

2024 – 2025 学年上海市黄浦区毓秀学校六年级（下）期末数学试卷
(五四学制)

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）【每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 下列方程组为二元一次方程组的是（ ）

A. $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -10 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - \frac{1}{y} = 6 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$

【答案】 B

【解析】

【分析】根据二元一次方程组的定义，即含有两个未知数，并且所含未知数的项的次数都是 1 的方程叫做二元一次方程判断即可；

【详解】 $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -10 \end{cases}$ 中， xy 的次数是 2，故 A 不符合题意；

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ 是二元一次方程组，故 B 符合题意；

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - \frac{1}{y} = 6 \end{cases}$ 中 y 在分母上，故 C 不符合题意；

$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$ 中有 3 个未知数，故 D 不符合题意；

故选 B.

【点睛】 本题主要考查了二元一次方程组的判断，准确分析是解题的关键.

2. 若 $3x^m y^3$ 与 $-\frac{1}{4}x^2 y^3$ 是同类项，则 m 的值为（ ）

A. $-\frac{1}{4}$ B. 1 C. 2 D. 5

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了是同类项，根据同类项的定义求解即可，解题的关键是掌握同类项的定义.

【详解】 解： $\because 3x^m y^3$ 与 $-\frac{1}{4}x^2 y^3$ 是同类项，

$\therefore m = 2$,

故选: C.

3. 下列调查中, 适宜采用普查方式的是 ()

- A. 调查一批新型节能灯泡的使用寿命
- B. 调查上海市中小学生的课外阅读时间
- C. 全市中学生对《流浪地球》影评
- D. 对我国六代战斗机“歼-36”试飞前整机零部件质量的调查

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查全面调查与抽样调查的适用情况, 理解全面调查与抽样调查的适用性是解决问题的关键. 全面调查适用于对象数量少、结果要求精确或不可破坏性检查的情况; 抽样调查适用于具有破坏性、无法普查、普查意义或价值不大的情况, 根据全面调查与抽样调查的适用性, 结合选项逐项分析即可得到答案.

【详解】解: A、调查一批新型节能灯泡的使用寿命, 具有破坏性, 需抽样调查避免全部损毁, 适宜采用抽样调查, 不符合题意;

B、调查上海市中小学生的课外阅读时间, 需在多个年级段抽样, 样本基数比较大, 无法全面覆盖, 适宜采用抽样调查, 不符合题意;

C、全市中学生对《流浪地球》影评, 样本基数比较大, 无法全面覆盖, 适宜采用抽样调查, 不符合题意;

D、对我国六代战斗机“歼-36”试飞前整机零部件质量的调查, 必须确保绝对安全, 需逐一检查, 故需全面调查, 符合题意;

故选: D.

4. 从一个装有 6 个红球、4 个蓝球、2 个白球和 1 个黑球的袋子中, 随机摸出一个球 (除颜色外其余的均相同). 下列事件中发生可能性最小的是 ()

- A. 摸出红球
- B. 摸出蓝球
- C. 摸出白球
- D. 摸出黑球

【答案】D

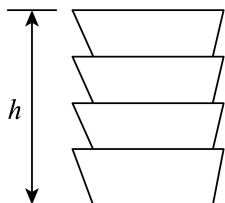
【解析】

【分析】本题考查了事件可能性大小判断, 随机摸出一个球 (除颜色外其余的均相同). 可能性大小由对应颜色球的数量决定, 数量越少可能性越小.

【详解】解: 袋中共有 $6+4+2+1=13$ 个球, 其中红球 6 个, 蓝球 4 个, 白球 2 个, 黑球 1 个, 黄球 0 个. 由于黄球数量为 0, 摸出黄球的概率为 0, 而其他颜色概率均大于 0. 因此, 发生可能性最小的是摸出黄球,

故选 D.

5. 李老师逛超市时看中一套碗, 她将碗叠成一行 (如图), 测量后发现: 用 2 个碗叠放时总高度为 7.5cm, 用 4 个碗叠放时总高度为 11.5cm. 若将 8 个碗叠成一行能放入消毒柜, 则这个消毒柜的内置高度至少有 ()



- A. 15.5cm B. 17.5cm C. 19.5cm D. 21.5cm

【答案】 C

【解析】

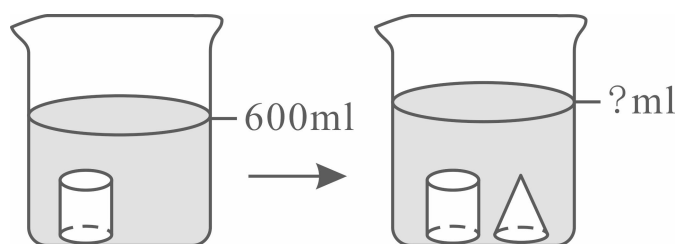
【分析】 本题主要考查了有理数四则混合计算的实际应用, 用 2 个碗叠放时总高度为 7.5cm, 用 4 个碗叠放时总高度为 11.5cm, 据此可求出每增加一个碗, 高度的增加量, 再在 4 个碗的基础上加上增加的 4 个碗的高度即可得到答案.

【详解】 解: $11.5 + (8 - 4) \times \frac{11.5 - 7.5}{4 - 2} = 19.5\text{cm}$,

$\therefore$ 这个消毒柜的内置高度至少有 19.5cm,

故选: C.

6. 仔细观察图: 在一个盛有 450 毫升水的量杯中放入一个圆柱体, 水面对应的刻度为 600 毫升, 若再放入一个与圆柱等底等高的圆锥, 则此时的水面对应的刻度为 ()



- A. 150 毫升 B. 650 毫升 C. 50 毫升 D. 无法确定

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了圆柱与圆锥的体积, 关键是熟练掌握同底等高圆锥和圆柱的体积关系. 先根据两杯中测量到的体积增量求出圆柱的体积, 再由同底等高圆锥和圆柱体积的关系求出圆锥的体积, 进而求出最终水面对应的刻度.

【详解】 解: 在量杯中放入圆柱体后, 体积增量为:

$$600 - 450 = 150 \text{ (毫升)}.$$

∴ 所以圆柱的体积为 150 毫升.

$$\because V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}V_{\text{圆柱}} = \frac{1}{3} \times 150 = 50 \text{ (毫升)}.$$

∴ 放入圆锥后水面对应的刻度为:

$$600 + 50 = 650 \text{ (毫升)}.$$

故答案为: B.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分) 【在答题纸相应题号后的空格内重接填写答案】

7. 单项式 $-\frac{4ab^2c^3}{3}$ 的系数是_____.

【答案】 $-\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查单项式的系数, 熟练掌握单项式的系数是解题的关键; 因此此题可根据单项式的系数问题进行求解即可.

【详解】 解: 单项式 $-\frac{4ab^2c^3}{3}$ 的系数是 $-\frac{4}{3}$,

故答案为: $-\frac{4}{3}$.

8. 已知 $x:3=3:8$, 则 $x=$ _____.

【答案】 1.125

【解析】

【分析】 本题考查了比例的基本性质, 根据比例的性质: 内项之积等于外项之积求解即可.

【详解】 解: $x:3=3:8$,

$$8x = 3 \times 3,$$

$$x = 1.125,$$

故答案为: 1.125.

9. 若 $(m-1)x + 3y^{|m|} = 12$ 是关于 x, y 的二元一次方程, 则 m 的值是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】本题考查二元一次方程的定义，根据二元一次方程的定义，得到 $m-1 \neq 0, |m|=1$ ，进行求解即可，熟练掌握二元一次方程的定义，是解题的关键.

【详解】解：由题意，得： $m-1 \neq 0, |m|=1$ ，

$\therefore m = -1$ ；

故答案为： -1

10. 计算： $8xy \cdot \frac{1}{4}x =$ _____.

【答案】 $2x^2y$

【解析】

【分析】根据单项式乘以单项式的乘法法则计算即可.

【详解】 $8xy \cdot \frac{1}{4}x = 8 \times \frac{1}{4}x \cdot x \cdot y = 2x^2y$ ；故答案为 $2x^2y$.

【点睛】本题考查了整式的乘法公式，解题的关键熟练掌握单项式乘以单项式的乘法法则.

11. 计算： $(2x^2)^3 =$ _____.

【答案】 $8x^6$

【解析】

【分析】根据积的乘方和幂的乘方计算法则即可得出答案.

【详解】解： $(2x^2)^3 = 8x^6$ ，

故答案为： $8x^6$.

【点睛】本题主要考查的是积的乘方和幂的乘方法则，属于基础题型. 幂的乘方，底数不变，指数相乘；积的乘方等于乘方的积. 明确计算法则是解题的关键.

12. 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$ ，则 $x + y =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】本题主要考查解二元一次方程组，将方程组的两个方程相加即可得出结果.

【详解】解： $\begin{cases} 3x - y = 5 \text{ ①} \\ -x + 3y = 1 \text{ ②} \end{cases}$

①+②得, $2x+2y=6$,

$$\therefore x+y=3,$$

故答案为: 3.

13. 若多项式 $2(x^2+xy)-(3x^2-axy)$ 中不含 xy 项, 则 $a=$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查整式的加减, 将多项式展开再合并, 因为式子中不含 xy 项, 则 $2+a=0$, 据此求出 a . 解题的关键是将式子展开计算.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & 2(x^2+xy)-(3x^2-axy) \\ &= 2x^2+2xy-3x^2+axy \\ &= -x^2+(2+a)xy, \\ \because \text{多项式 } & 2(x^2+xy)-(3x^2-axy) \text{ 中不含 } xy \text{ 项,} \\ \therefore & 2+a=0, \\ \therefore & a=-2. \end{aligned}$$

故答案为: -2.

14. 已知 $2^x=8$, 则 $x=$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查有理数乘方运算, 根据有理数乘方运算计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & \because 2^3=8, \\ \therefore & x=3 \end{aligned}$$

故答案为: 3.

15. 一种商品, 原价为 50 元, 现价比原价降低了 20%, 那么现价是_____元.

【答案】 40

【解析】

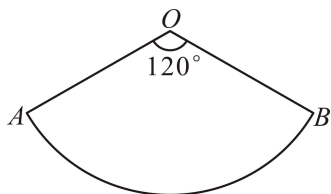
【分析】 本题考查了百分数的应用, 根据题意可知, 现价是原价的 80%, 用 50 乘以 80% 计算即可求得现价.

【详解】解：原价为 50 元，现价比原价降低了 20%，

那么现价是 $50 \times (1 - 20\%) = 50 \times 80\% = 40$ 元，

故答案为：40.

16. 如图，扇形 OAB 是一个圆锥的侧面展开图， $\angle AOB = 120^\circ$ ， OA 长为 6cm，则该圆锥的底面半径为 _____ cm (结果保留 π).



【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了圆锥的相关计算，解题的关键是牢记圆锥的底面周长为圆锥侧面展开图的弧长.

首先求出圆锥的底面周长即侧面展开图的弧长，然后求得圆锥的底面半径即可.

【详解】解：设圆锥的底面半径为 r cm，

$\because \angle AOB = 120^\circ$ ， OA 长为 6cm，

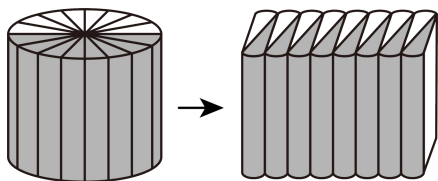
$\therefore$ 扇形的弧长 $l = \frac{120\pi \times 6}{180} = 4\pi$ ，

$\therefore 2\pi r = 4\pi$

解得 $r = 2$ cm

故答案为：2.

17. 如图，把一个底面周长为 4π 厘米的圆柱切成若干等份，拼成一个近似的长方体，表面积增加 64 平方厘米，原来这个圆柱的体积是 _____ cm^3 (保留 π).



【答案】 64π

【解析】

【分析】先根据圆柱底面周长求出底面半径，再由拼成近似长方体后表面积增加的部分求出圆柱的高，最后利用圆柱体积公式计算体积. 本题主要考查了圆柱的切拼、圆的周长公式、长方形面积公式以及圆柱体积公式的应用，熟练掌握这些公式及切拼后表面积的变化特点是解题的关键.

【详解】解：由题意可得

$$4\pi = 2\pi r,$$

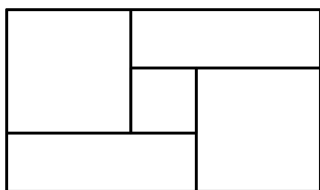
解得 $r = 2$ 厘米.

圆柱的高 $h = 64 \div 2 \div 2 = 32 \div 2 = 16$ 厘米.

圆柱的体积 $V = \pi \times 2^2 \times 16 = \pi \times 4 \times 16 = 64\pi$ 立方厘米.

故答案为: 64π .

18. 如图, 把一个长为14cm, 宽为10cm的长方形分成五块, 其中两个长方形和两个大正方形分别相同, 则中间小正方形的边长为_____ cm.



【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了二元一次方程组的应用, 找准等量关系, 正确列出二元一次方程组是解题的关键.

设大正方形的边长为 x cm, 中间小正方形的边长为 y cm, 根据把一个长为14cm, 宽为10cm的长方形分成五块, 列出二元一次方程组, 解方程组即可.

【详解】解: 设大正方形的边长为 x cm, 中间小正方形的边长为 y cm,

由题意得:
$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ x + (x - y) = 10 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

即中间小正方形的边长为2cm,

故答案为: 2.

三、计算题: (本大题共4题, 每题5分, 满分20分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. 计算. $\left(-\frac{1}{2}a^3b^2\right) \cdot (4b + 8ab^3)$

【答案】 $-2a^3b^3 - 4a^4b^5$

【解析】

【分析】 本题考查了单项式乘多项式，熟练掌握运算法则是解题的关键．根据单项式乘多项式法则计算即可．

【详解】 解： $\left(-\frac{1}{2}a^3b^2\right) \cdot (4b + 8ab^3)$

$$= -\frac{1}{2}a^3b^2 \cdot 4b + \left(-\frac{1}{2}a^3b^2\right) \cdot 8ab^3$$
$$= -2a^3b^3 - 4a^4b^5.$$

20. 计算. $(3x + 2y)(2x - 3y) + 3x(3x - 2y)$

【答案】 $15x^2 - 11xy - 6y^2$

【解析】

【详解】 本题考查整式的乘法，根据多项式乘多项式的运算法则，单项式乘多项式的运算法则计算，然后再合并同类项即可．

【解答】 解： $(3x + 2y)(2x - 3y) + 3x(3x - 2y)$

$$= 6x^2 - 9xy + 4xy - 6y^2 + 9x^2 - 6xy$$
$$= 15x^2 - 11xy - 6y^2.$$

21. 解方程组： $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 7x - 3y = 20 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$

【解析】

【详解】 试题分析： 本题根据方程组的解法——加减消元法，解方程组即可．

试题解析：

② - ① × 3 得：

$$\begin{cases} 6x - 3y = 15 \\ 7x - 3y = 20 \end{cases}$$

$$x = 5$$

把 $x = 5$ 代入①得： $y = 5$

∴原方程组的解为 $\begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$

22. 解方程组:
$$\begin{cases} x-y-z=2 \\ x+5y+7z=18 \\ x-y+2z=17 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=5 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解三元一次方程组，利用加减消元法解三元一次方程组即可得解，熟练掌握加减消元法是解此题的关键.

【详解】 解:
$$\begin{cases} x-y-z=2 \text{①} \\ x+5y+7z=18 \text{②} \\ x-y+2z=17 \text{③} \end{cases}$$

由 ②-① 可得: $6y+8z=16 \text{④}$,

由 ②-③ 可得: $6y+5z=1 \text{⑤}$,

由 ④-⑤ 可得: $3z=15$,

解得: $z=5$,

将 $z=5$ 代入 ④ 可得: $6y+40=16$,

解得: $y=-4$,

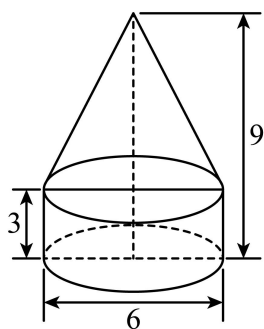
将 $y=-4$, $z=5$ 代入 ① 可得: $x-(-4)-5=2$,

解得: $x=3$,

∴原方程组的解为
$$\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=5 \end{cases}$$

四、解答题: (本大题共 4 题, 满分 32 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

23. 如图, 是一个圆柱和圆锥组成的粮仓. 已知粮仓底部直径为 6m, 粮仓顶部顶点到地面的高度为 9m, 求该粮仓的容积. (说明: 不考虑粮仓的厚度, 结果保留 π)



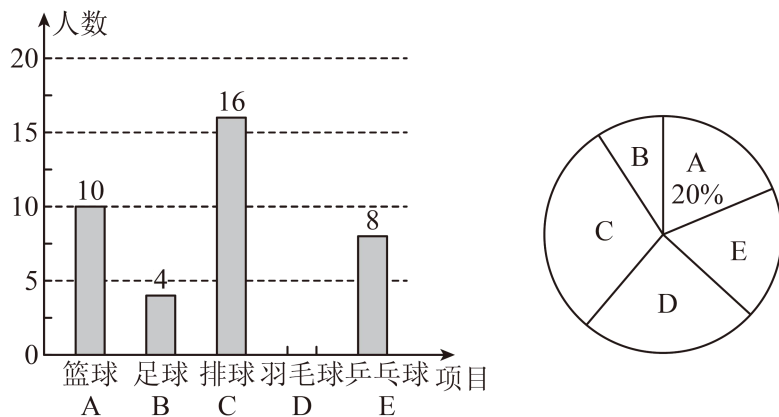
【答案】该粮仓的容积为 $45\pi \text{ m}^3$

【解析】

【分析】本题考查了圆柱和圆锥的体积，熟练掌握体积公式是关键．根据粮仓的形状，上面是一个圆锥，下面是一个圆柱，分别计算它们的容积，然后相加即可．

【详解】 $\pi \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 \times 3 + \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 \times (9-3) = 27\pi + 18\pi = 45\pi (\text{m}^3)$ ．

24. 2024 年 8 月 14 日，安徽省教育厅印发《关于做好义务教育阶段学校每天开设一节体育课的通知》，要求全省义务教育阶段所有公民办学校从 2024 年秋季学期开始必须每天开设一节体育课，上下午各开设一次 30 分钟大课间体育活动，保障学生每天两个小时体育活动时间．某校为贯彻落实该项政策，在日常课程中开设了“一人一球”体育拓展课程，学生可根据自己的喜好选择一门球类项目（A：篮球；B：足球；C：排球；D：羽毛球；E：乒乓球），学校随机对该校部分学生的选课情况进行调查，绘制成两幅不完整的统计图（如图所示）．



请根据以上信息，回答下列问题：

- 此次调查的学生总数是_____人，选择羽毛球的学生人数为_____人；请将条形统计图补充完整；
- 扇形统计图中，求 B 项目所对应的扇形圆心角的度数；
- 若该校有学生 950 人，请估计有多少学生选修了排球．

【答案】（1）50，12；画图见解析

- 扇形统计图中扇形 B 的圆心角度数是 28.8° ；

(3) 该校 950 名学生中喜欢 C 排球的学生大约有 304 人.

【解析】

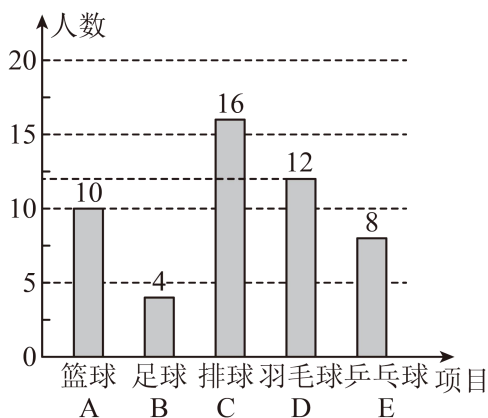
【分析】 本题考查的是从条形图与扇形图中获取信息，利用样本估计总体；

- (1) 从两个统计图可知，样本中喜欢“A：篮球”的学生有 10 人，占被调查人数的 20%，根据频率 = 频数 ÷ 总数即可求出被调查人数；再根据各组频数之和等于样本容量可求出喜欢“D：羽毛球”的人数；
- (2) 求出样本中喜欢“B：足球”的学生人数占被调查人数的百分比，进而可求出相应圆心角的度数；
- (3) 求出样本中喜欢“C：排球”的学生人数占被调查人数的百分比，进而估计总体中参喜欢“C：排球”的学生人数占被调查人数的百分比，根据频率 = 频数 ÷ 总数进行计算即可.

【小问 1 详解】

解： $10 \div 20\% = 50$ (人)，

样本中喜欢“D：羽毛球”的人数为 $50 - 10 - 4 - 16 - 8 = 12$ (人)，补全条形统计图如图所示：



故答案为：50，12；

【小问 2 详解】

解： $360^\circ \times \frac{4}{50} = 28.8^\circ$ ，

答：扇形统计图中扇形 B 的圆心角度数是 28.8° ；

【小问 3 详解】

解： $950 \times \frac{16}{50} = 304$ (人)，

答：该校 950 名学生中喜欢 C 排球的学生大约有 304 人.

25. 2025 年央视春晚节目《秧 BOT》别出心裁，独树一帜，人机共舞为文化传承搭建了新的桥梁，不仅舞出了精彩的节目，更是舞出了传统文化与现代科技交织的艺术新境界. 随着人工智能与物联网等技术的快速发展，人形机器人的应用场景不断拓展，某快递企业为提高工作效率，拟购买 A、B 两种型号智能机器人进行快递分拣. 若买 1 台 A 型机器人、3 台 B 型机器人，共需 260 万元；若买 3 台 A 型机器人、2 台 B 型机器人，共需 360 万元.



- (1) 求 A 、 B 两种型号智能机器人的单价；
- (2) 该企业预计每天需要分拣 200 万件快递，现准备购买 A 、 B 两种型号智能机器人共 10 台。已知 A 型机器人每台每天可分拣 22 万件； B 型机器人每台每天可分拣 18 万件，则企业要购买 A 型和 B 型机器人各几台？

【答案】 (1) A 种型号智能机器人的单价为 80 万元， B 种型号智能机器人的单价为 60 万元

(2) 该企业要购买 A 型机器人 5 台， B 型机器人 5 台

【解析】

【分析】 本题考查了二元一次方程组的应用，找准等量关系，正确列出二元一次方程组是解题的关键。

(1) 设 A 种型号智能机器人的单价为 x 万元， B 种型号智能机器人的单价为 y 万元，根据买 1 台 A 型机器人、3 台 B 型机器人，共需 260 万元；若买 3 台 A 型机器人、2 台 B 型机器人，共需 360 万元；列出二元一次方程组，解方程组即可；

(2) 设该企业要购买 A 型机器人 a 台， B 型机器人 b 台，根据该企业预计每天需要分拣 200 万件快递，现准备购买 A 、 B 两种型号智能机器人共 10 台，列出二元一次方程组，解方程组即可。

【小问 1 详解】

解：设 A 种型号智能机器人的单价为 x 万元， B 种型号智能机器人的单价为 y 万元，

$$\text{由题意得} \begin{cases} x + 3y = 260 \\ 3x + 2y = 360 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 80 \\ y = 60 \end{cases},$$

答： A 种型号智能机器人的单价为 80 万元， B 种型号智能机器人的单价为 60 万元；

【小问 2 详解】

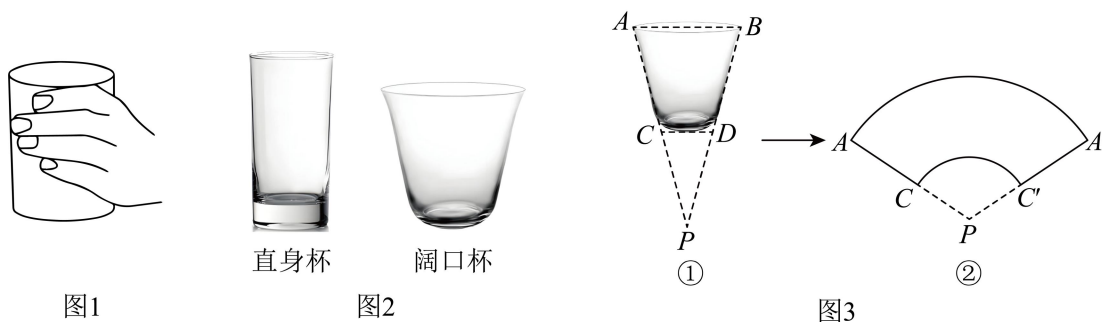
解：设该企业要购买 A 型机器人 a 台， B 型机器人 b 台，

$$\text{由题意得} \begin{cases} a + b = 10 \\ 22a + 18b = 200 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 5 \\ b = 5 \end{cases},$$

答：该企业要购买 A 型机器人 5 台， B 型机器人 5 台。

26. 如图 1，商家销售某些饮品时会给杯子在杯身上套上一个杯套，方便拿取。小欣同学深受启发，准备为家中如图 2 所示的两种玻璃杯也配上杯套。（说明：整个探究过程中均忽略杯套的连接部分和杯套的厚度）。



(1) 小欣家直身杯的杯口直径为 7cm ，她要制作高度为 6cm 的杯套，则此杯套的面积为_____ cm^2 (结果保留 π)；

(2) 小欣发现阔口杯近似为圆台形状，如图 3①所示，通过测量，杯子上口径 $AB = 9\text{cm}$ ，下底面直径 $CD = 4\text{cm}$ ，母线长 AC 、 BD 均为 7.5cm ，为了制作此杯套，如图 3②，小欣画出了阔口杯的侧面展开图示意图，发现它是圆环的一部分。

- ①证明：弧 AA' 与 CC' 的长之比等于 AP 与 CP 之比。
 ②求圆心角 $\angle APA'$ 的度数及杯套的面积。（结果保留 π ）

【答案】(1) 42π

(2) ①见解析；② 120° ； $\frac{195}{4}\pi\text{cm}^2$

【解析】

【分析】本题考查圆柱的侧面积、圆环，掌握圆柱的侧面积、圆的周长和弧长、扇形面积计算公式是解题的关键。

- (1) 根据圆柱的侧面积列式计算即可；
 (2) ①根据弧长公式证明即可；
 ②将弧 AA' 的长用 AB 表示出来，弧 CC' 长用 CD 表示出来，由①求出 CP ，从而求出 AP ，由弧长公式列关于 n 的方程并求解，得到圆心角 $\angle APA'$ 的度数，再根据扇形面积公式求出杯套的面积即可。

【小问 1 详解】

解： $7\pi \times 6 = 42\pi(\text{cm}^2)$ ，

$\therefore$ 此杯套的面积为 $42\pi\text{cm}^2$ 。

故答案为： 42π .

【小问 2 详解】

①证明： 设圆心角 $\angle APA' = n^\circ$,

$$l_{\widehat{AA'}} = \frac{n}{360} \times 2\pi \cdot AP, l_{\widehat{CC'}} = \frac{n}{360} \times 2\pi \cdot CP ,$$

$$\text{则 } \frac{l_{\widehat{AA'}}}{l_{\widehat{CC'}}} = \frac{AP}{CP} ,$$

$\therefore$ 弧 AA' 与 CC' 的长之比等于 AP 与 CP 之比.

$$\text{②解: } \because l_{\widehat{AA'}} = \pi \cdot AB, l_{\widehat{CC'}} = \pi \cdot CD ,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{AP}{CP} = \frac{9}{4} , \text{ 即 } \frac{AC + CP}{CP} = \frac{9}{4} ,$$

$$\therefore \frac{7.5 + CP}{CP} = \frac{9}{4} ,$$

$$\therefore CP = 6\text{cm} ,$$

$$\therefore AP = AC + CP = 7.5 + 6 = 13.5\text{cm} ,$$

$$\therefore l_{\widehat{CC'}} = \frac{n}{360} \times 2\pi \times CP = \pi \cdot CD , \text{ 即 } \frac{n}{360} \times 2\pi \times 6 = \pi \times 4 ,$$

$$\therefore n = 120 ,$$

$\therefore$ 圆心角 $\angle APA'$ 的度数为 120° ,

$$\frac{120}{360} \pi (AP^2 - CP^2) = \frac{195}{4} \pi \text{cm}^2 ,$$

$$\therefore \text{杯套的面积为 } \frac{195}{4} \pi \text{cm}^2 .$$