3)$

C.  $(0, 4)$

D.  $(0, 2\sqrt{5})$

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分.

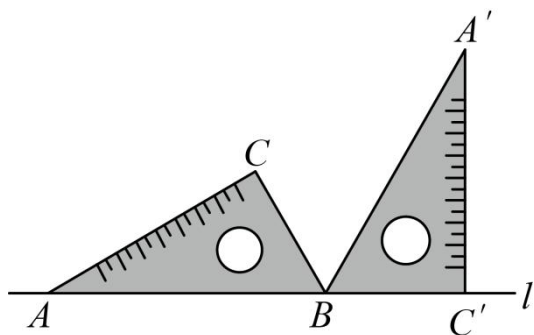
9. 单项式  $-2a^2b$  的次数是\_\_\_\_\_.

10. 计算：  $\sqrt{12} - \sqrt{3} =$ \_\_\_\_\_.

11. 若抛物线  $y = x^2 - x + c$  ( $c$  是常数) 与  $x$  轴没有交点，则  $c$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

12. 已知直线  $y = kx + b$  ( $k, b$  是常数) 经过点  $(1, 1)$ ，且  $y$  随  $x$  的增大而减小，则  $b$  的值可以是\_\_\_\_\_. (写出一个即可)

13. 一块含  $30^\circ$  角的直角三角板  $ABC$  按如图所示的方式摆放，边  $AB$  与直线  $l$  重合， $AB = 12$  cm. 现将该三角板绕点  $B$  顺时针旋转，使点  $C$  的对应点  $C'$  落在直线  $l$  上，则点  $A$  经过的路径长至少为\_\_\_\_\_ cm. (结果保留  $\pi$ )



14. 如图， $AB$  是半圆的直径， $AC$  是一条弦， $D$  是  $\widehat{AC}$  的中点， $DE \perp AB$  于点  $E$ ，交  $AC$  于点  $F$ ， $DB$  交  $AC$  于点  $G$ ，连结  $AD$ . 给出下面四个结论：

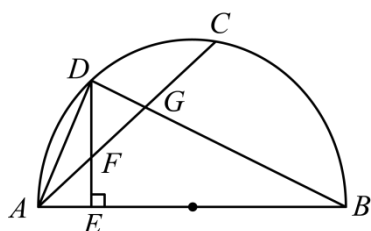
①  $\angle ABD = \angle DAC$ ;

②  $AF = FG$ ;

③ 当  $DG = 2$ ,  $GB = 3$  时,  $FG = \frac{\sqrt{14}}{2}$ ;

④ 当  $\widehat{BD} = 2\widehat{AD}$ ,  $AB = 6$  时,  $\triangle DFG$  的面积是  $\sqrt{3}$ .

上述结论中, 正确结论的序号有\_\_\_\_\_.



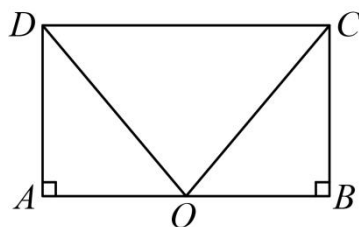
三、解答题: 本题共 10 小题, 共 78 分.

15. 先化简, 再求值:  $\frac{x^3}{x-2} - \frac{2x^2}{x-2}$ , 其中  $x = \sqrt{2}$ .

16. 2021 年吉林省普通高中开始施行新高考选科模式, 此模式有若干种学科组合, 每位高中生可根据自己的实际情况选择一种. 一对双胞胎姐妹考入同一所高中且选择了相同组合, 该校要将所有选报这种组合的学生分成 A、B、C 三个班, 其中每位学生被分到这三个班的机会均等. 用画树状图 (或列表) 的方法, 求这对双胞胎姐妹被分到同一个班的概率.

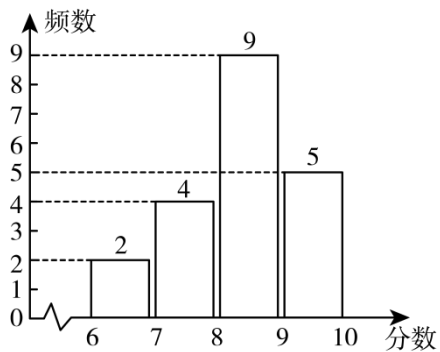
17. 《九章算术》被历代数学家尊为“算经之首”. 下面是其卷中记载的关于“盈不足”的一个问题: 今有共买金, 人出四百, 盈三千四百; 人出三百, 盈一百. 问人数、金价各几何? 这段话的意思是: 今有人合伙买金, 每人出 400 钱, 会剩余 3400 钱; 每人出 300 钱, 会剩余 100 钱. 合伙人数、金价各是多少? 请解决上述问题.

18. 如图, 在四边形 ABCD 中,  $\angle A = \angle B = 90^\circ$ , O 是边 AB 的中点,  $\angle AOD = \angle BOC$ . 求证: 四边形 ABCD 是矩形.



19. 某校为调研学生对本校食堂的满意度, 从初中部和高中部各随机抽取 20 名学生, 对食堂进行满意度评分 (满分 10 分), 将收集到的评分数据进行整理、描述和分析. 下面给出了部分信息:

a. 高中部 20 名学生所评分数的频数分布直方图如下图: (数据分成 4 组:  $6 \leq x < 7$ ,  $7 \leq x < 8$ ,  $8 \leq x < 9$ ,  $9 \leq x \leq 10$ )



b. 高中部 20 名学生所评分数在  $8 \leq x < 9$  这一组的是:

8.0 8.1 8.2 8.2 8.4 8.5 8.6 8.7 8.8

c. 初中部、高中部各 20 名学生所评分数的平均数、中位数如下:

|     | 平均数 | 中位数 |
|-----|-----|-----|
| 初中部 | 8.3 | 8.5 |
| 高中部 | 8.3 | $m$ |

根据以上信息, 回答下列问题:

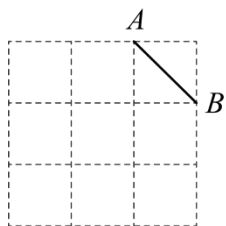
(1) 表中  $m$  的值为\_\_\_\_\_;

(2) 根据调查前制定的满意度等级划分标准, 评分不低于 8.5 分为“非常满意”.

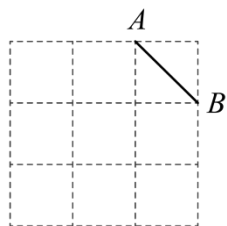
①在被调查的学生中, 设初中部、高中部对食堂“非常满意”的人数分别为  $a$ 、 $b$ , 则  $a$  \_\_\_\_\_  $b$ ; (填“>” “<” 或 “=” )

②高中部共有 800 名学生在食堂就餐, 估计其中对食堂“非常满意”的学生人数.

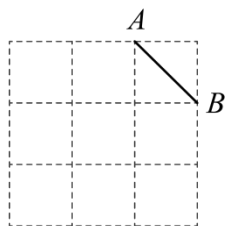
20. 图①、图②、图③均是  $3 \times 3$  的正方形网格, 每个小正方形的边长均为 1, 每个小正方形的顶点称为格点. 点  $A$ 、 $B$  均在格点上, 只用无刻度的直尺, 分别在给定的网格中按下列要求作四边形  $ABCD$ , 使其是轴对称图形且点  $C$ 、 $D$  均在格点上.



图①



图②



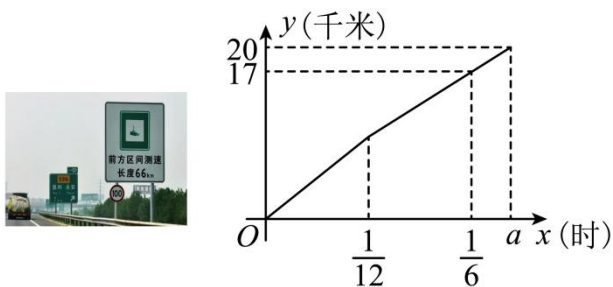
图③

(1) 在图①中, 四边形  $ABCD$  面积为 2;

(2) 在图②中, 四边形  $ABCD$  面积为 3;

(3) 在图③中, 四边形  $ABCD$  面积为 4.

21. 区间测速是指在某一路段前后设置两个监控点, 根据车辆通过两个监控点的时间来计算车辆在该路段上的平均行驶速度. 小春驾驶一辆小型汽车在高速公路上行驶, 其间经过一段长度为 20 千米的区间测速路段, 从该路段起点开始, 他先匀速行驶  $\frac{1}{12}$  小时, 再立即减速以另一速度匀速行驶 (减速时间忽略不计), 当他到达该路段终点时, 测速装置测得该辆汽车在整个路段行驶的平均速度为 100 千米/时. 汽车在区间测速路段行驶的路程  $y$  (千米) 与在此路段行驶的时间  $x$  (时) 之间的函数图象如图所示.



(1)  $a$  的值为\_\_\_\_\_;

(2) 当  $\frac{1}{12} \leq x \leq a$  时, 求  $y$  与  $x$  之间的函数关系式;

(3) 通过计算说明在此区间测速路段内, 该辆汽车减速前是否超速. (此路段要求小型汽车行驶速度不得超过 120 千米/时)

## 22. 【问题呈现】

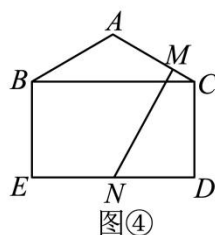
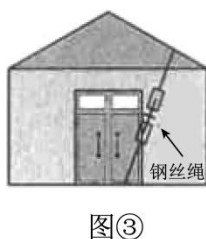
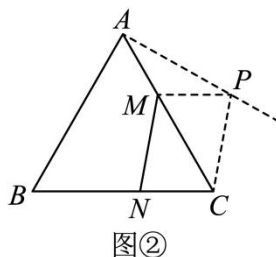
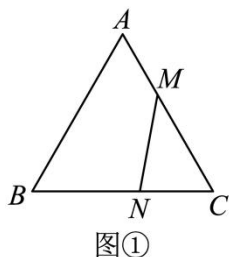
小明在数学兴趣小组活动时遇到一个几何问题: 如图①, 在等边  $\triangle ABC$  中,  $AB = 3$ , 点  $M$ 、 $N$  分别在边  $AC$ 、 $BC$  上, 且  $AM = CN$ , 试探究线段  $MN$  长度的最小值.

### 【问题分析】

小明通过构造平行四边形, 将双动点问题转化为单动点问题, 再通过定角发现这个动点的运动路径, 进而解决上述几何问题.

### 【问题解决】

如图②, 过点  $C$ 、 $M$  分别作  $MN$ 、 $BC$  的平行线, 并交于点  $P$ , 作射线  $AP$ . 在【问题呈现】的条件下, 完成下列问题:



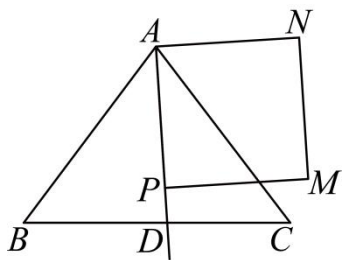
(1) 证明:  $AM = MP$ ;

(2)  $\angle CAP$  的大小为\_\_\_\_\_度, 线段  $MN$  长度的最小值为\_\_\_\_\_.

【方法应用】

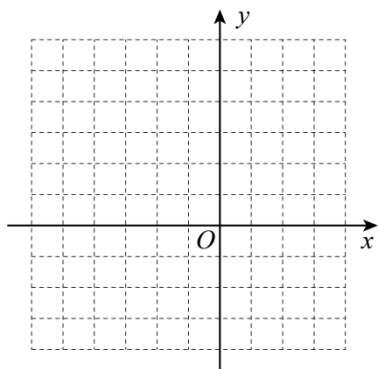
某种简易房屋在整体运输前需用钢丝绳进行加固处理, 如图③. 小明收集了该房屋的相关数据, 并画出了示意图, 如图④,  $\triangle ABC$  是等腰三角形, 四边形  $BCDE$  是矩形,  $AB = AC = CD = 2$  米,  $\angle ACB = 30^\circ$ .  $MN$  是一条两端点位置和长度均可调节的钢丝绳, 点  $M$  在  $AC$  上, 点  $N$  在  $DE$  上. 在调整钢丝绳端点位置时, 其长度也随之改变, 但需始终保持  $AM = DN$ . 钢丝绳  $MN$  长度的最小值为多少米.

23. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC = 5$ ,  $BC = 6$ . 点  $D$  是边  $BC$  上的一点 (点  $D$  不与点  $B$ 、 $C$  重合), 作射线  $AD$ , 在射线  $AD$  上取点  $P$ , 使  $AP = BD$ , 以  $AP$  为边作正方形  $APMN$ , 使点  $M$  和点  $C$  在直线  $AD$  同侧.



- (1) 当点  $D$  是边  $BC$  的中点时, 求  $AD$  的长;
- (2) 当  $BD = 4$  时, 点  $D$  到直线  $AC$  的距离为\_\_\_\_\_;
- (3) 连结  $PN$ , 当  $PN \perp AC$  时, 求正方形  $APMN$  的边长;
- (4) 若点  $N$  到直线  $AC$  的距离是点  $M$  到直线  $AC$  距离的 3 倍, 则  $CD$  的长为\_\_\_\_\_. (写出一个即可)

24. 在平面直角坐标系中, 点  $O$  是坐标原点, 抛物线  $y = x^2 + 2x + c$  ( $c$  是常数) 经过点  $(-2, -2)$ . 点  $A$ 、 $B$  是该抛物线上不重合的两点, 横坐标分别为  $m$ 、 $-m$ , 点  $C$  的横坐标为  $-5m$ , 点  $C$  的纵坐标与点  $A$  的纵坐标相同, 连结  $AB$ 、 $AC$ .



- (1) 求该抛物线对应的函数表达式;
  - (2) 求证: 当  $m$  取不为零的任意实数时,  $\tan \angle CAB$  的值始终为 2;
  - (3) 作  $AC$  的垂直平分线交直线  $AB$  于点  $D$ , 以  $AD$  为边、 $AC$  为对角线作菱形  $ADCE$ , 连结  $DE$ .
- ①当  $DE$  与此抛物线的对称轴重合时, 求菱形  $ADCE$  的面积;

②当此抛物线在菱形  $ADCE$  内部的点的纵坐标  $y$  随  $x$  的增大而增大时，直接写出  $m$  的取值范围.