

2025 学年第二学期期中质量调研卷

预备年级数学学科

(时间: 90 分钟 分值: 100 分)

(说明: 本卷中无特殊说明, π 取 3.14)

一. 选择题 (6 小题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 下面不能组成比例的两个比是 ()

- A. 8:3 和 32:12 B. 5:3 和 $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{2}:3$ 和 $\frac{5}{8}:\frac{3}{4}$ D. 0.1:1 和 2:20

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查比例的定义, 表示两个比相等的式子叫做比例. 根据比例的意义, 分别求出各选项中两个比的比值, 比值不相等, 就不能组成比例, 熟知组成比例的条件是解题的关键.

【详解】解: A. $8:3 = 8 \div 3 = \frac{8}{3}$, $32:12 = 32 \div 12 = \frac{8}{3}$ 比值相等, 8:3 和 32:12 能组成比例;

B. $5:3 = 5 \div 3 = \frac{5}{3}$, $\frac{1}{3}:\frac{1}{5} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{5} = \frac{5}{3}$, 比值相等, 5:3 和 $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}$ 能组成比例;

C. $\frac{1}{2}:3 = \frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$, $\frac{5}{8}:\frac{3}{4} = \frac{5}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{6}$, 比值不相等, $\frac{1}{2}:3$ 和 $\frac{5}{8}:\frac{3}{4}$ 不能组成比例;

D. $0.1:1 = 0.1 \div 1 = 0.1$, $2:20 = 2 \div 20 = 0.1$ 比值相等, 0.1:1 和 2:20 能组成比例.

故选 C.

2. 一个车间改革后, 人员减少了 20%, 产量比原来增加了 20%, 则工作效率 ().

- A. 提高了 50% B. 提高了 40% C. 提高了 30% D. 不变

【答案】A

【解析】

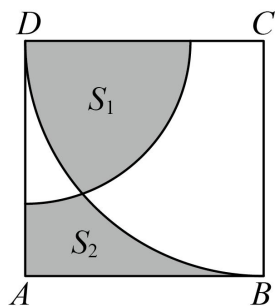
【分析】本题主要考查百分数的应用, 工作总量增加 20%, 就是原来的 $1+20\%$; 人数减少了 20%, 要由现在 80% 的人干, 则新的工作效率是原来的 $(1+20\%) \div 80\%$, 然后减去原来的工作效率 1 就是提高的工作效率.

【详解】解: $(1+20\%) \div (1-20\%) - 1$

$$= 120\% \div 80\% - 1$$

$$= 150\% - 1$$

$$= 50\%,$$



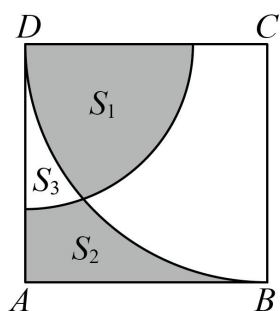
- A. 52π B. 25π C. $52\pi - 64$ D. $25\pi - 64$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查了扇形面积的计算，根据题意和图形，可以分别计算出 $S_1 + S_3$ 和 $S_2 + S_3$ 的值，然后用 $(S_1 + S_3) - (S_2 + S_3)$ 即可得到 $S_1 - S_2$ 的值，解题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

【详解】 解：如图，



$$\text{由 } S_1 + S_3 = \frac{90 \times \pi \times 6^2}{360} = 9\pi, \quad S_2 + S_3 = 8 \times 8 - \frac{90\pi \times 8^2}{360} = 64 - 16\pi,$$

$$\therefore S_1 - S_2 = (S_1 + S_3) - (S_2 + S_3)$$

$$= 9\pi - (64 - 16\pi)$$

$$= 25\pi - 64,$$

故选：D.

6. 斐波那契螺旋线，也称“黄金螺旋线”，自然界中存在许多斐波那契螺旋线的图案（如图1）. 图2是根据斐波那契数列1, 1, 2, 3, 5, ……画出来的螺旋曲线，阴影部分内部是边长为1的正方形，黑色曲线就是斐波那契螺旋线，它是依次在以1, 2, 3, 5为边长的正方形中画一个圆心角为 90° 的扇形，将其圆弧连接起来得到的. 那么这一段斐波那契螺旋线的弧长为（ ）



图1

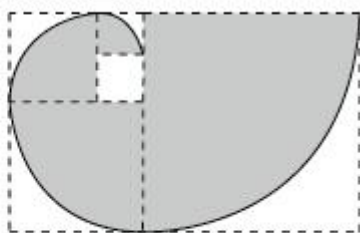


图2

- A. $\frac{9}{2}\pi$ B. 5π C. $\frac{11}{2}\pi$ D. 6π

【答案】C

【解析】

【分析】根据弧长计算公式计算即可.

【详解】解：由题意得：阴影部分内部是边长为 1 的正方形，

由内往外第一个扇形的半径为 1，第二个扇形的半径为 2，第三个扇形的半径为 3，第四个扇形的半径为 5，这四个扇形的圆心角都为 90° ，

根据弧长计算公式可得：

$$\text{第一个扇形的弧长为 } \frac{90 \times \pi \times 1}{180} = \frac{1}{2}\pi,$$

$$\text{第二个扇形的弧长为: } \frac{90 \times \pi \times 2}{180} = \pi,$$

$$\text{第三个扇形的弧长为: } \frac{90 \times \pi \times 3}{180} = \frac{3}{2}\pi,$$

$$\text{第四个扇形的弧长为: } \frac{90 \times \pi \times 5}{180} = \frac{5}{2}\pi$$

$$\therefore \text{将圆弧连接起来得到的这一段斐波那契螺旋线的弧长为: } \frac{1}{2}\pi + \pi + \frac{3}{2}\pi + \frac{5}{2}\pi = \frac{11}{2}\pi$$

故选：C

【点睛】本体考查弧长计算公式，解题的关键是熟练掌握弧长计算公式： $l = \frac{n\pi r}{180}$.

二. 填空题 (14 小题, 每题 2 分, 共 28 分)

7. 化成最简整数比: $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{5}{6} =$ _____.

【答案】

3:2:5

【解析】

【分析】本题考查最简整数比的化简，找到三个分数分母的最小公倍数，给比的每一项同乘以最小公倍数去掉分母，即可得到最简整数比。

【详解】解： $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{2} \times 6\right) : \left(\frac{1}{3} \times 6\right) : \left(\frac{5}{6} \times 6\right) = 3 : 2 : 5$ 。

8. 已知 $\frac{n}{m+n} = \frac{1}{5}$ ，则 $\frac{m+n}{m-n} =$ _____。

【答案】

$\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】根据已知等式推导得到 m 与 n 的数量关系，再代入所求分式，约分后得到计算结果。

【详解】解：由 $\frac{n}{m+n} = \frac{1}{5}$ 交叉相乘得 $5n = m+n$ ，

移项合并同类项得 $m = 4n$ ，

将 $m = 4n$ 代入 $\frac{m+n}{m-n}$ 得，

$\frac{m+n}{m-n} = \frac{4n+n}{4n-n} = \frac{5n}{3n} = \frac{5}{3}$ 。

9. 在一张地图上甲、乙两地的距离是 3cm，而两地的实际距离为 150m，则这张地图的比例尺为_____。

【答案】

1:5000

【解析】

【分析】根据比例尺的定义计算结果，解题时需要先统一单位，再化简比。

【详解】解：∵ 150m = 15000cm，

∴ 比例尺 = 3:15000 = 1:5000。

10. 某人将 2000 元存入银行，年利率为 2.75%，存满三年，到期后此人可拿到本利和_____元。

【答案】 2165

【解析】

【分析】本题考查了利率问题，熟练掌握本利和的计算方法是解题关键。根据本利和 = 本金 + 本金 × 年利率 × 期限即可得。

【详解】解：到期后小明可以拿到本利和为 $2000 + 2000 \times 2.75\% \times 3 = 2000 \times (1 + 2.75\% \times 3) = 2165$ ，

故答案为：2165。

11. 某超市商品促销活动, 购买同一种商品实行“第二件半价”, 则买两件相当于打_____折销售.

【答案】

七五

【解析】

【分析】设商品每件原价为 x , 计算购买两件的实际花费与原总花费, 求出实际花费占原总花费的百分比, 再根据折扣的定义得到结果.

【详解】解: 设该商品每件原价为 x 元,

根据题意, 购买两件实际花费为: $x + \frac{1}{2}x = 1.5x$,

购买两件的原总花费为 $2x$, 则实际花费与原总花费的比值为: $\frac{1.5x}{2x} = 0.75 = 75\%$,

根据折扣的定义, 75% 即为七五折.

12. 一艘船从甲码头到乙码头顺流而行, 用了 $2h$; 从乙码头返回甲码头逆流而行, 用了 $2.5h$. 已知水流的速度是 $3km/h$, 则船在静水中的平均速度是_____ km/h .

【答案】 27

【解析】

【分析】设船在静水中的平均速度是 xkm/h , 则顺流船的速度为 $(x+3)km/h$, 逆流船的速度为 $(x-3)km/h$, 再根据顺流和逆流的路程相同建立方程求解即可.

【详解】解: 设船在静水中的平均速度是 xkm/h ,

由题意得, $2(x+3) = 2.5(x-3)$,

解得 $x = 27$,

$\therefore$ 船在静水中的平均速度是 $27km/h$,

故答案为: 27.

【点睛】本题主要考查了一元一次方程的实际应用, 正确理解题意找到等量关系建立方程是解题的关键.

13. 甲种合金含铜 5 份, 含金 2 份; 乙种合金含铜 5 份, 含金 9 份, 那么取甲种合金_____克, 乙种合金_____克, 才能产出熔化后铜、金含量相同的合金 100 克.

【答案】 40; 60

【解析】

【分析】设取甲种合金 x 克, 乙种合金 y 克. 由题意可知, 产出合金总质量为 100 克, 且铜、金含量相同,

因此铜总质量为 50 克，金总质量为 50 克. 甲种合金共 $5+2=7$ 份，铜占比为 $\frac{5}{7}$ ，乙种合金共 $5+9=14$ 份，铜占比为 $\frac{5}{14}$. 据此列出二元一次方程组，求解方程组即可得到结果.

【详解】解：设取甲种合金 x 克，乙种合金 y 克，

根据题意有：
$$\begin{cases} x+y=100 \\ \frac{5}{7}x+\frac{5}{14}y=50 \end{cases}$$

解得： $x=40$ ， $y=60$ ，

答：取甲种合金 40 克，乙种合金 60 克，才能产出熔化后铜、金含量相同的合金 100 克.

14. 按 A ， B ， C ， D 四个等级统计某班共 50 名学生的体育测试成绩，四个等级的百分率分别是 26%，50%，18%，6%. 小明想让别人通过统计图直观看出不同等级的学生人数，应选用_____统计图来描述.

【答案】条形

【解析】

【分析】根据题意可以分析出选取哪种统计图比较合适，本题得以解答.

【详解】解：小明想让别人通过统计图直观看出不同等级的学生人数，应选用条形统计图来描述.

故答案为：条形

【点睛】本题考查了统计图的选择. 掌握各种统计图的特点和作用解题的关键.

15. 某班女学生人数与男生人数之比是 4:5，把男女学生人数分布情况制成扇形统计图，则表示女生人数的扇形圆心角的度数是_____.

【答案】 160°

【解析】

【分析】本题考查扇形统计图基础及其应用，熟练掌握扇形统计图中圆心角的求法是解题的关键，根据题意先求出女生人数所占的比例，再利用 360° 乘以女生人数所占的比例即可求解.

【详解】解： $\because$ 女学生人数与男生人数之比是 4:5，

$\therefore$ 女生人数占总人数的 $\frac{4}{9}$ ，

$\therefore$ 女生人数的扇形圆心角的度数是 $360^\circ \times \frac{4}{9} = 160^\circ$ ，

故答案为： 160° .

16. 小华家的闹钟的时针长 6cm，那么经过 4 小时的时间时针扫过的面积为 _____ cm^2 (π 取 3.14).

【答案】 37.68

【解析】

【分析】 本题主要考查了圆心角度数的求法，扇形面积公式的应用等知识点，解题的关键是熟练掌握扇形面积公式和圆心角度数的求法.

利用时针走一小时圆心角为 30° ，求得 4 小时圆心角的度数，再利用扇形面积公式即可求得答案.

【详解】 解：根据题意，得：

时针 4 小时形成的圆心角度数为 $30^\circ \times 4 = 120^\circ$ ，

则时针扫过的面积为：

$$\frac{120 \times \pi \times 6^2}{360}$$

$$= 12\pi$$

$$= 12 \times 3.14$$

$$\approx 37.68$$

故答案为： 37.68.

17. 如果用 50 厘米的铁丝做成一个半径为 15 厘米的扇形，那么这个扇形的面积等于 _____ 平方厘米.

【答案】 150

【解析】

【分析】 扇形的周长为：弧长 + 半径 $\times 2$ ，弧长为： $l = \frac{n\pi r}{180}$ ，扇形的面积为： $S = \frac{n\pi r^2}{360}$. 据此代入数据

即可求解.

【详解】 $\because l + 15 \times 2 = 50$ ，

$$\therefore l = 20$$

$$\therefore 20 = \frac{n\pi r}{180}$$

$$\therefore n\pi r = 3600$$

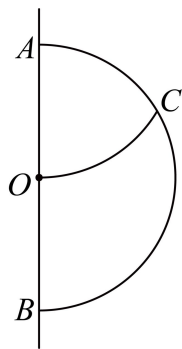
$$\therefore \text{扇形的面积为： } S = \frac{n\pi r^2}{360}$$

$$\therefore S = \frac{n\pi r \times r}{360} = \frac{3600 \times 15}{360} = 150 \text{ (平方厘米).}$$

故答案为： 150

【点睛】本题考查圆的知识，解题的关键是掌握弧长的周长，扇形的面积公式。

18. 如图是一个一面靠墙，另一面用篱笆围成的半圆形花园，这个花园的直径是 4 m，在这个花园内以 A 为圆心，AO 为半径画弧交半圆于 C 点，沿着弧 OC 围篱笆再围成一个小花园，一共需要篱笆_____m. (结果保留 π)



【答案】 $\frac{8}{3}\pi$

【解析】

【分析】本题考查弧长公式 $l = \frac{n\pi r}{180}$ ，找准圆心角和半径是解题关键。

先在扇形 AOC 中，计算 $\widehat{OC} = \frac{2\pi}{3}m$ ，再在半圆 $\odot O$ 中，计算 $\widehat{AB} = 2\pi m$ ，最后计算总共需要的篱笆长。

【详解】解：由题意得，直径 $AB = 4m$ ，

$\therefore$ 半径 $OA = OB = OC = 2m$ ，

$\therefore$ 以 A 为圆心，AO 为半径画弧交半圆于 C 点，

$\therefore AC = AO = 2m$ ，

$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形， $\angle OAC = 60^\circ$ ，

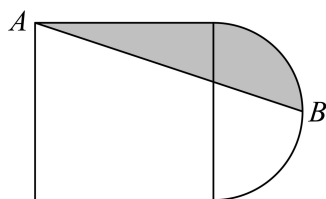
在扇形 AOC 中， $\widehat{OC} = \frac{n\pi r}{180} = \frac{60\pi \times 2}{180} = \frac{2\pi}{3}m$ ，

在半圆 $\odot O$ 中， $\widehat{AB} = \frac{1}{2}\pi \times 4 = 2\pi m$ ，

$\therefore \widehat{OC} + \widehat{AB} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8}{3}\pi m$ ，

故答案为： $\frac{8}{3}\pi$ 。

19. 如图，是正方形和半圆形的组合，B 点是半圆弧的中点，已知正方形的边长为 20cm，则图中阴影部分面积为_____ cm^2 。

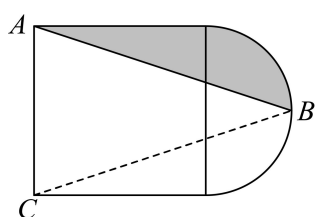


【答案】 128.5

【解析】

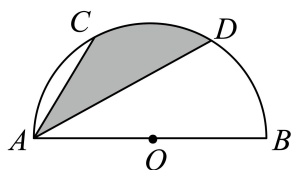
【分析】 如图所示，连接 BC ，根据 $S_{\text{阴影}} = \frac{S_{\text{正方形}} + S_{\text{半圆}} - S_{\triangle ABC}}{2}$ 进行求解即可。

【详解】 解： 如图所示，连接 BC ，



$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\text{阴影}} &= \frac{S_{\text{正方形}} + S_{\text{半圆}} - S_{\triangle ABC}}{2} \\ &= \frac{20 \times 20 + \frac{1}{2} \times 3.14 \times 10 \times 10 - \frac{1}{2} \times 20 \times (20 + 10)}{2} \\ &= 128.5 \text{ 平方厘米,} \end{aligned}$$

20. 如图，已知点 C, D 是以 AB 为直径的半圆 O 的三等分点，圆的半径为 1，则图中阴影部分的面积为 _____。

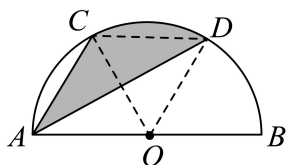


【答案】 $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{6}\pi$

【解析】

【分析】 本题考查了求不规则图形的面积，连接 CD, OC, OD ，根据 C, D 是以 AB 为直径的半圆的三等分点，可得 $\angle COD = 60^\circ$ ， $\triangle OCD$ 是等边三角形，将阴影部分的面积转化为扇形 OCD 的面积，根据扇形面积公式计算求解即可。

【详解】 解： 连接 CD, OC, OD ，



$\because C, D$ 是以 AB 为直径的半圆的三等分点,

$\therefore \angle AOC = \angle COD = \angle DOB = 60^\circ, AC = CD,$

又 $\because OA = OC = OD,$

$\therefore \triangle OAC, \triangle OCD$ 是等边三角形,

$\therefore \angle AOC = \angle OCD,$

$\therefore CD \parallel AB,$

$\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle OCD},$

$\therefore \text{阴影部分的面积} = \frac{60\pi \times 1^2}{360} = \frac{\pi}{6};$

故答案为: $\frac{\pi}{6}.$

三. 简答题 (共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

21. 求下列各式中的 x 的值.

$$(1) \frac{5}{2} : 1\frac{2}{5} = x : 2;$$

$$(2) \frac{15}{x-1} = \frac{10}{3}.$$

【答案】 (1) $x = \frac{25}{7}$

(2) $x = 5.5$

【解析】

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \frac{5}{2} : 1\frac{2}{5} = x : 2$$

$$\frac{5}{2} \times 2 = \frac{7}{5}x$$

$$5 = \frac{7}{5}x$$

$$x = \frac{25}{7}$$

【小问 2 详解】

解: $\frac{15}{x-1} = \frac{10}{3}$

$$10(x-1) = 15 \times 3$$

$$10x - 10 = 45$$

$$10x = 55$$

$$x = 5.5$$

22. 已知 $\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b = 1:2$, $40\%c = 1.3b$, 求 $a:b:c$.

【答案】 $a:b:c = 3:8:26$

【解析】

【分析】 本题考查了求比值，解题的关键是掌握比的性质. 根据 $\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b = 1:2$ 可得 $\frac{2}{3}a = \frac{1}{4}b$, 进而得到 $a:b = 3:8$, 由 $40\%c = 1.3b$ 可得 $b:c = 40\%:1.3 = 8:26$, 即可求解.

【详解】 解: $\because \frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b = 1:2$,

$$\therefore \frac{1}{3}a \times 2 = \frac{1}{4}b \times 1, \text{ 即 } \frac{2}{3}a = \frac{1}{4}b,$$

$$\therefore a:b = \frac{1}{4} : \frac{2}{3} = 3:8,$$

$$\because 40\%c = 1.3b,$$

$$\therefore b:c = 40\%:1.3 = 4:13 = 8:26,$$

$$\therefore a:b:c = 3:8:26.$$

四、解答题 (共 5 题, 23~25 每小题 6 分, 26 题 8 分, 27 题 10 分, 共 36 分)

23. 某公司 2023 年利润为 500 万元, 2024 年的利润比 2023 年增长了 12%, 预计 2025 年的增长率在 2024 年的增长率基础上将降低 2 个百分点, 2025 年的利润预计是多少万元?

【答案】 2025 年的利润是 616 万元

【解析】

【分析】 本题考查了百分数的应用，解题的关键是理解题意. 先求出 2024 年的利润，再用 2024 年的利润乘以 2025 年的百分比即可求出 2025 年的利润.

【详解】 解: 2024 年的利润为 $500 \times (1+12\%) = 560$ (万元),

2025 年的利润为: $560 \times (1+12\%-2\%) = 616$ (万元),

答: 2025 年的利润是 616 万元.

24. 客车从甲城开往乙城，8 小时可到达，货车从乙城开往甲城，10 小时可到达，现两车同时从甲乙两城相对开出，6 小时后它们相距 224 千米，甲乙两城相距多少千米？

【答案】640 千米

【解析】

【分析】把甲乙两城间的公路长看作单位 1，根据题意可得甲 6 小时行驶的路程加上乙 6 小时行驶的路程大于单位 1，故甲乙相距 224 千米是相遇后继续相对行驶产生的距离，用 224 千米除以其所占的百分比即可求解。

【详解】 $224 \div \left[\left(\frac{1}{8} \times 6 + \frac{1}{10} \times 6 \right) - 1 \right] = 640$ (千米)，

答：甲乙两城相距 640 千米。

【点睛】本题考查了有理数混合运算的应用，能够运用单位 1 进行计算是解题的关键。

25. 年关将至，某商店就两种具有中国传统文化色彩的中国结和红灯笼开展促销活动，活动方案有如下两种（规定顾客每次只能选择其中一种方案）：

商品名称		中国结	红灯笼
标价（单位：元）		50	20
方案一	每件商品销售时的折扣	六折	九折
方案二	所购商品超过 100 件（不同商品可累计），所有商品按标价的八折出售		

(1) 甲单位为装扮节日气氛准备一次性购买中国结 30 个，红灯笼 80 个，选用哪种方案划算？

(2) 乙单位一次性购买中国结和红灯笼共 120 个，选择两种方案所付金额相同，请你计算乙单位的购买方案。

【答案】(1) 方案一划算

(2) 乙单位购买中国结 20 个，红灯笼 100 个

【解析】

【分析】本题考查了一元一次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元一次方程是解题的关键。

(1) 利用总价 = 单价 × 数量，结合该商店给出的两个优惠方案，可求出选择方案一及方案二所需费用，比较后即可得出结论；

(2) 设乙单位购买 x 个中国结，则购买 $(120 - x)$ 个红灯笼，根据选择两种方案所付金额相同，可列出关于

x 的一元一次方程，解之即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：选择方案一所需费用： $50 \times 0.6 \times 30 + 20 \times 0.9 \times 80 = 2340$ （元），

选择方案二所需费用： $50 \times 0.8 \times 30 + 20 \times 0.8 \times 80 = 2480$ （元），

$\because 2340 < 2480$,

$\therefore$ 方案一划算；

【小问 2 详解】

解：设乙单位购买中国结 x 个，则购买红灯笼 $(120 - x)$ 个，

由题意得： $50 \times 0.6x + 20 \times 0.9(120 - x) = 50 \times 0.8x + 20 \times 0.8(120 - x)$

$$30x + 18(120 - x) = 40x + 16(120 - x)$$

$$-10x + 18(120 - x) - 16(120 - x) = 0$$

$$-10x + 2(120 - x) = 0$$

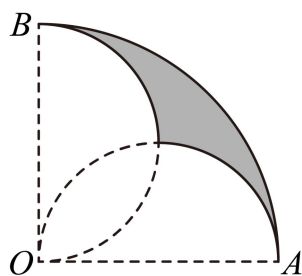
$$-10x + 240 - 2x = 0$$

解得： $x = 20$ ，

$\therefore 120 - x = 120 - 20 = 100$ （个），

答：乙单位购买中国结 20 个，购买红灯笼 100 个.

26. 已知扇形的圆心角 $\angle AOB = 90^\circ$ ，半径 $OA = OB = 4$ ，现分别以 OA, OB 的中点为圆心，2 为半径画半圆成如图所示阴影部分，求阴影部分的周长和面积.（结果保留 π ）

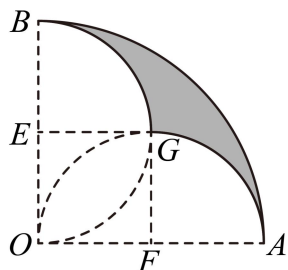


【答案】阴影部分的周长 4π ；阴影部分的面积 $2\pi - 4$

【解析】

【分析】取 OB ， OA 的中点 E ， F ，连接 EG ， FG ，则四边形 $OEGF$ 是正方形，根据阴影部分的周长为弧 BG + 弧 GA + 弧 AB = 弧 OB + 弧 AB 求解，根据 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形AOB}} - S_{\text{扇形BEG}} - S_{\text{正方形OEGF}} - S_{\text{扇形AFG}}$ 求面积即可.

【详解】解：如图，取 OB ， OA 的中点 E ， F ，连接 EG ， FG ，
则四边形 $OEGF$ 是正方形，



$\therefore$ 阴影部分的周长为：弧 BG + 弧 GA + 弧 AB = 弧 OB + 弧 AB

$$= \frac{1}{2} \times 4\pi + \frac{1}{4} \times 8\pi$$

$$= 2\pi + 2\pi$$

$$= 4\pi$$

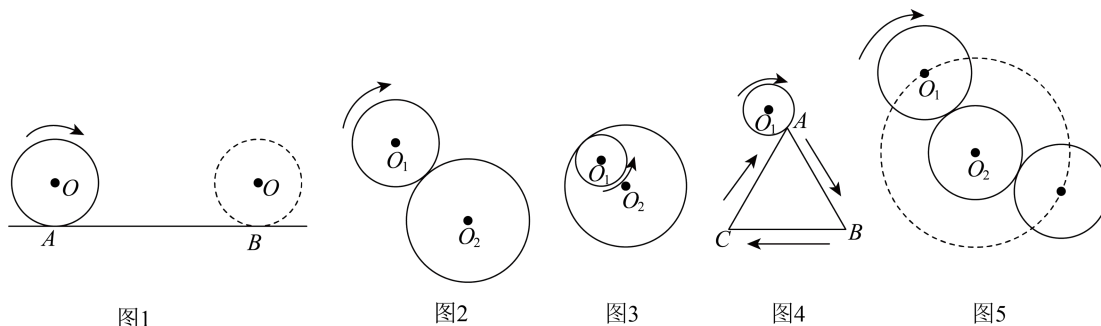
$$S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形AOB}} - S_{\text{扇形BEG}} - S_{\text{正方形OEGF}} - S_{\text{扇形AFG}}$$

$$= \frac{1}{4} \pi \times 4^2 - \frac{1}{4} \pi \times 2^2 - 2 \times 2 - \frac{1}{4} \pi \times 2^2$$

$$= 4\pi - \pi - 4 - \pi$$

$$= 2\pi - 4$$

27. 圆的滚动问题探索：



(1) 如图 1，一个半径为 r 的圆沿直线方向从 A 地滚动到 B 地，若 AB 的长为 m ，则该圆在滚动过程中自转了_____圈。（用含 m 、 r 的式子表示）

试验：

现有两个半径相等的圆（如图 5），将圆 O_2 固定，圆 O_1 沿定圆的周围滚动无滑动。当圆 O_1 沿圆 O_2 周围滚动一周回到原来的位置时，圆 O_1 自转了 2 圈，而圆 O_1 的圆心运动的线路也是一个圆，而这个圆的周长恰好是圆 O_1 的周长的 2 倍。

(2) 如图 2, $\odot O_1$ 的半径为 r , $\odot O_2$ 的半径为 R ($R > r$), 现将 $\odot O_2$ 固定, 让 $\odot O_1$ 沿 $\odot O_2$ 的周围滚动无滑动. 当 $\odot O_1$ 沿 $\odot O_2$ 的周围滚动一周回到原来的位置时, $\odot O_1$ 自转了_____圈;

(3) 如图 3, $\odot O_1$ 的半径为 r , $\odot O_2$ 的半径为 R ($R > r$), 现将 $\odot O_2$ 固定, 让 $\odot O_1$ 沿 $\odot O_2$ 的内部边缘滚动无滑动. 当 $\odot O_1$ 沿 $\odot O_2$ 边缘滚动一圈回到原来的位置时, $\odot O_1$ 自转了_____圈.

解决问题:

(4) 如图 4, 一个等边三角形的边长与圆的周长相等, 当此圆按箭头方向从某一位置沿等边三角形的三边作无滑动滚动, 直至回到原来的位置时, 该圆自转了多少圈? 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{m}{2\pi r}$

(2) $\frac{R+r}{r}$

(3) $\frac{R-r}{r}$

(4) 该圆自转了 4 圈; 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 利用圆运动的距离除以圆的周长即可得出答案;

(2) 利用 $\odot O_1$ 运动的距离除以 $\odot O_1$ 的周长即可得出答案;

(3) 利用 $\odot O_1$ 运动的距离除以 $\odot O_1$ 的周长即可得出答案;

(4) 圆自转的圈数 = 绕三边滚动所转的圈数 + 圆心要绕其三角形的顶点所转的圈数.

【小问 1 详解】

解: 该圆在滚动过程中自转的圈数为: $\frac{m}{2\pi r}$ (圈);

【小问 2 详解】

解: 当 $\odot O_1$ 沿 $\odot O_2$ 沿周围滚动一周回到原来的位置时, $\odot O_1$ 滚动的路程为: $2\pi(r+R)$,

$\therefore \odot O_1$ 自转了 $\frac{2\pi(R+r)}{2\pi r} = \frac{R+r}{r}$ (圈);

【小问 3 详解】

解: 当 $\odot O_1$ 沿 $\odot O_2$ 内部边缘滚动一圈回到原来的位置时, $\odot O_1$ 滚动的路程为: $2\pi(R-r)$,

$\therefore \odot O_1$ 自转了 $\frac{2\pi(R-r)}{2\pi r} = \frac{R-r}{r}$ (圈);

【小问 4 详解】

解：该圆自转了 4 圈；理由如下：

∵ 等边三角形的边长与圆的周长相等，

∴ 圆在等边三角形三条边上滚动时，转了 3 圈，

而圆从一边转到另一边时，圆心绕三角形的一个顶点旋转了三角形的一个外角的度数，圆心要绕其三角形的顶点旋转 120° ，

∴ 圆绕三个顶点共旋转了 $3 \times 120^\circ = 360^\circ$ ，即转了 1 圈，

∴ 此圆按箭头方向从某一位置沿等边三角形的三边作无滑动滚动，直至回到原来的位置时，该圆自转了 $3 + 1 = 4$ 圈。