

静教院附校 2025 学年第二学期六年级数学期中考试

(卷面总分: 100 分 考试时间: 80 分钟)

一、填空题: (每题 2 分, 共 28 分)

1. 求比值: $7.5\text{cm} : 40\text{mm} =$ _____.

【答案】

$$\frac{15}{8}$$

【解析】

【分析】 本题考查了比值, 先统一长度单位, 再用比的前项除以比的后项计算得到最终结果.

【详解】 解: $\because 7.5\text{cm} = 75\text{mm}$,

$$\therefore 7.5\text{cm} : 40\text{mm} = 75\text{mm} : 40\text{mm} = \frac{75}{40} = \frac{15}{8}.$$

2. 在一幅地图上, 图上距离是 6 厘米, 表示实际距离 300 千米, 这幅地图的比例尺是 ().

【答案】 $1:5000000$

【解析】

【分析】 先统一单位, 再根据比例尺的定义, 即图上距离: 实际距离 = 比例尺, 计算化简得到结果.

【详解】 解: $300\text{千米} = 30000000\text{厘米}$

$$6:30000000 = (6 \div 6):(30000000 \div 6) = 1:5000000$$

因此这幅地图的比例尺是 $1:5000000$.

3. 已知 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ 是方程 $ax - by = 2$ 的解, 则 $2a + 4b + 6 =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 先将 x, y 代入求出 $a + 2b$ 的值, 再代入 $2a + 4b + 6$ 中求解.

【详解】 解: 将 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ 代入方程 $ax - by = 2$ 中,

$$\text{得 } a \times (-1) - b \times 2 = 2,$$

$$\text{即 } a + 2b = -2,$$

$$\text{则 } 2a + 4b + 6 = 2(a + 2b) + 6 = 2 \times (-2) + 6 = 2.$$

4. 若某个扇形的圆心角是 72° , 则这个扇形的面积等于这个扇形所在圆面积的_____. (填百分数)

【答案】 20%

【解析】

【分析】整个圆的圆心角为 360° ，扇形面积与所在圆面积的比等于扇形圆心角与整个圆圆心角的比，计算出比值后转化为百分数即可得到结果.

【详解】解：设扇形所在圆的半径为 r ，

则圆的面积为 $S = \pi r^2$ ，扇形面积公式为 $S_{\text{扇形}} = \frac{n}{360} \pi r^2$ ，其中 n 为扇形圆心角度数，

$$\text{将 } n = 72^\circ \text{ 代入公式 } \frac{S_{\text{扇形}}}{S} = \frac{\frac{72}{360} \pi r^2}{\pi r^2} = \frac{72}{360} = 0.2 = 20\%$$

5. 萧老师编写一本儿童读物，出版后稿费是4000元. 按规定，稿费超过800元的部分应缴纳14%的个人所得税. 萧老师应缴纳个人所得税_____元.

【答案】 448

【解析】

【分析】根据题意，先求出需要纳税的部分，即稿费超过800元的部分，再根据应纳税额=应纳税所得额×税率，计算即可得到结果.

【详解】解： $(4000 - 800) \times 14\%$

$$= 3200 \times 14\%$$

$$= 448 \text{ (元)}$$

6. 学校合唱团有24名男生，比女生少25%，合唱团一共有_____名学生.

【答案】 56

【解析】

【分析】先将女生人数看作单位1，根据男生人数比女生少25%，得到男生人数与女生人数的关系，求出女生人数，再计算男女生总人数即可.

【详解】解：将女生人数看作单位1，

由题意得男生人数是女生人数的 $1 - 25\% = 75\%$ ，

则女生人数为 $24 \div 75\% = 32$ （名），

$\therefore$ 合唱团总人数为 $24 + 32 = 56$ （名）.

7. 在 $1\frac{2}{3}$ 、30%、0.5这三个数中添加一个数 x ，使得这四个数能组成比例，则 x 的最小值是_____.

【答案】 $\frac{9}{100}$

【解析】

【分析】 本题考查了比例的基本性质，先将 $1\frac{2}{3}$ 、30% 和 0.5 化为分数，再依次讨论 x 在不同位置时的比例，找到最小值即可.

【详解】 解： $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ ， $30\% = 0.3 = \frac{3}{10}$ ， $0.5 = \frac{1}{2}$ ，

当 $\frac{5}{3}$ 和 $\frac{3}{10}$ 为内项， $\frac{1}{2}$ 和 x 为外项，

$$\text{则 } \frac{1}{2}x = \frac{5}{3} \times \frac{3}{10},$$

解得： $x = 1$ ，

当 $\frac{5}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$ 为内项， $\frac{3}{10}$ 和 x 为外项，

$$\text{则 } \frac{3}{10}x = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2},$$

解得： $x = \frac{25}{9}$ ，

当 $\frac{3}{10}$ 和 $\frac{1}{2}$ 为内项， $\frac{5}{3}$ 和 x 为外项，

$$\text{则 } \frac{5}{3}x = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10},$$

解得： $x = \frac{9}{100}$ ，

$$\therefore \frac{9}{100} < 1 < \frac{25}{9},$$

$\therefore x$ 的最小值是 $\frac{9}{100}$.

8. 李老师把 30000 元存入银行，存期 3 年，该银行 3 年定期存款年利率为 1.75%，那么该笔存款到期后可以从银行取出_____元.

【答案】 31575

【解析】

【分析】 到期取出的总钱数为本金与利息的和，先根据利息公式计算出利息，再加上本金即可得到最终结果.

【详解】 解： 由题意可知本金为 30000 元，存期为 3 年，年利率为 1.75%，

则利息为 $30000 \times 1.75\% \times 3 = 1575$ (元)，

$\therefore$ 到期后取出的总钱数为 $30000 + 1575 = 31575$ (元).

9. 一种商品，第一次降价 10%，第二次又降价 10%，两次一共降价_____%.

【答案】 19

【解析】

【分析】本题主要考查了百分数的应用，这里的两个10%的单位“1”不相同，第个10%的单位“1”是商品的原价，就是“1”：第二个10%的单位“1”是降价10%后的价钱，即为原价的90%，然后相加即可得出答案.

【详解】解：假如原价为1，

$$\text{则 } 1 \times 10\% + 1 \times (1 - 10\%) \times 10\%$$

$$= 10\% + 9\%$$

$$= 19\%,$$

则两次一共降价19%，

故答案为：19.

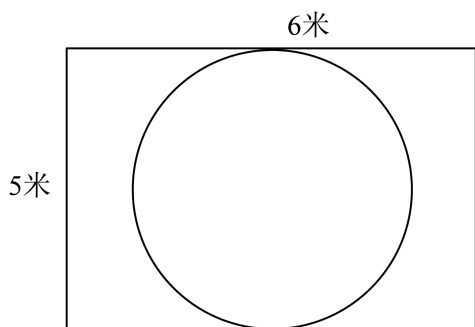
10. 白居易的《府西池》中“柳无气力枝先动，池有波纹冰尽开”描述了雨点打在水面上荡开层层波纹. 已知水池是一个长6m、宽5m的长方形，那么当波纹到池边时，所形成的最大整圆的周长是_____cm. (π 取3.14)

【答案】1570

【解析】

【分析】本题考查圆周长公式，读懂题意，作出图形，利用圆周长公式求解即可得到答案，读懂题意，熟记圆周长公式是解决问题的关键.

【详解】解：根据题意，当波纹到池边时，能形成的最大整圆，如图所示：



$\therefore$ 这个圆的直径为5m，则半径为 $\frac{5}{2}$ m，

$\therefore$ 最大整圆的周长是 $2\pi \times \frac{5}{2} = 5\pi \approx 5 \times 3.14 = 15.7\text{m} = 1570\text{cm}$ ，

故答案为：1570.

11. 已知方程组 $\begin{cases} x + y = 4 \\ ax + by = 2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x - y = 6 \\ bx + ay = -4 \end{cases}$ 有相同的解，则 $a + b$ 的值为_____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是同解二元一次方程组的问题，二元一次方程组的解法，掌握利用方程组同解构建新的

方程组是解题的关键。由方程组同解可得： $\begin{cases} x+y=4 \textcircled{1} \\ x-y=6 \textcircled{2} \end{cases}$ ，解方程组求解 x, y ，再把求得的 x, y 的值代

入另外两个方程即可得到答案。

【详解】 解：根据题意： $\begin{cases} x+y=4 \\ ax+by=2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x-y=6 \\ bx+ay=-4 \end{cases}$ 有相同的解，

可得： $\begin{cases} x+y=4 \textcircled{1} \\ x-y=6 \textcircled{2} \end{cases}$ ，

$\textcircled{2}-\textcircled{1}$ 得： $-2y=2$ ，

$\therefore y=-1$ ，

将 $y=-1$ 代入 $\textcircled{1}$ ，得 $x=5$ ，

所以方程组的解： $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$ ，

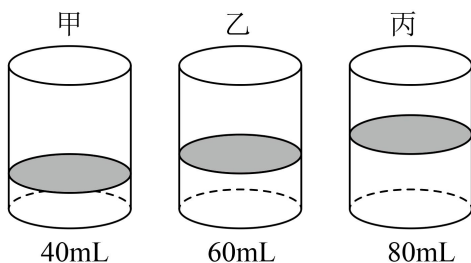
$\therefore \begin{cases} 5a-b=2 \\ 5b-a=-4 \end{cases}$ ，

两个方程相加可得： $4a+4b=-2$ ，

$\therefore a+b=-\frac{1}{2}$ 。

故答案为： $-\frac{1}{2}$

12. 如图，有三杯水，现将 90 克的糖全部放入这三个盛有水的杯子中，要使三杯水的甜度相同，甲杯中应放入_____克糖。



【答案】 20

【解析】

【分析】 本题主要考查了比例的应用，明确这三个水杯中水的量之比与糖的量之比相等成为解题的关键。

先求出甲、乙、丙这三个杯中水的量之比，因为浓度相同，所以甲、乙、丙放入糖的重量之比等于杯中水的量之比，然后用 90 乘甲杯中糖的重量占总糖量的几分之几即可解答。

【详解】解：40:60:80

$$= (40 \div 20) : (60 \div 20) : (80 \div 20)$$

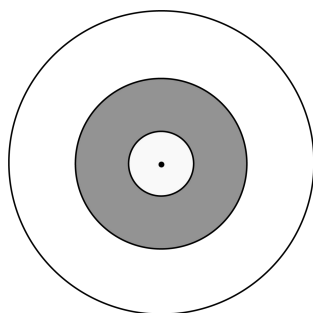
$$= 2:3:4,$$

$$90 \times \frac{2}{2+3+4} = 90 \times \frac{2}{9} = 20 \text{ (克)},$$

所以甲杯中应放入 20 克糖。

故答案为：20.

13. 三个圆的周长比为 2:5:9，三个圆的圆心在同一点上，如图所示，那么阴影部分的面积是最大圆面积的 _____ (填几分之几).



【答案】 $\frac{7}{27}$

【解析】

【分析】本题考查了圆的面积，解题的关键是运用圆的面积公式来解答。根据三个圆的周长比得到三个圆的半径比，再用圆的面积公式表示出阴影部分和最大圆的面积，最后进行相比、化简即可。

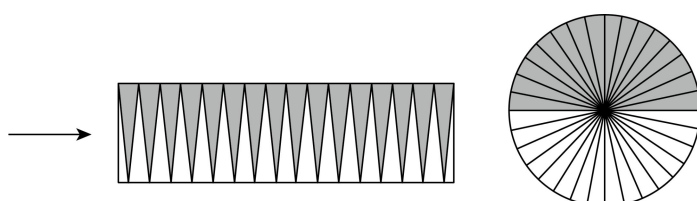
【详解】解：∵三个圆的周长比为 2:5:9，

∴三个圆的半径比为 2:5:9。

$$\text{阴影部分的面积是最大圆面积的 } \frac{5^2\pi - 2^2\pi}{9^2\pi} = \frac{21\pi}{81\pi} = \frac{7}{27},$$

故答案为： $\frac{7}{27}$.

14. 如图，把一个圆形纸片剪开后，拼成一个近似的长方形，这个长方形的周长是 24.84 厘米，圆形纸片的面积是 _____ 平方厘米。（ π 取 3.14）



【答案】 28.26

【解析】

【分析】 设圆的半径是 r 厘米，拼成的长方形的周长为 $2\pi r + 2r$ ，再根据圆的面积求解即可.

【详解】 设圆的半径是 r 厘米，由题意得：

$$2\pi r + 2r = 24.84$$

解得： $r = 3$

$$\therefore S_{\text{圆}} = \pi r^2 = 3.14 \times 3^2 = 3.14 \times 9 = 28.26 \text{ 平方厘米}$$

故答案为： 28.26.

二、单项选择题：（每题 2 分，共 8 分）

15. 圆的周长是直径的（ ）

- A. 3.14159 倍 B. 3.14 倍 C. 3 倍 D. π 倍

【答案】 D

【解析】

【分析】 由圆的周长公式按照题意推导即可得出结论.

【详解】 解： 圆的周长公式为 $C = \pi d$ ，其中 d 表示圆的直径，

$$\therefore \frac{C}{d} = \pi,$$

即圆的周长是直径的 π 倍.

16. 某工地用水泥、黄沙和石子按 2: 3: 5 配制一种混凝土，现在这三种材料各有 30 吨，配制这种混凝土，下列说法正确的是（ ）

- A. 如果黄沙全部用完，那么水泥、石子也正好用完
B. 如果黄沙全部用完，那么水泥有剩余，石子将缺一些
C. 如果黄沙全部用完，那么石子有剩余，水泥将缺一些
D. 如果黄沙全部用完，那么水泥、石子都将缺一些

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查成比例分配应用题，

混凝土水泥、黄沙、石子的配合比是 2: 3: 5，又因为三种材料各有 30 吨，再因为黄沙 30 吨，配合比又是 3，即每份是 $30 \div 3 = 10$ （吨），进一步解决问题.

【详解】 解： 每份： $30 \div 3 = 10$ （吨），

水泥剩下： $30 - 2 \times 10 = 10$ （吨）

石子增加： $5 \times 10 - 30 = 20$ （吨）；

故如果黄沙全部用完，那么水泥有剩余，石子将缺一些，

故选：B.

17. 一个圆形花坛，周长是 9.42m ，在距花坛边 0.5m 的外面围上一圈栏杆，栏杆的长（ π 取 3.14 ）（ ）

A. 9.42m

B. 10.42m

C. 12.56m

D. 15.7m

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了圆的周长公式，先根据花坛周长求出花坛半径，再得到栏杆围成圆的半径，最后计算栏杆周长.

【详解】解：设花坛半径为 r_1 ，栏杆围成圆的半径为 r_2 ，

$$\therefore C_1 = 9.42\text{m},$$

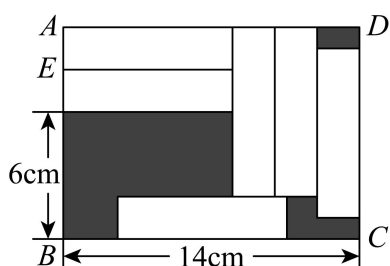
$$\therefore r_1 = \frac{C_1}{2\pi} = \frac{9.42}{2 \times 3.14} = 1.5\text{m},$$

$\therefore$ 栏杆在距花坛边 0.5m 的外侧，

$$\therefore r_2 = r_1 + 0.5 = 1.5 + 0.5 = 2\text{m},$$

$$\therefore \text{栏杆周长 } C_2 = 2\pi r_2 = 2 \times 3.14 \times 2 = 12.56\text{m}.$$

18. 如图，在大长方形中放入 6 个形状、大小相同的小长方形，所标尺寸如图所示，则图中阴影部分的面积之和为（ ）



A. 48cm^2

B. 44cm^2

C. 36cm^2

D. 24cm^2

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查二元一次方程组的应用，解题关键在于确定等量关系列出方程. 首先设长方形的长为 $x\text{cm}$ ，宽为 $y\text{cm}$ ，由图形得等量关系：①1 个长+3 个宽=14；②2 个宽+6=1 个长+1 个宽，根据等量关系列出方

程组，再解即可.

【详解】解：设长方形的长为 $x\text{cm}$ ，宽为 $y\text{cm}$ ，

根据题意，得
$$\begin{cases} x + 3y = 14 \\ 2y + 6 = x + y \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 阴影部分的面积为： $(6 + 2 \times 2) \times 14 - 2 \times 8 \times 6 = 44(\text{cm}^2)$ ，

故选：B.

三、简答题：（每题 4 分，共 20 分）

19. 计算： $1\frac{1}{9} \div \left[32\frac{2}{5} - \left(32.4 + \frac{1}{3} \times 25\% \right) \right] \times 12$.

【答案】

-160

【解析】

【详解】解：
$$\begin{aligned} & 1\frac{1}{9} \div \left[32\frac{2}{5} - \left(32.4 + \frac{1}{3} \times 25\% \right) \right] \times 12 \\ &= \frac{10}{9} \div \left[32.4 - \left(32.4 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \right) \right] \times 12 \\ &= \frac{10}{9} \div \left(32.4 - 32.4 - \frac{1}{12} \right) \times 12 \\ &= \frac{10}{9} \div \left(-\frac{1}{12} \right) \times 12 \\ &= \frac{10}{9} \times (-12) \times 12 \\ &= -160. \end{aligned}$$

20. 已知 $x:y = \frac{9}{8}:0.75$ ， $2x = 5z$ ，求 $x:y:z$ 的最简整数比.

【答案】

$x:y:z = 15:10:6$

【解析】

【分析】 本题考查比的基本性质，先将 $x:y = \frac{9}{8}:0.75$ 化为最简整数比，再根据 $2x = 5z$ 得出 $x:z$ ，最后统一 x 的份数，进而得 $x:y:z$ 。

【详解】 解： $\because 2x = 5z$,

$$\therefore x:z = 5:2 = 15:6,$$

$$\because x:y = \frac{9}{8}:0.75 = \frac{9}{8}:\frac{3}{4} = 9:6 = 3:2 = 15:10,$$

$$\therefore x:y:z = 15:10:6.$$

21. 解方程组:
$$\begin{cases} 3x - 4y = 14 \\ 5x + 6y = 17 \end{cases}$$

【答案】

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

【解析】

【详解】 解:
$$\begin{cases} 3x - 4y = 14 \text{①} \\ 5x + 6y = 17 \text{②} \end{cases}$$

① $\times 3$ + ② $\times 2$, 得:

$$(3x - 4y) \times 3 + (5x + 6y) \times 2 = 14 \times 3 + 17 \times 2,$$

$$19x = 76,$$

解得: $x = 4$,

将 $x = 4$ 代入 ①, 得:

$$3 \times 4 - 4y = 14,$$

$$-4y = 2,$$

解得: $y = -\frac{1}{2}$.

$$\therefore \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

22. 对于有理数, 规定新运算: $x \square y = ax + by + xy$, 其中 a 、 b 是常数, 已知 $2 \square 1 = 7$, $(-3) \square 3 = 3$, 求 $a:b$

的比值.

【答案】 $\frac{1}{13}$

【解析】

【分析】 根据新运算定义列二元一次方程组，解方程组求出 a 、 b 的值，进而求出 $a:b$ 的比值即可.

【详解】 解： $\because 2 \square 1 = 7$ ， $(-3) \square 3 = 3$ ，

$$\therefore \begin{cases} 2a + b + 2 \times 1 = 7 \\ -3a + 3b + (-3) \times 3 = 3 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{13}{3} \end{cases}$ ，

$$\therefore a:b = \frac{1}{3} : \frac{13}{3} = \frac{1}{13}.$$

23. 王师傅 1.5 小时加工 1350 个零件，照这样的速度，王师傅 40 分钟可以加工多少个零件？

【答案】 600

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次方程，先统一单位，再根据题意列方程求解.

【详解】 解： 40 分钟 $= \frac{40}{60}$ 小时 $= \frac{2}{3}$ 小时，

设王师傅 40 分钟可以加工 x 个零件，

$$\frac{1350}{1.5} = \frac{x}{\frac{2}{3}},$$

解得： $x = 600$.

答：王师傅 40 分钟可以加工 600 个零件.

四、解答题（第 24 题 8 分，25-27 每题 6 分，28 题 8 分，29 题 10 分，共 44 分）

24. 五一将至，商家为了促销某种商品，在现在零售价的基础上打了七五折，接着又打了八折，此时零售价为 360 元，按这一价格出售，商家还有 20% 的利润，若这种商品按原价出售，盈利率是多少？

$$(\text{盈利率} = \frac{\text{售价} - \text{进价}}{\text{进价}} \times 100\%)$$

【答案】 100%

【解析】

【分析】先求出原价，再计算出成本，最后根据盈利率公式计算即可.

【详解】解：设这种商品原价为 x 元，

则由题意可得 $0.75 \times 0.8x = 360$,

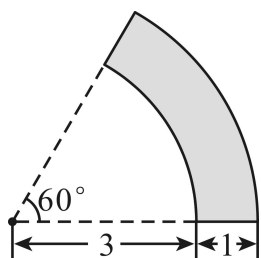
解得 $x = 600$,

$\therefore$ 按 360 元的价格出售，商家还有 20% 的利润，

$\therefore$ 这种商品的成本为 $360 \div (1 + 20\%) = 300$ (元)，

若这种商品按原价出售，盈利率是 $\frac{600 - 300}{300} = 100\%$.

25. 已知数据如图中标识，求图中阴影部分的周长. (结果保留 π)



【答案】 $2 + \frac{7}{3}\pi$

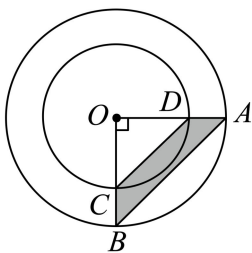
【解析】

【分析】先由弧长公式分别计算小扇形和大扇形的弧长，再计算阴影部分周长即可.

【详解】解：由题意可得，小扇形的弧长为 $\frac{60}{360} \times 2\pi \times 3 = \pi$ ；大扇形的弧长为 $\frac{60}{360} \times 2\pi \times 4 = \frac{4}{3}\pi$,

$\therefore$ 图中阴影部分的周长为 $\pi + \frac{4}{3}\pi + 1 + 1 = 2 + \frac{7}{3}\pi$.

26. 已知图中阴影部分面积是 35 平方厘米，求圆环的面积是多少平方厘米？ (π 取 3.14)



【答案】 219.8 平方厘米

【解析】

【分析】先由阴影部分面积列式求出 $R^2 - r^2 = 70$ ，再表示出圆环的面积，将 $R^2 - r^2 = 70$ 整体代入计算即可.

【详解】解： $\therefore$ 图中阴影部分面积是 35 平方厘米，

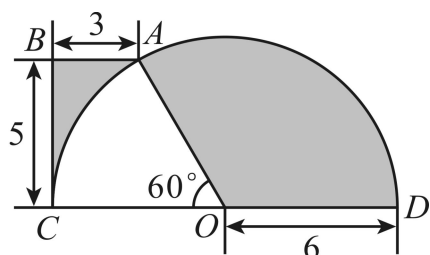
设大圆的半径为 R ，小圆的半径为 r ，

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle AOB} - S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}(R^2 - r^2) = 35,$$

$$\text{则 } R^2 - r^2 = 70,$$

$$\therefore \text{圆环的面积是 } S_{\text{大圆}} - S_{\text{小圆}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 70\pi = 70 \times 3.14 = 219.8 \text{ (平方厘米)}.$$

27. 已知数据如图中标识，点 C 、 O 、 D 在同一条直线上， O 是 CD 中点，以 O 为圆心， OD 为半径作 $\odot O$ ， AB 与 OC 平行， BC 与 CO 垂直. (π 取 3.14)



(1) 求阴影部分的周长;

(2) 求阴影部分的面积.

【答案】 (1) 38.84

(2) 41.34

【解析】

【分析】 (1) 先分别求出 $\widehat{AD}$ 、 $\widehat{AC}$ 的长度，然后数形结合表示出阴影部分的周长，代值计算即可;

(2) 过点 A 作 $AE \perp OC$ ，分别计算长方形面积、三角形面积和扇形面积，数形结合表示出阴影部分的面积，代值计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 C 、 O 、 D 在同一条直线上， $\angle AOC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle AOD = 120^\circ,$$

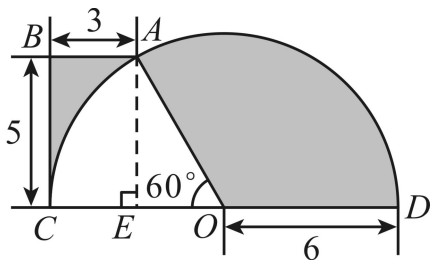
$$\text{则 } l_{\widehat{AD}} = \frac{120}{360} \times 2\pi \times 6 = 4\pi, \quad l_{\widehat{AC}} = \frac{60}{360} \times 2\pi \times 6 = 2\pi,$$

$\therefore$ 阴影部分的周长为

$$BC + BA + l_{\widehat{AD}} + AO + OD + l_{\widehat{AC}} = 5 + 3 + 2\pi + 6 + 6 + 4\pi = 20 + 6\pi \approx 20 + 6 \times 3.14 = 38.84;$$

【小问 2 详解】

解: 过点 A 作 $AE \perp OC$ ，如图所示:



则 $CE = AB = 3$,

$$\therefore S_{\text{矩形}ABCE} = 3 \times 5 = 15, \quad S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2} \times (6-3) \times 5 = \frac{15}{2}, \quad S_{\text{扇形}AOD} = \frac{120}{360} \times \pi \times 6^2 = 12\pi,$$

$$S_{\text{扇形}AOC} = \frac{60}{360} \times \pi \times 6^2 = 6\pi,$$

$$\therefore \text{图形总面积为 } S_{\text{矩形}ABCE} + S_{\triangle AOE} + S_{\text{扇形}AOD} = 15 + \frac{15}{2} + 12\pi = \frac{45}{2} + 12\pi,$$

$$\text{则阴影部分的面积为 } \frac{45}{2} + 12\pi - 6\pi = \frac{45}{2} + 6\pi \approx \frac{45}{2} + 6 \times 3.14 = 41.34.$$

28. 阅读材料：如图 1，中国古建筑中经常能看到“外方内圆”的设计，其中蕴藏了许多方圆之间的奥秘。（ π 取 3.14）



图1

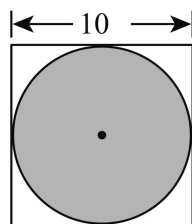


图2

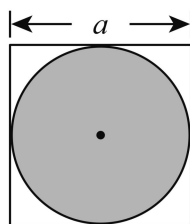


图3

（1）特殊发现（周长关系）：如图 2，在一张边长是 10 厘米的正方形纸上，剪下一个最大的圆，这个圆的直径等于正方形的边长。

正方形周长： $10 \times 4 = 40$ 厘米。

最大圆周长： $3.14 \times 10 = 31.4$ 厘米。

最大圆周长占正方形周长的百分比： $31.4 \div 40 \times 100\% = 78.5\%$ 。

猜想验证（面积关系）：小丽猜想，在图 2 这个“外方内圆”图形中，最大圆的面积占正方形面积的百分比也会是 78.5%。请你帮助完成验证，补全过程：

正方形的面积： _____

最大圆的面积： _____

最大圆面积占正方形面积的百分比： _____

（2）一般性推导：小丽认为在任何“外方内圆”图形中，最大圆的面积占正方形面积的百分比总是不变的。如图 3，设正方形的边长为 a 厘米，请通过计算解释这个结论的正确性。

(3) 迁移应用：工人师傅在一块质地均匀的正方形钢板上切割一个最大的圆形零件．切割后，剩下的边角料（除了圆的部分）重 8.6 千克．已知这种钢板每平方米重 20 千克，求割下来的最大圆形零件的面积是多少平方米？

【答案】(1) 100； 78.5； 78.5%

(2) 78.5%，见解析

(3) 割下来的最大圆形零件的面积是 1.57 平方米

【解析】

【分析】本题考查了圆的面积，百分数的应用，熟练求得圆的面积即可解答．

(1) 计算正方形的面积和最大圆的面积，相除即可解答；

(2) 计算正方形的面积和最大圆的面积，相除即可解答；

(3) 先计算边角料的面积，再利用 (2) 中得到的结论即可解答．

【小问 1 详解】

解：正方形的面积： $10 \times 10 = 100$ ，

最大圆的面积： $3.14 \times 5 \times 5 = 78.5$ ，

最大圆面积占正方形面积的百分比： $(78.5 \div 100) \times 100\% = 78.5\%$ ．

故答案为： 100； 78.5； 78.5%；

【小问 2 详解】

解：最大圆面积： $\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \pi$ ，

正方形面积： a^2 ，

最大圆面积占正方形面积的百分比 $\left(\frac{a^2}{4} \times 3.14\right) \div a^2 \times 100\% = 78.5\%$ ，

故结论正确；

【小问 3 详解】

解： $1 - 78.5\% = 21.5\%$ ，

$8.6 \div 20 = 0.43$ （平方米）

$0.43 \div 21.5\% \times 78.5\% = 1.57$ （平方米）

答：割下来的最大圆形零件的面积是 1.57 平方米．

29. 一个扇形的元素有：半径 (r)、圆心角 (n)、弧长 (l)、面积 ($S_{\text{扇}}$)．它们之间存在相关的数量关系．我

们分别进行探究:

(1) 填空: $l = \frac{n}{360} \times \text{_____}$; $S_{\text{扇}} = \frac{n}{360} \times \text{_____}$. 根据这两个公式推导出 $S_{\text{扇}} = \frac{1}{2}lr$.

(2) 当扇形面积不变, 圆心角减少 36% 时, 求它的半径增加了百分之几.

(3) 当扇形周长为 40 厘米时, 请用含圆心角 n 的代数式表示半径 r . (结果保留 π)

(4) 当一个扇形圆心角增大 25% 所对应的弧长减小 20% 时, 它的面积增大还是减小? 如果增大, 求出增大了百分之几; 如果减小, 求出减小了百分之几.

【答案】(1) $2\pi r$; πr^2

(2) 25%

(3) $r = \frac{7200}{360 + n\pi}$

(4) 面积减小, 减小了 48.8%

【解析】

【分析】(1) 根据扇形的弧长和面积公式解答即可;

(2) 设原扇形的圆心角为 n_1 , 半径为 r_1 , 新扇形的圆心角为 n_2 , 半径为 r_2 , 则 $n_2 = (1 - 36\%)n_1 = 0.64n_1$,

根据扇形面积不变得到 $\frac{n_1}{360} \times \pi r_1^2 = \frac{n_2}{360} \times \pi r_2^2$, 因此 $r_2 = \frac{1}{0.8}r_1 = \frac{5}{4}r_1$, 从而计算 $(r_2 - r_1) \div r_1$ 即可求解;

(3) 根据题意得到 $2r + \frac{n}{360} \times 2\pi r = 40$, 将式子化为用含 n 的式子表示 r 即可解答;

(4) 设原来的圆心角为 n , 弧长为 l , 半径为 r , 面积为 S , 则现在的圆心角 $n' = 1.25n$, 弧长 $l' = 0.8l$, 根据弧长公式得到 $0.8 \times \frac{n}{360} \times 2\pi r = 1.25 \times \frac{n}{360} \times 2\pi r'$, 因此 $r' = 0.64r$, 从而根据面积公式得到 $S' = \frac{1}{2}l'r' = 0.512S$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $l = \frac{n}{360} \times 2\pi r$; $S_{\text{扇}} = \frac{n}{360} \times \pi r^2$.

由此可得 $S_{\text{扇}} = \frac{n}{360} \times \pi r^2 = \frac{n}{360} \times 2\pi r \times \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}lr$.

【小问 2 详解】

解: 设原扇形的圆心角为 n_1 , 半径为 r_1 , 新扇形的圆心角为 n_2 , 半径为 r_2 ,

$\therefore n_2 = (1 - 36\%)n_1 = 0.64n_1$,

$\therefore$ 扇形面积不变,

$\therefore \frac{n_1}{360} \times \pi r_1^2 = \frac{n_2}{360} \times \pi r_2^2$,

$$\therefore r_2^2 = \frac{n_1}{n_2} r_1^2 = \frac{n_1}{0.64n_1} r_1^2 = \frac{1}{0.64} r_1^2,$$

$$\therefore r_2 = \frac{1}{0.8} r_1 = \frac{5}{4} r_1,$$

$$\therefore \text{半径增加了 } (r_2 - r_1) \div r_1 = \left(\frac{5}{4} r_1 - r_1 \right) \div r_1 = \frac{1}{4} = 25\%.$$

【小问 3 详解】

解：当扇形的周长为 40 厘米时，

$$2r + \frac{n}{360} \times 2\pi r = 40,$$

$$\therefore r = \frac{7200}{360 + n\pi}.$$

【小问 4 详解】

解：设原来的圆心角为 n ，弧长为 l ，半径为 r ，面积为 S ，

则现在的圆心角 $n' = (1 + 25\%)n = 1.25n$ ，

弧长 $l' = (1 - 20\%)l = 0.8l$

$$\therefore l' = \frac{n'}{360} \times 2\pi r', \quad l = \frac{n}{360} \times 2\pi r$$

$$\therefore 0.8l = \frac{1.25n}{360} \times 2\pi r',$$

$$\text{即 } 0.8 \times \frac{n}{360} \times 2\pi r = 1.25 \times \frac{n}{360} \times 2\pi r',$$

$$\therefore 0.8r = 1.25r',$$

$$\therefore r' = 0.64r,$$

$$\therefore \text{现在的面积 } S' = \frac{1}{2} l' r' = \frac{1}{2} \times 0.8l \times 0.64r = 0.512 \times \frac{1}{2} lr = 0.512S,$$

$$\therefore 0.512 < 1,$$

$\therefore$ 面积减小，

减少的百分比为 $(1 - 0.512) \times 100\% = 48.8\%$ 。

答：它的面积减小了，减小了 48.8%。

荣誉题：

30. 现有材质均匀的一块木板，制作成了周长相等的等边三角形、正方形、半圆形、圆。请设计两种不同的方案，说明这些图形中面积最大的是圆。具体要求如下：

设计方案包括但不限于以下要素：(1) 使用工具；(2) 测量的数据用字母表示；(3) 具体解决步骤，每一

步包括需要计算的公式等.

	方案一	方案二
使用的工具		
具体解决步骤		

【答案】见解析

【解析】

【详解】解：周长相等时，题中所述图形中面积最大的是圆

以下是符合要求的两种方案：

	方案一：计算验证法	方案二：实验验证法
使用工具	纸、笔、计算器	刻度尺、托盘天平
步骤 1	设四个图形的共同周长为 C ，分别计算各图形面积： 等边三角形：边长 $a = \frac{C}{3}$ ，面积 $S_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{36} C^2 \approx 0.048C^2$	用刻度尺测量四个图形的周长，修整边缘保证四个图形周长相等，记共同周长为 L
步骤 2	正方形：边长 $a = \frac{C}{4}$ ，面积	原理：木板材质均匀、

	$S_{\text{正}} = a^2 = 0.0625C^2$	厚度相同，由质量公式 $m = \rho Sh$ (ρ 为密度， h 为厚度)，可得 m 与 S 成正比，质量越大面积越大
步骤 3	半圆形：设半径为 r ，周长为半圆弧加直径： $\pi r + 2r = C$ ，得 $r = \frac{C}{\pi + 2}$ ，面积 $S_{\text{半}} = \frac{1}{2} \pi r^2 \approx 0.059C^2$	用天平分别称量四个图形的质量，记为 $m_{\text{三}}$ 、 $m_{\text{正}}$ 、 $m_{\text{半}}$ 、 $m_{\text{圆}}$
步骤 4	圆：设半径为 r ，周长 $2\pi r = C$ ，得 $r = \frac{C}{2\pi}$ ，面积 $S_{\text{圆}} = \pi r^2 \approx 0.0796C^2$	比较质量大小，可得 $m_{\text{圆}} > m_{\text{正}} > m_{\text{半}} > m_{\text{三}}$
结论	比较得 $S_{\text{三}} < S_{\text{半}} < S_{\text{正}} < S_{\text{圆}}$ ，周长相等时面积最大的是圆	根据质量和面积的正比关系，可得周长相等时面积最大的是圆