

B. 6 能被 3 整除

C. 6 能整除 3

D. 能被 2、5 整除的最小正整数是 10

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查整除的概念. 根据整除的定义, 若整数 a 能被整数 b 整除, 则存在整数 k 使得 $a = b \times k$. 需逐一验证各选项是否符合该定义.

【详解】解: A: 2 能被 1 整除. 故 A 正确.

B: 6 能被 3 整除. 故 B 正确.

C: 6 不能整除 3. 故 C 错误.

D: 2 和 5 的最小公倍数为 $2 \times 5 = 10$, 能被 2、5 整除的最小正整数是 10. 故 D 正确.

故选: C.

4. 已知 14 能整除整数 a , 那么 a 是 ()

A. 1 和 14

B. 2 和 14

C. 14 的因数

D. 14 的倍数

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了因数和倍数的意义. 根据因数和倍数的意义: 如果一个整数 $b(b \neq 0)$ 能整除整数 a , 那么 a 就叫做 b 的**倍数**, b 就叫做 a 的**因数**; 可知: 14 能整除整数 a , 即 a 就是 14 的倍数.

【详解】解: 根据因数和倍数的意义可知: 14 能整除整数 a , 那么 a 就是 14 的倍数.

故选: D.

5. 一个汽车站内有两路公共汽车, 甲路汽车每隔 4 分钟发出一辆, 乙路汽车每隔 6 分钟发出一辆, 至少每隔 () 分钟, 两路汽车会同时发车

A. 1

B. 2

C. 12

D. 24

【答案】C

【解析】

【分析】甲路汽车每隔 4 分钟发出一辆, 乙路汽车每隔 6 分钟发出一辆, 4 和 6 的最小公倍数为 12, 如果每天两车首发为同一时间的话, 则两车至少每隔 12 分钟会同时发车.

【详解】解: 4 和 6 的最小公倍数为 12, 如果每天两车首发为同一时间的话, 则两车至少每隔 12 分钟会同时发车.

故选: C.

【点睛】本题考查的是最小公倍数的实际应用, 通过求间隔时间的最小公倍数, 来求至少每隔多少分钟两路汽车会同时发车, 是完成此类问题的主要方法.

6. 下列各数中，能同时被 2、5 整除的数是（ ）

A. 16

B. 25

C. 35

D. 100

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查能被 2 和 5 整除的数的特征.

根据能被 2 和 5 整除的数的特征，对各选项进行分析判断即可.

【详解】解：A. 16 能被 2 整除，不能被 5 整除，不符合题意；

B. 25 能被 5 整除，不能被 2 整除，不符合题意；

C. 35 能被 5 整除，不能被 2 整除，不符合题意；

D. 100 能被 2 整除，也能被 5 整除，符合题意.

故选：D.

7. 下列各对数中，互素的是（ ）

A. 18 和 32

B. 39 和 26

C. 51 和 63

D. 21 和 20

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查互素.

分析各选项中的两个数是否存在除 1 以外的公因数即可.

【详解】解： $\because$ 18 和 32 有公因数 2，

$\therefore$ 18 和 32 不互素，

$\therefore$ 选项 A 不符合题意，

$\because$ 39 和 26 有公因数 13，

$\therefore$ 39 和 26 不互素，

$\therefore$ 选项 B 不符合题意，

$\because$ 51 和 63 有公因数 3，

$\therefore$ 51 和 63 不互素，

$\therefore$ 选项 C 不符合题意，

$\because$ 21 和 20 的公因数只有 1，

$\therefore$ 21 和 20 互素，

$\therefore$ 选项 D 符合题意，

故选：D.

8. 下列说法错误的是 ()

- A. 相邻的两个正整数一定互素
B. 互素的两个数一定不是素数
C. 两个不同的素数一定互素
D. 相邻的两个奇数一定互素

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查互素.

根据互素的定义, 对各选项进行分析判断即可.

- 【详解】解: A. 相邻的两个正整数一定互素, 原说法正确, 故选项 A 不符合题意;
B. 互素的两个数可以均为素数, 例如, 2 和 3 均为素数且互素, 原说法错误, 故选项 B 符合题意;
C. 两个不同的素数一定互素, 原说法正确, 故选项 C 不符合题意;
D. 相邻的两个奇数一定互素, 原说法正确, 故选项 D 不符合题意.

故选: B.

9. 一间长方形房屋装修时用正方形地砖正好铺满, 那么正方形地砖的边长应该是长方形的长和宽的 ()

- A. 最大公因数
B. 最小公倍数
C. 公因数
D. 公倍数

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查倍数和因数, 熟练掌握倍数和因数的关系是解题关键.

根据倍数和因数的关系进行分析, 即可作答.

- 【详解】解: $\because$ 一间长方形房屋装修时用正方形地砖正好铺满,
 $\therefore$ 正方形地砖的边长既是长方形房屋长的因数, 又是长方形房屋宽的因数,
即正方形地砖的边长是长方形房屋长和宽的公因数,
故选: C .

10. 下列说法中正确的个数有 () 个

- ①两个素数的乘积一定是奇数; ②两个素数的和一定是偶数; ③相邻的两个正整数的乘积一定是合数; ④一个合数至少有三个因数.

- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查素数、合数、奇数、偶数的概念. 合数: 一个大于 1 的整数, 如果除了 1 和它本身以外, 还有其他的约数, 这样的数就叫作合数, 奇数: 不能被 2 整除的整数, 偶数: 能被 2 整除的整数.

根据素数、合数、奇数、偶数的定义，逐一分析每个说法，即可作答.

【详解】解：两个素数的乘积一定是奇数，这个说法是错误的，例如，2 和 3 都是素数的，它们的乘积是 6，6 是偶数，不是奇数，故①不符合题意；

两个素数的和一定是偶数，这个说法是错误的，例如，2 和 3 是素数，它们的和是 5，5 是奇数，不是偶数，故②不符合题意；

相邻的两个正整数的乘积一定是合数，这个说法是错误的，例如，1 和 2 是相邻的两个正整数，它们的乘积是 2，2 是素数，不是合数，故③不符合题意；

一个合数至少有三个因数，这个说法是正确的，根据合数的定义，一个合数除了 1 和它本身以外，还有其他的因数，所以至少有三个因数，故④符合题意；

故选：B.

二、填空题

11. 最小的合数是_____.

【答案】4

【解析】

【分析】根据除了 1 和它本身外还有别的因数的数为合数.

【详解】解：根据合数定义可知，最小的合数为 4

故答案为：4

【点睛】根据合数的意义确定最小值是完成本题的关键.

12. 40 以内正整数，是 9 的倍数的是_____.

【答案】9、18、27、36

【解析】

【分析】本题考查倍数.

根据倍数的定义，计算即可.

【详解】解： $9 \times 1 = 9$ ，符合题意，

$9 \times 2 = 18$ ，符合题意，

$9 \times 3 = 27$ ，符合题意，

$9 \times 4 = 36$ ，符合题意，

$9 \times 5 = 45$ ，不符合题意，

$\therefore$ 40 以内正整数，是 9 的倍数的是 9、18、27、36.

故答案为：9、18、27、36.

13. 分解素因数: $28 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2 \times 2 \times 7$

【解析】

【分析】 根据分解素因数的意义解答即可.

本题考查了分解素因数, 熟练掌握分解方法是解题的关键.

【详解】 解: $28 = 2 \times 2 \times 7$,

故答案为: $2 \times 2 \times 7$.

14. 21 和 7 的最大公因数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查了公因数, 根据 $21 = 7 \times 3, 7 = 7 \times 1$, 则 21 和 7 的最大公因数是 7, 即可作答.

【详解】 解: 依题意, $21 = 7 \times 3, 7 = 7 \times 1$,

$\therefore$ 21 和 7 的最大公因数是 7,

故答案为: 7

15. 一个正整数是 10 的倍数, 又是 100 的因数, 且不能被 4 整除, 这个数 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 10 或 50

【解析】

【分析】 本题考查了因数和倍数, 掌握整除的意义是解题的关键. 本题通过 10 的倍数特征, 100 的因数及 4 的倍数特征即可求解.

【详解】 解: 100 的因数有 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100,

其中是 10 的倍数的因数是 10, 20, 50, 100,

其中只有 10, 50 不能被 4 整除,

所以这个数为 10 或 50.

故答案为: 10 或 50.

16. 在数 1、3、5、7、9、15、17、23、27、37、57、97 中, 素数有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查素数的概念: 素数是指在大于 1 的自然数中, 除了 1 和它本身以外不再有其他因数的自然数, 据此进行逐个分析, 即可作答.

【详解】 解: $\because$ 素数是指在大于 1 的自然数中, 除了 1 和它本身以外不再有其他因数的自然数,

$\therefore 1$ 不是素数,

依题意, $3=3\times 1, 5=5\times 1, 7=7\times 1, 17=17\times 1, 23=23\times 1, 37=37\times 1, 97=97\times 1$,

故数 3、5、7、17、23、37、97 都是素数,

依题意, $9=3\times 3, 15=3\times 5, 27=9\times 3, 57=19\times 3$,

故 9、15、27、57 不是素数,

$\therefore$ 素数有 7 个,

故答案为: 7.

17. 若 $A=2\times 2\times 3\times 5$, 则 A 有_____个素因数.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查素因数的概念, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

结合 $A=2\times 2\times 3\times 5$, 则 A 有 3 个素因数, 即可作答.

【详解】 解: $\because A=2\times 2\times 3\times 5$,

$\therefore A$ 的素因数是 2, 3 和 5,

即 A 有 3 个素因数,

故答案为: 3

18. 甲 $= 2\times 5\times A$, 乙 $= 2\times 7\times A$, 甲、乙两数的最小公倍数是 210, 则 $A =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了最小公倍数, 熟记概念是解题关键.

根据最小公倍数的定义即可得.

【详解】 解: 因为甲 $= 2\times 5\times A$, 乙 $= 2\times 7\times A$,

所以甲、乙两数的最小公倍数是 $2\times 5\times 7\times A = 70A$,

由题意得 $70A = 210$,

解得 $A = 3$,

故答案为: 3.

19. 两个正整数有 2 个公有的素因数, 它们的公因数个数最少是_____个.

【答案】 4

【解析】

【分析】本题考查公因数和素因数的概念. 素因数: 素因数是指能整除给定正整数的素数. 例如, $6 = 2 \times 3$, 2 和 3 就是 6 的素因数. 公因数: 给定若干个整数, 如果有一个 (些) 数是它们共同的因数, 那么这个 (些) 数就叫做它们的公因数. 先明确素因数是质数, 公因数是两个数公有的因数. 然后根据因数个数的计算方法, 先求出公有的素因数的因数个数, 再结合公因数的性质, 求出两个数公因数的个数.

【详解】解: 设这两个正整数公有的素因数为 p_1 和 p_2 ,

对于素因数 p_1 , 它的因数有 1 和 p_1 , 共 2 个;

对于素因数 p_2 , 它的因数有 1 和 p_2 , 共 2 个.

所以这两个正整数的公因数个数最少为 1, p_1 和 p_2 , $p_1 p_2$ 共 4 个.

故答案为: 4.

20. a, b, c, d 是互不相等的正整数, 且 $abcd = 441$, 那么 $a + b + c + d$ 的值是_____.

【答案】32

【解析】

【分析】本题考查了因数整除的知识点, 通过整除 441 的因数, 找出满足条件的互不相等的正整数 a, b, c, d , 进而求出 $a + b + c + d$ 的值.

【详解】解: 由题意知, $441 = 3 \times 3 \times 7 \times 7 = 1 \times 3 \times 7 \times 21$,

$\therefore a, b, c, d$ 是互不相等的正整数,

$\therefore abcd = 1 \times 3 \times 7 \times 21$,

$\therefore a, b, c, d$ 对应 1, 3, 7, 21 这四个数,

$\therefore a + b + c + d = 1 + 3 + 7 + 21 = 32$.

故答案为: 32.

三、简答题:

21. 用短除法分解素因数.

(1) 48;

(2) 210.

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】本题考查了短除法分解素因数, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 按照题目要求, 进行作答即可;

(2) 按照题目要求, 进行作答即可;

【小问 1 详解】

解: 依题意,

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48} \\ 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$$\therefore 48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3,$$

【小问 2 详解】

解: 依题意,

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 210} \\ 3 \overline{) 105} \\ 5 \overline{) 35} \\ 7 \end{array}$$

$$\therefore 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

22. 用短除法求下列几组数的最大公因数和最小公倍数.

(1) 42 和 63;

(2) 30 和 45;

(3) 64 和 96;

(4) 36 和 48;

(5) 16、24 和 32;

(6) 80、64 和 50.

【答案】(1) 21, 126

(2) 15, 90 (3) 32, 192

(4) 12, 144 (5) 8, 192

(6) 2, 1600

【解析】

【分析】 本题考查了短除法，公因数和公倍数，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 先根据短除法计算，再得出 42 和 63 的最大公因数和最小公倍数，即可作答.

(2) 先根据短除法计算，再得出 30 和 45 的最大公因数和最小公倍数，即可作答.

(3) 先根据短除法计算，再得出 64 和 96 的最大公因数和最小公倍数，即可作答.

(4) 先根据短除法计算，再得出 36 和 48 的最大公因数和最小公倍数，即可作答.

(5) 先根据短除法计算，再得出 16、24 和 32 的最大公因数和最小公倍数，即可作答.

(6) 先根据短除法计算，再得出 80、64 和 50 的最大公因数和最小公倍数，即可作答.

【小问 1 详解】

解：依题意：

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 42 & 63 \\ \hline 7 & 14 & 21 \\ \hline & 2 & 3 \end{array},$$

$\therefore 42$ 和 63 的最大公因数 $= 3 \times 7 = 21$,

$\therefore 42$ 和 63 的最小公倍数 $= 3 \times 7 \times 2 \times 3 = 126$;

【小问 2 详解】

解：依题意：

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 30 & 45 \\ \hline 5 & 10 & 15 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

$\therefore 30$ 和 45 的最大公因数为 $3 \times 5 = 15$,

$\therefore 30$ 和 45 的最小公倍数为 $3 \times 5 \times 2 \times 3 = 90$;

【小问 3 详解】

解：依题意：

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) \quad 64 \quad 96} \\
 2 \overline{) \quad 32 \quad 48} \\
 2 \overline{) \quad 16 \quad 24} \\
 2 \overline{) \quad 8 \quad 12} \\
 2 \overline{) \quad 4 \quad 6} \\
 \quad 2 \quad 3
 \end{array}$$

$\therefore 64$ 和 96 的最大公因数为 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$,

$\therefore 64$ 和 96 的最小公倍数为 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 192$;

【小问 4 详解】

解：依题意：

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) \quad 36 \quad 48} \\
 2 \overline{) \quad 18 \quad 24} \\
 3 \overline{) \quad 9 \quad 12} \\
 \quad 3 \quad 4
 \end{array}$$

$\therefore 36$ 和 48 的最大公因数为 $2 \times 2 \times 3 = 12$,

$\therefore 36$ 和 48 的最小公倍数为 $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 = 144$;

【小问 5 详解】

解：依题意，

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) \quad 16 \quad 24 \quad 32} \\
 2 \overline{) \quad 8 \quad 12 \quad 16} \\
 2 \overline{) \quad 4 \quad 6 \quad 8} \\
 \quad 2 \quad 3 \quad 4
 \end{array}$$

$\therefore 16$ 、 24 和 32 的最大公因数为 $2 \times 2 \times 2 = 8$,

$\therefore 16$ 、 24 和 32 的最小公倍数为 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 4 = 192$;

【小问 6 详解】

解：依题意，

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) \quad 80 \quad 64 \quad 50} \\
 \quad 40 \quad 32 \quad 25
 \end{array} ,$$

∴80、64 和 50 的最大公因数为 2，

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) \quad 80 \ 64 \ 50} \\ 2 \overline{) \quad 40 \ 32 \ 25} \\ 2 \overline{) \quad 20 \ 16 \ 25} \\ 2 \overline{) \quad 10 \ 8 \ 25} \\ 5 \overline{) \quad 5 \ 4 \ 25} \\ 1 \quad 4 \quad 5 \end{array},$$

∴80、64 和 50 的最小公倍数为 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 1 \times 4 \times 5 = 1600$ 。

四、解答题

23. 请将六个数：2、3、14、15、30、42 分成两组，使得两组数的乘积相等，写出所有的分组方法。

【答案】

第一种分组方法：①42，30，②2，3，14，15；

第二种分组方法：①42，15，2，②3，14，30。

【解析】

【分析】本题考查分解质因数。

分解质因数，将质因数平均分为两组即可。

【详解】解：2，3，14 = 2×7 ，15 = 3×5 ，30 = $2 \times 3 \times 5$ ，42 = $2 \times 3 \times 7$ ，

因数 2 共有 4 个，每组 2 个，

因数 3 共有 4 个，每组 2 个，

因数 5 共有 2 个，每组 1 个，

因数 7 共有 2 个，每组 1 个，

∴共有以下两种分组方法：

第一种分组方法：①42，30，②2，3，14，15；

第二种分组方法：①42，15，2，②3，14，30。

24. 某校有 36 名男生和 48 名女生，分组进行活动，要求每个组内男生人数相同，总人数也要相同，那么每个组内至少有几个学生？

【答案】每个组内至少有 7 个学生

【解析】

【分析】本题考查最大公因数的应用，正确掌握相关性质内容是解题的关键。

要使每个组内男生人数和女生人数分别相同，那么分组数就是男生人数和女生人数的公因数，要求每个组内至少有几个学生，就是求分组数最大时，每个组内学生的人数，所以分组数就是男生人数和女生人数的最大公因数，据此进行列式计算，即可作答.

【详解】解：依题意， $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$, $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$,

$\therefore 36$ 和 48 的最大公因数为 $2 \times 2 \times 3 = 12$

$\therefore (36 + 48) \div 12 = 7$,

$\therefore$ 每个组内至少有 7 个学生.

25. 一盒饼干，若四块四块装小袋，最后余 3 块，若五块五块装小袋，最后也余 3 块，若六块六块装小袋，最后还是余 3 块，问这盒饼干最少有多少个？

【答案】这盒饼干最少有 63 个

【解析】

【分析】本题考查最小公倍数.

根据题意，求 4，5，6 的最小公倍数，加 3，即可得这盒饼干的最少个数.

【详解】解： $\because 4 = 2 \times 2$ ， $6 = 2 \times 3$ ，

$\therefore 4$ ， 5 ， 6 的最小公倍数是 $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ，

$60 + 3 = 63$ (个)，

答：这盒饼干最少有 63 个.

模块二

【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

一、填空题

26. 两个数的最大公因数是 21，最小公倍数是 252，则这两个数的和是_____.

【答案】273 或 147

【解析】

【分析】本题考查了最大公因数、最小公倍数的性质的综合. 设两数为 $21a$ 和 $21b$ (a 、 b 互质)，最小公倍数为 $21ab = 252$ ，得到 $ab = 12$ ，找互质的 a 、 b 组合再计算两种组合的和即可.

【详解】解：设两个数为 $21a$ 和 $21b$ (a 、 b 互质)，

$\therefore$ 最小公倍数关系： $21ab = 252$ ，

$\therefore ab = 12$ ， a 、 b 互质组合为 $(1, 12)$ 或 $(3, 4)$ ，

$\therefore$ 两数之和为 $21 \times (1 + 12) = 273$ 或 $21 \times (3 + 4) = 147$ ，

即这两个数的和是 273 或 147.

故答案为: 273 或 147.

27. (因数) x 是一个恰好有 8 个因数 (包括 1 及本身) 的正整数, 已知 35 和 77 为 x 的其中两个因数, 则 $x =$ _____.

【答案】 385

【解析】

【分析】 本题考查了因数, 熟练掌握因数的求法是解题关键. 根据 $35 = 5 \times 7$, $77 = 7 \times 11$ 可得这个数必有质因数 5, 7, 11, 再根据 x 是一个恰好有 8 个因数 (包括 1 及本身) 的正整数可得 $x = 5 \times 7 \times 11$, 由此即可得.

【详解】 解: $35 = 5 \times 7$, $77 = 7 \times 11$,

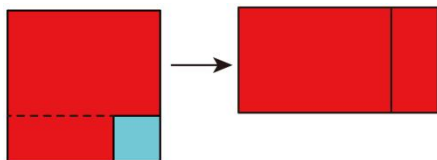
所以这个数必有质因数 5, 7, 11,

因为 x 是一个恰好有 8 个因数 (包括 1 及本身) 的正整数,

所以 $x = 5 \times 7 \times 11 = 385$, 其恰好有 1, 5, 7, 11, 35, 55, 77, 385 这 8 个因数,

故答案为: 385.

28. 如图, 在一个大正方形的一个角上剪去一个小正方形, 剩余部分剪拼出一个长方形, 由此可以得到一个结论. 根据这个结论解决下面的问题: 若两个自然数的平方的差为 2023, 则这两个自然数的乘积最小为 _____.



【答案】 3468

【解析】

【分析】 本题主要考查了平方差公式, 解二元一次方程组, 根据图形面积之间的关系可证明

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, 设自然数 m 与自然数 n 的平方差为 2023, 则 $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = 2023$,

根据 $2023 = 1 \times 2023 = 7 \times 289 = 17 \times 119$, 得到 $\begin{cases} m+n=2023 \\ m-n=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m+n=289 \\ m-n=7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m+n=119 \\ m-n=17 \end{cases}$, 解方程

组求出 m 、 n 的值, 进而求出对应的 mn 的值即可得到答案.

【详解】 解: 设大正方形的边长为 a , 小正方形的边长为 b ,

则左边那幅图中红色部分的面积为 $a^2 - b^2$, 右边那幅图中红色部分的面积为 $(a+b)(a-b)$,

因为两幅图中红色部分的面积相等,

$$\text{所以 } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

设自然数 m 与自然数 n 的平方差为 2023,

$$\text{所以 } m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = 2023,$$

因为 m 、 n 都是自然数,

所以 $m+n$, $m-n$ 都是自然数,

$$\text{所以 } 2023 = 1 \times 2023 = 7 \times 289 = 17 \times 119,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} m+n=2023 \\ m-n=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m+n=289 \\ m-n=7 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m+n=119 \\ m-n=17 \end{cases},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} m=1012 \\ n=1011 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m=148 \\ n=141 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m=68 \\ n=51 \end{cases},$$

$$\text{所以 } mn = 1012 \times 1011 = 1023132 \text{ 或 } mn = 148 \times 141 = 20868 \text{ 或 } mn = 68 \times 51 = 3468,$$

$$\text{因为 } 3468 < 20868 < 1023132,$$

所以 mn 的最小值为 3468,

故答案为: 3468.

29. 我们知道, 任意一个正整数 n 都可以进行这样的分解: $n = p \times q$ (p 、 q 是正整数, 且 $p \leq q$), 在 n

的所有这种分解中, 如果 $q-p$ 最小, 我们就称 $p \times q$ 是 n 的最优分解, 并规定在最优分解时, $F(n) = \frac{p}{q}$ (例

$$\text{如: } 18 \text{ 的最优分解是 } 3 \times 6, F(18) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2})$$

$$(1) F(24) = \underline{\hspace{2cm}}, F(16) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) \text{ 若 } F(a) = \frac{5}{6}, \text{ 且 } a \text{ 为 } 300 \text{ 以内的正整数, 求 } a \text{ 的值.}$$

【答案】 (1) $\frac{2}{3}$, 1

(2) 30, 120 或 270

【解析】

【分析】 本题考查新定义运算, 分解质因数, 理解新定义是解题的关键.

(1) 根据定义求解即可;

(2) 设 $a = 5m \times 6m = 30m^2$, 根据 a 为 300 以内的正整数, 求出 m 可能取的数, 即可求解.

【小问 1 详解】

解：24 的最优分解为 4×6 ， $F(24) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，

16 的最优分解为 4×4 ， $F(16) = \frac{4}{4} = 1$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}$ ，1；

【小问 2 详解】

解：因为 $F(a) = \frac{5}{6}$ ，

所以设 $a = 5m \times 6m = 30m^2$ ， m 为正整数，

因为 a 为 300 以内的正整数，

所以 $30m^2 \leq 300$ ，

所以 $m^2 \leq 10$ ，

所以 m 为 1 或 2 或 3，

当 $m = 1$ 时， $a = 30 \times 1^2 = 30$ ；

当 $m = 2$ 时， $a = 30 \times 2^2 = 120$ ；

当 $m = 3$ 时， $a = 30 \times 3^2 = 270$ ；

综上所述， a 的值为 30，120 或 270.

二、阅读理解题

30. 阅读下面材料，并解答问题.

辗转相除法 是求两个正整数的最大公约数的算法，又叫欧几里得算法，下面具体讲解.

对于给定的两个正整数，用较大的数除以较小的数，若余数为零，则较小的数即为两数的最大公约数；若余数不为零，则将除数与余数构成新的一对数，继续上面的除法，直到大数被小数除尽，这时的较小的数即为原来两个数的最大公约数.

举例：利用辗转相除法求 228 与 1995 的最大公约数.

解析： $\because 1995 \div 228 = 8 \cdots 171$ ， $228 \div 171 = 1 \cdots 57$ ， $171 \div 57 = 3$

$\therefore$ 228 与 1995 的最大公约数为 57.

请你解决如下问题：求 1734，816，1343 的最大公约数.

【答案】17

【解析】

【分析】本题考查最大公约数和整除问题，理解辗转相除法是解答的关键. 仿照例子求解过程，先求得 1734

与 816 的最大公约数是 102，再求 102 与 1343 的最大公约数即可求解.

【详解】解： $\because 1734 \div 816 = 2 \cdots 102$ ， $816 \div 102 = 8$ ，

$\therefore 1734$ 与 816 的最大公约数是 102，

$\because 1343 \div 102 = 13 \cdots 17$ ， $102 \div 17 = 6$ ，

$\therefore 102$ 与 1343 的最大公约数是 17，

$\therefore 1734$ ， 816 ， 1343 的最大公约数是 17.

31. 材料 1：一个三位自然数 $\overline{abc}$ ，若百位上的数字与十位上的数字之积减去百位上的数字与十位上的数字之和所得之差，恰好等于个位上的数字，即 $ab - (a + b) = c$ ，则称这个三位数为“2020”数，（例如：自然数 231，因为数字 2，3，1 满足： $2 \times 3 - (2 + 3) = 1$ ，所以 231 是“2020”数.）

材料 2：若一个整数各个数位上的数字之和能被 9 整除，则这个整数一定能被 9 整除，例如三位数 108 的各个数位上的数字和为： $1 + 0 + 8 = 9$ ， $9 \div 9 = 1$ ，所以 108 一定能被 9 整除.

(1) 阅读材料 1，请判断 725 是否为“2020”数，并说明理由.

(2) 根据材料 1 和 2，求所有小于 600 且能被 9 整除的“2020”数.

【答案】(1) 是，理由见解析

(2) 297、333、369

【解析】

【分析】本题考查了新运算的应用，明确“2020”数的定义以及能被 9 整除的数的特征是解答本题的关键.

(1) 根据“2020”数的特征，百位上的数字与十位上的数字之积减去百位上的数字与十位上的数字之和所得之差，据此判断即可；

(2) 根据能被 9 整除的数的特征可知，三位数数位数字之和能被 9 整除该数即可能被 9 整除，即三位数如果能被 9 整除，则数位数字之和为 27、18、9，而题干要求小于 600 且能被 9 整除的“2020”数. 考虑 999 的数位数字之和是 27，而 $999 > 600$ ，故只需考虑数位数字和为 18 和 9 即可，然后结合“2020”数的特征分情况讨论计算即可求出所有小于 600 且能被 9 整除的“2020”数.

【小问 1 详解】

解：725 是“2020”数，理由如下：

$$7 \times 2 - (7 + 2) = 14 - 9 = 5,$$

所以 725 是“2020”数.

【小问 2 详解】

由题可知，若一个整数各个数位上的数字之和能够被 9 整除，则这个整数一定能够被 9 整除，

因为最大的三位自然数为 999，三个数位数字和是 27，且三位自然数要小于 600，

所以三位自然数的数位数字和不可能得到 27，

所以小于 27 且是 9 的倍数的数位数字之和有 18 和 9，

设这个三位自然数是 $\overline{abc}$ ，

第一种情况：三位自然数数位数字之和为 18 且三位自然数要小于 600，所以百位的数字最大为 5。

当 $a=5$ 时，根据三位数符合“2020”数的特征，则：

$$\begin{cases} 5b - (5 + b) = c \\ 5 + b + c = 18 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b = \frac{18}{5} \\ c = \frac{47}{5} \end{cases}$$

b 和 c 均为非整数解，显然不符合题意，

故 $a=5$ 且 $a+b+c=18$ 时，没有三位数符合“2020”数的特征；

当 $a=4$ 时，根据三位数符合“2020”数的特征，则：

$$\begin{cases} 4b - (4 + b) = c \\ 4 + b + c = 18 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b = \frac{9}{2} \\ c = \frac{19}{2} \end{cases}$$

b 和 c 均为非整数解，不符合题意，

故 $a=4$ 且 $a+b+c=18$ 时，没有三位数符合“2020”数的特征；

当 $a=3$ 时，根据三位数符合“2020”数的特征，则：

$$\begin{cases} 3b - (3 + b) = c \\ 3 + b + c = 18 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$$

即该数是 369，符合“2020”数的特征，

故 $a=3$ 且 $a+b+c=18$ 时，三位数 369 符合“2020”数的特征；

当 $a=2$ 时，根据三位数符合“2020”数的特征，则：

$$\begin{cases} 2b - (2 + b) = c \\ 2 + b + c = 18 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b = 9 \\ c = 7 \end{cases}$$

即该数是 297，符合“2020”数的特征，

故 $a=2$ 且 $a+b+c=18$ 时，三位数 297 符合“2020”数的特征；

当 $a=1$ 时，根据三位数符合“2020”数的特征，则：

$$\begin{cases} b-(1+b)=c \\ 1+b+c=18 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b=18 \\ c=-1 \end{cases}$$

显然 $c=-1$ 不符合题意,

故 $a=1$ 且 $a+b+c=18$ 时, 没有三位数符合“2020”数的特征.

第二种情况: 三位自然数数位数字之和为9且三位自然数要小于600, 所以百位的数字最大为5.

当 $a=5$ 时, 根据三位数符合“2020”数的特征, 则:

$$\begin{cases} 5b-(5+b)=c \\ 5+b+c=9 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b=\frac{9}{5} \\ c=\frac{11}{5} \end{cases}$$

b 和 c 均为非整数解, 显然不符合题意,

故 $a=5$ 且 $a+b+c=9$ 时, 没有三位数符合“2020”数的特征;

当 $a=4$ 时, 根据三位数符合“2020”数的特征, 则:

$$\begin{cases} 4b-(4+b)=c \\ 4+b+c=9 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b=\frac{9}{4} \\ c=\frac{11}{4} \end{cases}$$

b 和 c 均为非整数解, 显然不符合题意,

故 $a=4$ 且 $a+b+c=9$ 时, 没有三位数符合“2020”数的特征;

当 $a=3$ 时, 根据三位数符合“2020”数的特征, 则:

$$\begin{cases} 3b-(3+b)=c \\ 3+b+c=9 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b=3 \\ c=3 \end{cases}$$

即该数是333, 符合“2020”数的特征,

故 $a=3$ 且 $a+b+c=9$ 时, 三位数333符合“2020”数的特征;

当 $a=2$ 时, 根据三位数符合“2020”数的特征, 则:

$$\begin{cases} 2b-(2+b)=c \\ 2+b+c=9 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b=\frac{9}{2} \\ c=\frac{5}{2} \end{cases}$$

b 和 c 均为非整数解, 显然不符合题意,

故 $a=2$ 且 $a+b+c=9$ 时, 没有三位数符合“2020”数的特征;

当 $a=1$ 时, 根据三位数符合“2020”数的特征, 则:

$$\begin{cases} b-(1+b)=c \\ 1+b+c=9 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b=9 \\ c=-1 \end{cases}$$

显然 $c=-1$ 不符合题意,

故 $a=1$ 且 $a+b+c=9$ 时, 没有三位数符合 “2020” 数的特征;

综上, 297、333、369 是小于 600 且能被 9 整除的 “2020” 数.

答: 所有小于 600 且能被 9 整除的 “2020” 数有 297、333、369.