

吉林省 2024 年初中学业水平考试

数学试题

数学试卷共 7 页，包括六道大题，共 26 道小题，全卷满分 120 分。考试时间为 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

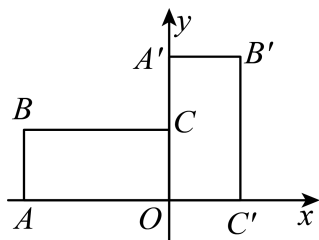
1. 答题前，考生务必将姓名、准考证号填写在答题卡上，并将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时，考生务必按照考试要求在答题卡上的指定区域内作答，在草稿纸、试卷上答题无效。

一、单项选择题（每小题 2 分，共 12 分）

1. 若 $(-3)^{\square}$ 的运算结果为正数，则 $\square$ 内的数字可以为（ ）
A. 2 B. 1 C. 0 D. -1
2. 长白山天池系由火山口积水成湖，天池湖水碧蓝，水平如镜，群峰倒映，风景秀丽，总蓄水量约达 20400000000m^3 ，数据 20400000000 用科学记数法表示为（ ）
A. 2.04×10^{10} B. 2.04×10^9 C. 20.4×10^8 D. 0.204×10^{10}
3. 葫芦在我国古代被看作吉祥之物。下图是一个工艺葫芦的示意图，关于它的三视图说法正确的是（ ）

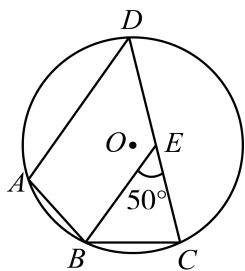


- A. 主视图与左视图相同 B. 主视图与俯视图相同
- C. 左视图与俯视图相同 D. 主视图、左视图与俯视图都相同
4. 下列方程中，有两个相等实数根的是（ ）
A. $(x-2)^2 = -1$ B. $(x-2)^2 = 0$
C. $(x-2)^2 = 1$ D. $(x-2)^2 = 2$
5. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为 $(-4, 0)$ ，点 C 的坐标为 $(0, 2)$ 。以 OA，OC 为边作矩形 OABC，若将矩形 OABC 绕点 O 顺时针旋转 90° ，得到矩形 OA'B'C'，则点 B' 的坐标为（ ）



- A. $(-4, -2)$ B. $(-4, 2)$ C. $(2, 4)$ D. $(4, 2)$

6. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，过点 B 作 $BE \parallel AD$ ，交 CD 于点 E 。若 $\angle BEC = 50^\circ$ ，则 $\angle ABC$ 的度数是 ()



- A. 50° B. 100° C. 130° D. 150°

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

7. 当分式 $\frac{1}{x+1}$ 的值为正数时，写出一个满足条件的 x 的值为_____.

8. 因式分解： $a^2 - 3a =$ _____.

9. 不等式组 $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$ 的解集为_____.

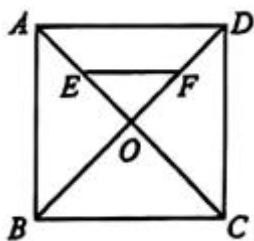
10. 如图，从长春站去往胜利公园，与其它道路相比，走人民大街路程最近，其蕴含的数学道理是_____.



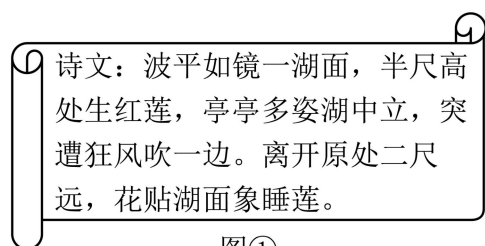
11. 正六边形的每个内角等于_____°.

12. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E 是 OA 的中点，点 F 是 OD 上一点。连接

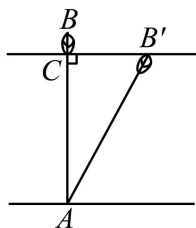
EF 。若 $\angle FEO = 45^\circ$ ，则 $\frac{EF}{BC}$ 的值为_____.



13. 图①中有一首古算诗，根据诗中的描述可以计算出红莲所在位置的湖水深度，其示意图如图②，其中 $AB = AB'$ ， $AB \perp B'C$ 于点 C ， $BC = 0.5$ 尺， $B'C = 2$ 尺。设 AC 的长度为 x 尺，可列方程为_____。

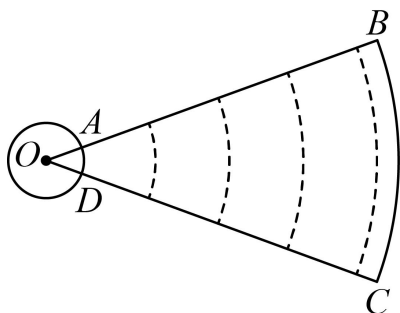


图①



图②

14. 某新建学校因场地限制，要合理规划体育场地，小明绘制的铅球场地设计图如图所示，该场地由 $\odot O$ 和扇形 OBC 组成， OB, OC 分别与 $\odot O$ 交于点 A, D 。 $OA = 1\text{m}$ ， $OB = 10\text{m}$ ， $\angle AOD = 40^\circ$ ，则阴影部分的面积为_____ m^2 （结果保留 π ）。

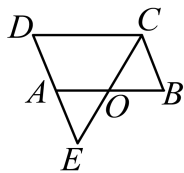


三、解答题（每小题 5 分，共 20 分）

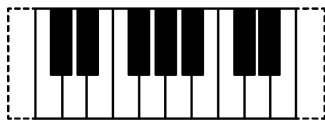
15. 先化简，再求值： $(a+1)(a-1) + a^2 + 1$ ，其中 $a = \sqrt{3}$ 。

16. 吉林省以“绿水青山就是金山银山，冰天雪地也是金山银山”为指引，不断加大冰雪旅游的宣传力度，推出各种优惠活动，“小土豆”“小砂糖橘”等成为一道靓丽的风景线，某滑雪场为吸引游客，每天抽取一定数量的幸运游客，每名幸运游客可以从“滑雪”“滑雪圈”“雪地摩托”三个项目中随机抽取一个免费游玩。若三个项目被抽中的可能性相等，用画树状图或列表的方法，求幸运游客小明与小亮恰好抽中同一个项目的概率。

17. 如图，在 $ABCD$ 中，点 O 是 AB 的中点，连接 CO 并延长，交 DA 的延长线于点 E ，求证： $AE = BC$ 。

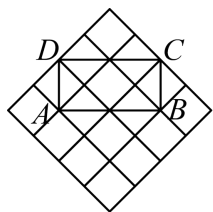


18. 钢琴素有“乐器之王”的美称, 键盘上白色琴键和黑色琴键共有 88 个, 白色琴键比黑色琴键多 16 个. 求白色琴键和黑色琴键的个数.

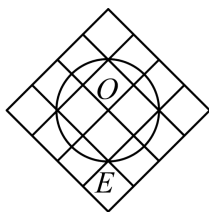


四、解答题 (每小题 7 分, 共 28 分)

19. 图①、图②均是 4×4 的正方形网格, 每个小正方形的顶点称为格点. 点 A, B, C, D, E, O 均在格点上. 图①中已画出四边形 $ABCD$, 图②中已画出以 OE 为半径的 $\odot O$, 只用无刻度的直尺, 在给定的网格中按要求画图.



图①

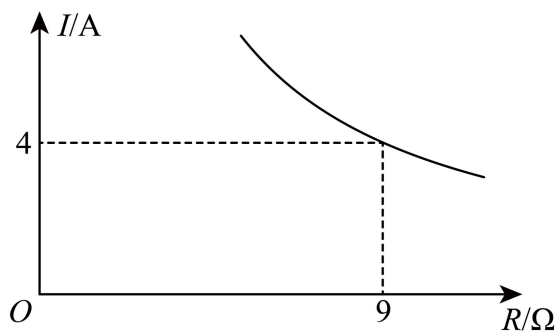


图②

(1) 在图①中, 画出四边形 $ABCD$ 的一条对称轴.

(2) 在图②中, 画出经过点 E 的 $\odot O$ 的切线.

20. 已知蓄电池的电压为定值, 使用蓄电池时, 电流 I (单位: A) 与电阻 R (单位: Ω) 是反比例函数关系, 它的图象如图所示.

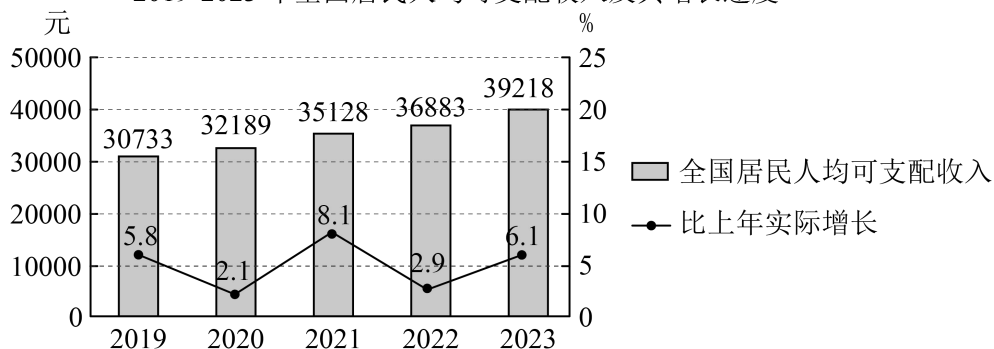


(1) 求这个反比例函数的解析式 (不要求写出自变量 R 的取值范围).

(2) 当电阻 R 为 3Ω 时, 求此时的电流 I .

21. 中华人民共和国 2019–2023 年全国居民人均可支配收入及其增长速度情况如图所示.

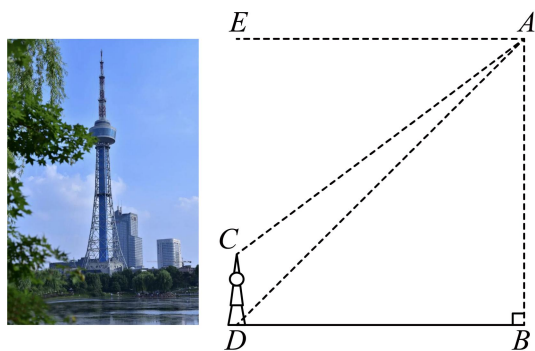
2019-2023 年全国居民人均可支配收入及其增长速度



根据以上信息回答下列问题:

- (1) 2019-2023 年全国居民人均可支配收入中, 收入最高的一年比收入最低的一年多多少元?
 - (2) 直接写出 2019-2023 年全国居民人均可支配收入的中位数.
 - (3) 下列判断合理的是_____ (填序号).
- ① 2019-2023 年全国居民人均可支配收入里逐年上升趋势.
- ② 2019-2023 年全国居民人均可支配收入实际增长速度最慢的年份是 2020 年. 因此这 5 年中, 2020 年全国居民人均可支配收入最低.

22. 图①中的吉林省广播电视塔, 又称“吉塔”. 某直升飞机于空中 A 处探测到吉塔, 此时飞行高度 $AB = 873\text{m}$, 如图②, 从直升飞机上看塔尖 C 的俯角 $\angle EAC = 37^\circ$, 看塔底 D 的俯角 $\angle EAD = 45^\circ$, 求吉塔的高度 CD (结果精确到 0.1m). (参考数据: $\sin 37^\circ = 0.60$, $\cos 37^\circ = 0.80$, $\tan 37^\circ = 0.75$)



图①

图②

五、解答题 (每小题 8 分, 共 16 分)

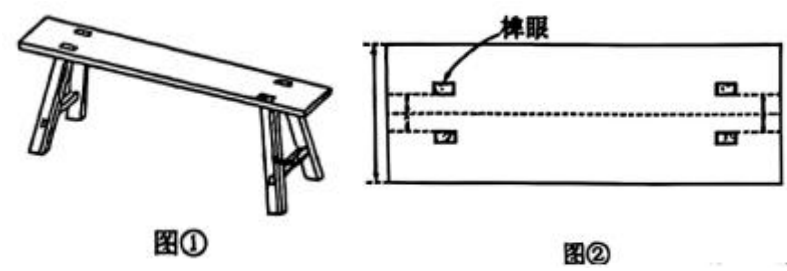
23. 综合与实践

某班同学分三个小组进行“板凳中的数学”的项目式学习研究, 第一小组负责调查板凳的历史及结构特点; 第二小组负责研究板凳中蕴含的数学知识; 第三小组负责汇报和交流, 下面是第三小组汇报的部分内容, 请你阅读相关信息, 并解答“建立模型”中的问题.

【背景调查】

图①中的板凳又叫“四脚八叉凳”, 是中国传统家具, 其榫卯结构体现了古人含蓄内敛的审美观. 榫眼的

设计很有讲究，木工一般用铅笔画出凳面的对称轴，以对称轴为基准向两边各取相同的长度，确定榫眼的位置，如图②所示．板凳的结构设计体现了数学的对称美．



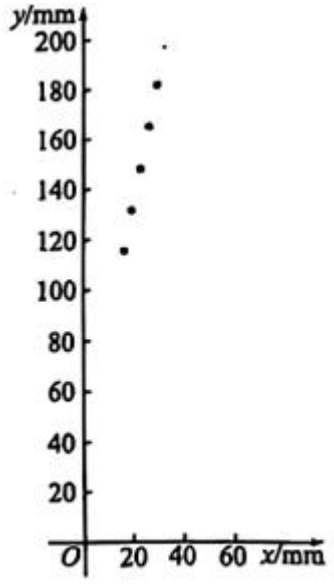
【收集数据】

小组收集了一些板凳并进行了测量．设以对称轴为基准向两边各取相同的长度为 x ，凳面的宽度为 $y\text{mm}$ ，记录如下：

以对称轴为基准向两边各取相同的长度 x/mm	16.5	19.8	23.1	26.4	29.7
凳面的宽度 y/mm	115.5	132	148.5	165	181.5

【分析数据】

如图③，小组根据表中 x ， y 的数值，在平面直角坐标系中描出了各点．

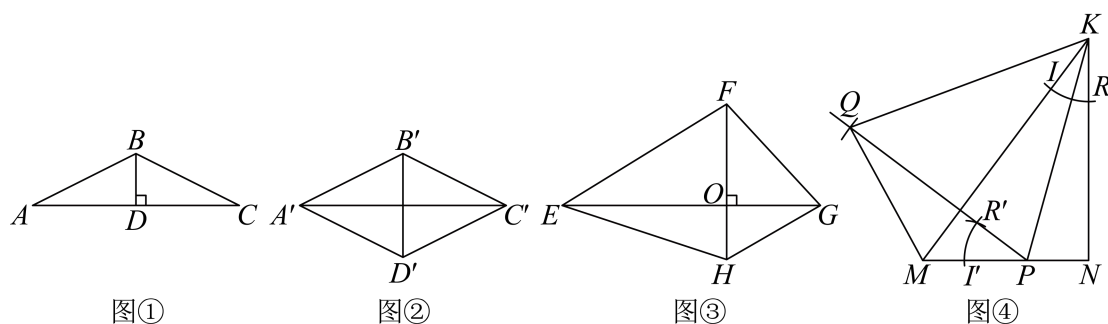


【建立模型】

请你帮助小组解决下列问题：

- (1) 观察上述各点的分布规律，它们是否在同一条直线上？如果在同一条直线上，求出这条直线所对应的函数解析式；如果不在同一条直线上，说明理由．
- (2) 当凳面宽度为 213mm 时，以对称轴为基准向两边各取相同的长度是多少？

24. 小明在学习时发现四边形面积与对角线存在关联，下面是他的研究过程：



【探究论证】

(1) 如图①，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ， $BD \perp AC$ ，垂足为点 D 。若 $CD = 2$ ， $BD = 1$ ，则 $S_{\triangle ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 如图②，在菱形 $A'B'C'D'$ 中， $A'C' = 4$ ， $B'D' = 2$ ，则 $S_{\text{菱形}A'B'C'D'} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 如图③，在四边形 $EFGH$ 中， $EG \perp FH$ ，垂足为点 O 。若 $EG = 5$ ， $FH = 3$ ，则 $S_{\text{四边形}EFGH} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

若 $EG = a$ ， $FH = b$ ，猜想 $S_{\text{四边形}EFGH}$ 与 a ， b 的关系，并证明你的猜想。

【理解运用】

(4) 如图④，在 $\triangle MNK$ 中， $MN = 3$ ， $KN = 4$ ， $MK = 5$ ，点 P 为边 MN 上一点。

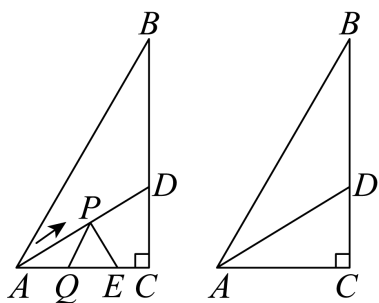
小明利用直尺和圆规分四步作图：

- (i) 以点 K 为圆心，适当长为半径画弧，分别交边 KN ， KM 于点 R ， I ；
- (ii) 以点 P 为圆心， KR 长为半径画弧，交线段 PM 于点 I' ；
- (iii) 以点 I' 为圆心， IR 长为半径画弧，交前一条弧于点 R' ，点 R' ， K 在 MN 同侧；
- (iv) 过点 P 画射线 PR' ，在射线 PR' 上截取 $PQ = KN$ ，连接 KP ， KQ ， MQ 。

请你直接写出 $S_{\text{四边形}MPKQ}$ 的值。

六、解答题 (每小题 10 分，共 20 分)

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $AC = 3\text{cm}$ ， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线。动点 P 从点 A 出发，以 $\sqrt{3}\text{cm/s}$ 的速度沿折线 $AD-DB$ 向终点 B 运动。过点 P 作 $PQ \parallel AB$ ，交 AC 于点 Q ，以 PQ 为边作等边三角形 PQE ，且点 C ， E 在 PQ 同侧，设点 P 的运动时间为 $t(\text{s}) (t > 0)$ ， PQE 与 $\triangle ABC$ 重合部分图形的面积为 $S(\text{cm}^2)$ 。

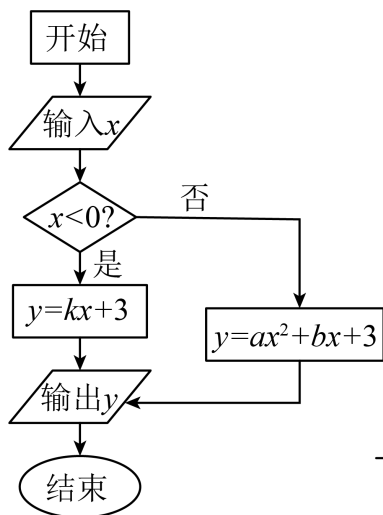


(1) 当点 P 在线段 AD 上运动时, 判断 $\triangle APQ$ 的形状 (不必证明), 并直接写出 AQ 的长 (用含 t 的代数式表示).

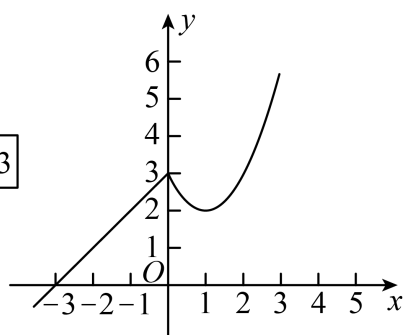
(2) 当点 E 与点 C 重合时, 求 t 的值.

(3) 求 S 关于 t 的函数解析式, 并写出自变量 t 的取值范围.

26. 小明利用一次函数和二次函数知识, 设计了一个计算程序, 其程序框图如图 (1) 所示, 输入 x 的值为 -2 时, 输出 y 的值为 1 ; 输入 x 的值为 2 时, 输出 y 的值为 3 ; 输入 x 的值为 3 时, 输出 y 的值为 6 .



(图1)



(图2)

(1) 直接写出 k , a , b 的值.

(2) 小明在平面直角坐标系中画出了关于 x 的函数图像, 如图 (2).

I. 当 y 随 x 的增大而增大时, 求 x 的取值范围.

II. 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + 3 - t = 0$ (t 为实数), 在 $0 < x < 4$ 时无解, 求 t 的取值范围.

III. 若在函数图像上有点 P , Q (P 与 Q 不重合). P 的横坐标为 m , Q 的横坐标为 $-m+1$. 小明对 P , Q 之间 (含 P , Q 两点) 的图像进行研究, 当图像对应函数的最大值与最小值均不随 m 的变化而变化, 直接写出 m 的取值范围.

