

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查了有理数的乘法，解题关键是熟练掌握有理数的乘法法则.

根据有理数的乘法法则解题即可.

【详解】解：A：观察已知条件中的4个算式可知：两个有理数相乘时，同号得正，异号得负，故此选项不符合题意；

B：观察算式可知：没有两个有理数相乘时交换乘数的位置的算式，故此选项符合题意；

C：观察算式得到两个有理数相乘时，积的绝对值等于各乘数绝对值的积，故此选项不符合题意；

D：观察 $2 \times 4 = 8$ ， $2 \times (-4) = -8$ 可得两个有理数相乘时，其中一个乘数换成它的相反数，所得的积是原来积的相反数，故此选项不符合题意；

故选：B.

3. 用一张纸对折1次可以裁成2张，对折2次可以裁成4张，对折3次可以裁成几张？下列算式不能用来表示对折3次可以裁成的张数的是（ ）

A. $2 \times 2 \times 2 = 8$ ；

B. $1 \times 2 = 2$ ， $2 \times 2 = 4$ ， $4 \times 2 = 8$ ；

C. $1 + 1 = 2$ ， $2 + 2 = 4$ ， $4 + 4 = 8$ ；

D. $2 + 2 = 4$ ， $4 + 2 = 6$ ， $6 + 2 = 8$.

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查了有理数加法和乘法的应用，理解题意，根据题意列出算式是解题的关键. 根据题意，对选项逐个分析判断即可解答.

【详解】解：A、 $2 \times 2 \times 2 = 8$ ，可以用来表示对折3次可以裁成的张数，故此选项不符合题意；

B、 $1 \times 2 = 2$ ， $2 \times 2 = 4$ ， $4 \times 2 = 8$ ，可以用来表示对折3次可以裁成的张数，故此选项不符合题意；

C、 $1 + 1 = 2$ ， $2 + 2 = 4$ ， $4 + 4 = 8$ ，可以用来表示对折3次可以裁成的张数，故此选项不符合题意；

D、 $2 + 2 = 4$ ， $4 + 2 = 6$ ， $6 + 2 = 8$ ，不能用来表示对折3次可以裁成的张数，故此选项符合题意；

故选：D.

4. 小胖、小丽、小明、小帅在解方程“ $-2x = \frac{1}{2} - x$ ”时都得到“ $-2x + x = \frac{1}{2}$ ”，小胖依据的是“被减数等于差加上减数”，小丽依据的是“等号两边同时加上同一个数”，小明依据的是“等号两边同时乘以或除以同一个数”，小帅依据的是“移项法则”，算理错误的同学是（ ）

A. 小胖；

B. 小丽；

C. 小明；

D. 小帅.

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次方程、等式的性质，熟练掌握解一元一次方程的方法和等式的性质是解题

的关键.

根据等式的性质和解一元一次方程的方法解答即可.

【详解】解: 根据题意可知, 等号两边同时乘以一个数或除以同一个不为 0 的数, 无法得到条件中方程的变形结果, 所以算理错误的同学是小明.

故选: C.

5. 关于 m 的方程 $2m + x = 1$ 解为 3, 那么 x 的值为 ()

- A. -5 B. -1 C. 3 D. 5

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元一次方程, 一元一次方程的解的定义, 一元一次方程的解是使方程左右两边相等的未知数的值, 据此把 $m = 3$ 代入方程 $2m + x = 1$ 中求出 x 的值即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 关于 m 的方程 $2m + x = 1$ 解为 3,

$$\therefore 2 \times 3 + x = 1,$$

$$\therefore x = -5,$$

故选: A.

6. 下列说法错误的是 ()

- A. 将一条线段分成两条相等的线段的点叫做这条线段的中点;
B. 如果一个角等于它的余角, 那么这个角和它的补角也相等;
C. 如果两个角的余角相等, 那么这两个角的补角也相等;
D. 经过一个角的顶点且把这个角分成两个相等的角的射线, 叫做这个角的角平分线.

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了线段中点、余角、补角、角平分线的定义, 熟练掌握以上知识点是解题的关键. 根据线段中点、余角、补角、角平分线的定义, 对选项逐个分析判断即可.

【详解】解: A、将一条线段分成两条相等的线段的点叫做这条线段的中点, 故此选项说法正确, 不符合题意;

B、如果一个角等于它的余角, 那么这个角是 $90^\circ \div 2 = 45^\circ$, 它的补角是 $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, 所以这个角和它的补角不相等, 故此选项说法错误, 符合题意;

C、如果两个角的余角相等, 那么这两个角的补角也相等, 故此选项说法正确, 不符合题意;

D、经过一个角的顶点且把这个角分成两个相等的角的射线, 叫做这个角的角平分线, 故此选项说法正确,

不符合题意;

故选: B.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. $\frac{1}{6} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{1}{8}$ 或 -0.125

【解析】

【分析】 本题主要考查了有理数的乘法计算, 直接根据有理数乘法计算法则求解即可.

【详解】 解: $\frac{1}{6} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{8},$

故答案为: $-\frac{1}{8}.$

8. $1\frac{1}{4}$ 的倒数减去 1 的相反数的差是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{9}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了有理数的减法计算, 相反数和倒数的定义, 乘积为 1 的两个数互为倒数, 只有符号不同的两个数互为相反数, 据此求出 $1\frac{1}{4}$ 的倒数和 1 的相反数, 再相减即可得到答案.

【详解】 解: $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ 的倒数为 $\frac{4}{5},$

$\therefore 1\frac{1}{4}$ 的倒数减去 1 的相反数的差是 $\frac{4}{5} - (-1) = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5},$

故答案为: $\frac{9}{5}.$

9. $7 + \left(-\frac{4}{7}\right) - \left(-\frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{1}{7}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查了有理数的加减混合运算, 熟练掌握有理数的加减运算法则是解题的关键. 根据有理数的加减运算法则计算即可.

【详解】 解: $7 + \left(-\frac{4}{7}\right) - \left(-\frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{1}{7}\right)$

$$= 7 - \frac{4}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7}$$

$$= 7.$$

故答案为：7.

10. 方程 $-4x + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$ 的解为_____.

【答案】 $x = \frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次方程，按照移项，合并同类项，系数化为1的步骤解方程即可得到答案.

【详解】 解： $-4x + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$

移项得： $-4x - x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$,

合并同类项得： $-5x = -1$,

系数化为1得： $x = \frac{1}{5}$,

故答案为： $x = \frac{1}{5}$.

11. 计算： $40^{\circ}16' + 34^{\circ}48' =$ _____ (结果用度、分、秒表示).

【答案】 $75^{\circ}4'$

【解析】

【分析】 本题主要考查了角的四则运算，直接根据角的四则运算法则求解即可

【详解】 解： $40^{\circ}16' + 34^{\circ}48' = 74^{\circ}64' = 75^{\circ}4'$,

故答案为： $75^{\circ}4'$.

12. a 是最小的正整数， b 是最大的负整数， c 是绝对值最小的有理数，那么 $a - b + c$ 的为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了有理数的分类、有理数的加减运算，熟练掌握以上知识点是解题的关键. 由题意先求出 a 、 b 、 c 的值，再根据有理数的加减运算法则即可解答.

【详解】 解： $\because a$ 是最小的正整数， b 是最大的负整数， c 是绝对值最小的有理数，

$$\therefore a = 1, \quad b = -1, \quad c = 0,$$

$$\therefore a - b + c = 1 - (-1) + 0 = 2.$$

故答案为：2.

13. 一台电脑原价 a 元 ($4000 < a < 5000$), 先参加双十一活动满 4000 减 500, 再享受政府补贴降价 $\frac{1}{5}$, 那么这台电脑的实际售价为_____元 (用含有 a 的代数式表示).

【答案】 $\left(\frac{4}{5}a - 400\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了列代数式, 理解题意, 正确列出代数式是解题的关键. 由题意得, 这台电脑的实际售价 = (原价 - 500) $\times \frac{4}{5}$, 即可解答.

【详解】 解: 由题意得, 这台电脑的实际售价为 $\frac{4}{5}(a - 500) = \frac{4}{5}a - 400$.

故答案为: $\left(\frac{4}{5}a - 400\right)$.

14. 某阅览室二楼的座位比一楼的座位少 84 个, 且一楼的座位比二楼的座位的 3 倍还多 20 个, 设阅览室二楼座位数 x 个, 那么可以列出一元一次方程是_____.

【答案】 $x + 84 = 3x + 20$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元一次方程的实际应用, 设阅览室二楼座位数 x 个, 根据二楼的座位比一楼的座位少 84 个可知一楼的座位有 $(x + 84)$, 根据一楼的座位比二楼的座位的 3 倍还多 20 个可知一楼的座位有 $(3x + 20)$, 据此建立方程即可.

【详解】 解: 由题意得, $x + 84 = 3x + 20$,

故答案为: $x + 84 = 3x + 20$.

15. 如果一个一次式与 $3x + 2$ 的和是 $5x - 3$, 那么这个一次式是_____.

【答案】 $2x - 5$

【解析】

【分析】 本题考查了去括号、合并同类项, 熟练掌握去括号、合并同类项的运算法则是解题的关键. 设这个一次式是 A , 由题意得 $A + 3x + 2 = 5x - 3$, 求出 A 表示的式子即可解答.

【详解】 解: 设这个一次式是 A ,

由题意得, $A + 3x + 2 = 5x - 3$,

$$\therefore A = 5x - 3 - (3x + 2) = 5x - 3 - 3x - 2 = 2x - 5,$$

$\therefore$ 这个一次式是 $2x - 5$.

故答案为： $2x-5$.

16. 关于 x 的方程 $(k+3)x^{k-2}+3=0$ 是一元一次方程，那么这个方程的解为_____.

【答案】 $x=-\frac{1}{2}$ ## $x=-0.5$

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次方程的定义、解一元一次方程，熟练掌握一元一次方程的定义是解题的关键. 根据一元一次方程的定义求出 k 的值，再代入 k 的值解方程求出 x 的值即可.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的方程 $(k+3)x^{k-2}+3=0$ 是一元一次方程，

$$\therefore k-2=1, \quad k+3 \neq 0,$$

$$\therefore k=3,$$

代入 $k=3$ 得， $6x+3=0$ ，

解得： $x=-\frac{1}{2}$.

故答案为： $x=-\frac{1}{2}$.

17. 下面是乐乐家 10 月的全部收支情况，妈妈领工资 8100 元，缴纳水电煤共 280.8 元，为乐乐买衣服用去了 120 元，全家去游乐场用去了 600 元，爸爸领工资 10300 元，妈妈买衣服用去 230 元，爸爸加油用去 1200 元，还房贷用去 3500 元，为爷爷过生日用去 2300 元，本月伙食费合计用去 2699.2 元，那么小闵家本月的结余为_____元.

【答案】 7470

【解析】

【分析】 本题主要考查了有理数加减法的实际应用，用小闵爸妈的工资和减去所有支出即可得到答案.

【详解】 解： $8100+10300-280.8-120-600-230-1200-3500-2300-2699.2=7470$ 元，

$\therefore$ 小闵家本月的结余为 7470 元，

故答案为： 7470 .

18. 在新年联欢会上，小明和小亮表演了一个扑克牌游戏：小明背对着小亮，让小亮把一副扑克牌按下列四个步骤操作：

第一步，把部分扑克牌分发为左、中、右三堆，每堆不少于 2 张牌，且各堆牌的张数相同；

第二步，从左边一堆中拿出两张，放入中间一堆；

第三步，从右边一堆中拿出一张，放入中间一堆；

第四步，从中间一堆中拿出与左边一堆张数相等的牌放入左边一堆.

这时小明准确说出了中间一堆牌现有的张数，这个张数是_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 此题考查了整式的加减，涉及的知识有：去括号法则，以及合并同类项法则，弄清题意是解本题的关键.

根据题中的步骤，即可得到第四步中间一堆牌此时的张数.

【详解】 解：用字母 $n(n \geq 2)$ 表示第一步中每堆牌的张数，

则第二步后左，中，右三堆牌的张数分别为 $n-2$ 、 $n+2$ 、 n ；

第三步后左，中，右三堆牌的张数分别为 $n-2$ 、 $n+3$ 、 $n-1$ ；

第四步后左，中，右三堆牌的张数分别为 $2(n-2)$ 、 $(n+3)-(n-2)$ 、 $n-1$ ；

此时，中间一堆牌的张数为 $(n+3)-(n-2)=n+3-n+2=5$ （张），

故答案为：5.

三、计算题，要求有计算过程（本大题共 5 题，每题 4 分，满分 20 分）

19. 计算： $\left(-\frac{3}{2}\right) \div \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$

【答案】 $\frac{27}{8}$

【解析】

【分析】 本题考查了有理数的乘除混合运算，熟练掌握有理数的乘除运算法则是解题的关键. 根据有理数的乘除运算法则计算即可.

【详解】 解： $\left(-\frac{3}{2}\right) \div \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$$
$$= \frac{27}{8}.$$

20. 计算： $|2.1-5.3|-(-0.875)-\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-2\frac{1}{10}\right).$

【答案】 2.1

【解析】

【分析】 本题主要考查了含乘方的有理数混合计算，先计算乘方和绝对值，再计算加减法即可得到答案.

【详解】解： $|2.1-5.3|-(-0.875)-\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-2\frac{1}{10}\right)$

$$=|-3.2|+\frac{7}{8}-\left(-\frac{1}{8}\right)-2\frac{1}{10}$$

$$=3.2+\frac{7}{8}+\frac{1}{8}-2.1$$

$$=3.2+1-2.1$$

$$=2.1.$$

21. 解方程： $4\left(x+\frac{1}{2}\right)+9=5-3(x-1).$

【答案】 $x=-\frac{3}{7}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次方程，按照去括号，移项，合并同类项，系数化为1的步骤解方程即可.

【详解】解： $4\left(x+\frac{1}{2}\right)+9=5-3(x-1)$

去括号得： $4x+2+9=5-3x+3,$

移项得： $4x+3x=5+3-2-9,$

合并同类项得： $7x=-3,$

系数化为1得： $x=-\frac{3}{7}.$

22. 解方程： $5-\frac{10x+10}{3}=\frac{5x}{2}.$

【答案】 $x=\frac{2}{7}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次方程，按照去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为1的步骤解方程即可.

【详解】解： $5-\frac{10x+10}{3}=\frac{5x}{2}$

去分母得： $30-2(10x+10)=15x,$

去括号得： $30-20x-20=15x,$

移项得： $-20x-15x=-30+20,$

合并同类项得: $-35x = -10$,

系数化为 1 得: $x = \frac{2}{7}$.

23. 先化简, 再求值: $-5x - 2y - \frac{1}{2}(y - 3x + 3)$. 其中 $x = -1$, $y = 1$.

【答案】 $-\frac{7}{2}x - \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$

【解析】

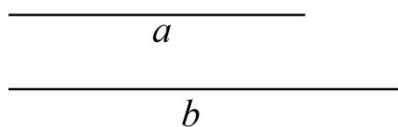
【分析】 本题主要考查了整式的化简求值, 先去括号, 然后合并同类项化简, 最后代值计算即可得到答案.

【详解】 解: $-5x - 2y - \frac{1}{2}(y - 3x + 3)$
 $= -5x - 2y - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$
 $= -\frac{7}{2}x - \frac{5}{2}y - \frac{3}{2},$

当 $x = -1$, $y = 1$ 时, 原式 $= -\frac{7}{2} \times (-1) - \frac{5}{2} \times 1 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

四、简答题 (本大题共 5 题, 满分 44 分)

24. 如图, 已知线段 a 和线段 b .



(1) 用无刻度直尺和圆规画线段 AB , 使 $AB = 2a - b$; (保留作图痕迹, 不用写作图步骤)

(2) 如果点 M 是线段 AB 的中点, $a = 2.5$, $BM = 0.5$, 求线段 b 的长度.

【答案】 (1) 见解析 (2) 4

【解析】

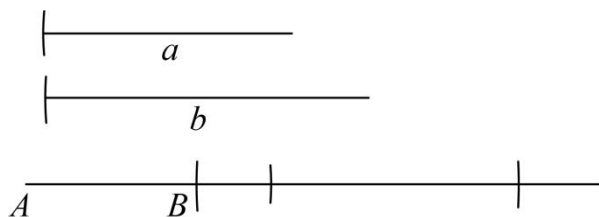
【分析】 本题主要考查了线段的和差计算, 线段的尺规作图:

(1) 根据线段的尺规作图方法结合题意作图即可;

(2) 先由线段中点的性质得到 AB 的长, 再根据 $AB = 2a - b$ 计算求解即可.

【小问 1 详解】

解: 如图所示, 即为所求;



【小问 2 详解】

解: $\because$ 点 M 是线段 AB 的中点, $BM = 0.5$,

$$\therefore AB = 2BM = 1,$$

$$\therefore AB = 2a - b,$$

$$\therefore b = 2a - AB = 2 \times 2.5 - 1 = 4.$$

25. 某汽车企业第一季度销售 x 万辆新能源汽车, 第二季度销售的新能源汽车比第一季度的 1.5 倍少 1 万辆, 第三季度销售的新能源汽车比第一季度的 2 倍多 6 万辆.

(1) 求该汽车企业前三季度一共销售的新能源汽车的数量 (用含有 x 的代数式表示);

(2) 如果该汽车企业第三季度比第二季度多销售 10.5 万辆新能源汽车, 求该企业前三季度销售的新能源汽车数量.

【答案】 (1) $(4.5x + 5)$ 万辆

(2) 36.5 万辆

【解析】

【分析】 本题考查了列代数式、一元一次方程的应用, 理解题意, 正确列出代数式是解题的关键.

(1) 根据题意得出第二、第三季度销售的新能源汽车数量, 再将前三季度的数量相加即可;

(2) 根据第三季度比第二季度多销售 10.5 万辆新能源汽车, 列出方程求出 x 的值, 再代入 (1) 中的代数式即可解答.

【小问 1 详解】

解: 由题意得, 第二季度销售的新能源汽车数量为 $(1.5x - 1)$ 万辆, 第三季度销售的新能源汽车数量为 $(2x + 6)$ 万辆,

$\therefore$ 前三季度一共销售的新能源汽车的数量为 $x + 1.5x - 1 + 2x + 6 = (4.5x + 5)$ 万辆.

答: 该汽车企业前三季度一共销售的新能源汽车的数量为 $(4.5x + 5)$ 万辆.

【小问 2 详解】

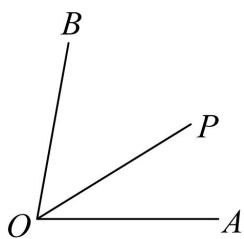
解: 由题意得, $2x + 6 - (1.5x - 1) = 10.5$,

解得: $x = 7$,

代入 $x = 7$, 则 $4.5x + 5 = 4.5 \times 7 + 5 = 36.5$,

答: 该企业前三季度销售的新能源汽车数量为 36.5 万辆.

26. 如图, 已知 $\angle AOB = 80^\circ$, OP 是 $\angle AOB$ 内部的一条射线, $\angle BOP = \frac{3}{2} \angle AOP$.



- (1) 求 $\angle AOP$ 的度数;
 (2) 画出 $\angle AOB$ 的角平分线 OM , 并求 $\angle MOP$ 的度数.

【答案】 (1) $\angle AOP = 32^\circ$

(2) 见解析, $\angle MOP = 8^\circ$

【解析】

【分析】 本题考查了角的运算、角平分线的定义、一元一次方程的应用, 熟练掌握角的运算是解题的关键.

(1) 由 $\angle BOP = \frac{3}{2} \angle AOP$, 设 $\angle AOP = 2\alpha$, 则 $\angle BOP = 3\alpha$, 利用 $\angle AOP + \angle BOP = \angle AOB$ 解方程求出 α 的值, 即可得到 $\angle AOP$ 的度数;

(2) 根据角平分线的定义, 先画出 $\angle AOB$ 的角平分线 OM , 以及 $\angle AOM = \frac{1}{2} \angle AOB = 40^\circ$, 再利用角的和差即可得到 $\angle MOP$ 的度数.

【小问 1 详解】

解: $\because \angle BOP = \frac{3}{2} \angle AOP$,

$\therefore$ 设 $\angle AOP = 2\alpha$, 则 $\angle BOP = 3\alpha$,

$\because \angle AOP + \angle BOP = \angle AOB$,

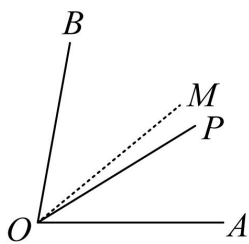
$\therefore 2\alpha + 3\alpha = 80^\circ$,

解得: $\alpha = 16^\circ$,

$\therefore \angle AOP = 2\alpha = 2 \times 16^\circ = 32^\circ$.

【小问 2 详解】

解: 如图所示, $\angle AOB$ 的角平分线 OM 即为所求:



$\because OM$ 是 $\angle AOB$ 的角平分线,

$$\therefore \angle AOM = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ,$$

由 (1) 得, $\angle AOP = 32^\circ$,

$$\therefore \angle MOP = \angle AOM - \angle AOP = 40^\circ - 32^\circ = 8^\circ.$$

27. 希腊数学家丢番图的墓碑上记载着:

“他生命的六分之一, 两鬓长起了细细的胡须; 再活了他生命的十二分之一, 两颊长起了细细的胡须; 又度过了一生的七分之一, 他结了婚; 再过五年, 他有了孩子, 感到很幸福; 可是孩子只活到了他父亲全部年龄的一半; 儿子死后, 他在极度悲痛中度过了四年, 也与世长辞了.”

(1) 求: 丢番图的寿命;

(2) 求: 丢番图开始当爸爸时的年龄.

【答案】 (1) 84 岁 (2) 38 岁

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元一次方程的实际应用, 有理数四则混合计算的实际应用:

(1) 设丢番图的寿命为 x 岁, 分别表示出丢番图一生中各个阶段的时间, 再根据这些时间段的和为丢番图的寿命建立方程求解即可;

(2) 根据 (1) 所求列式计算即可.

【小问 1 详解】

解: 设丢番图的寿命为 x 岁,

$$\text{由题意得, } x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4,$$

解得 $x = 84$,

答: 丢番图的寿命为 84 岁;

【小问 2 详解】

$$\text{解: } 84 \times \frac{1}{6} + 84 \times \frac{1}{12} + 84 \times \frac{1}{7} + 5 = 14 + 7 + 12 + 5 = 38 \text{ 岁,}$$

答: 丢番图开始当爸爸时的年龄为 38 岁.

28. 数学课上老师提出了这样一个问题:

运动员小丽, 小明在 400 米长的环形跑道上练习长跑, 已知小丽的速度为 170 米/分, 小明的速度为 250 米/分.

(1) 如果两人同时由同一起点同向出发, 求两人第一次相遇的时间.

(2) 老师对这个问题进一步展开研究, 如果两人同时由同一起点同向出发, 他认为既然可以算出第一次相

遇的时间，那一定可以算出第二次，第三次……第 a 次 (a 为正整数) 相遇的时间.

①用含有 a 的代数式表示出两人第 a 次相遇的时间;

②当两人恰好在起点处相遇，求 a 满足的条件.

(3) 小闵认为类比老师的研究方法，如果两人同时由同一起点反向出发，可以得到两人在起点处相遇和两人相遇次数的规律. 请你找到这个规律，并说明理由.

【答案】 (1) 两人第一次相遇的时间为 5 分钟

(2) ① $5a$ 分钟; ② a 一定要是 8 的倍数

(3) 每经过 42 次相遇，两人相遇的地点为起点处，理由见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元一次方程的实际应用:

(1) 设两人第一次相遇的时间为 x 分钟，根据两人相遇时，小明比小丽多走 400 米列出方程求解即可;

(2) ①根据二人速度不变，可知每次相遇后，下一次相遇的时间都为 5 分钟，则可求出第 a 次相遇的时间;

②求出第 a 次相遇时两人的路程，再根据相遇点为起点，则路程一定要是 400 的倍数，据此求解即可;

(3) 根据两人相遇时，小明和小丽的路程之和为 400 米列出方程求出每次相遇后，下一次相遇的时间，进而求出第 n 次相遇时，两人的路程，再根据相遇点为起点，则路程一定要是 400 的倍数，据此求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设两人第一次相遇的时间为 x 分钟,

由题意得, $250x - 170x = 400$,

解得 $x = 5$,

答: 两人第一次相遇的时间为 5 分钟;

【小问 2 详解】

解: ①由 (1) 可知出发 5 分钟时，两人第一次相遇，即出发 5 分钟小明比小丽多走 400 米，则第二次相遇时，小明比小丽多走 800 米，第三次相遇时，小明比小丽多走 1200 米，……第 a 次 (a 为正整数) 相遇，小明比小丽多走 $400a$ 米，

$\therefore$ 两人第 a 次相遇的时间 $5a$ 分钟;

②由 (2) 7①可知，两人第 a 次相遇的时间的时间为 $5a$ 分钟，

$\therefore$ 两人第 a 次相遇的时间为 $5a$ 分钟，

$\therefore$ 两人第 a 次相遇时，小明的路程为 $5a \cdot 250 = 1250a$ 米，小丽的路程为 $5a \cdot 170 = 850a$ 米，

$\therefore$ 两人恰好在起点处相遇，

$\therefore$ 小明和小丽所走的路程都要为 400 的整数倍，

$\therefore 1250a, 850a$ 都能被 400 整除,

$$\therefore \frac{1250a}{400} = \frac{25}{8}a, \quad \frac{850a}{400} = \frac{17}{8}a,$$

$\therefore \frac{25}{8}a$ 和 $\frac{17}{8}a$ 一定要是整数,

$\therefore a$ 一定要是 8 的倍数;

【小问 3 详解】

解: 每经过 42 次相遇, 两人相遇的地点为起点处, 理由如下:

设两人第一次相遇的时间为 y 分钟,

由题意得, $250y + 170y = 400$,

$$\text{解得 } y = \frac{20}{21},$$

$\therefore$ 两人第一次相遇的时间为 $\frac{20}{21}$ 分钟;

$\therefore$ 每一次相遇后到下一次相遇, 二者的路程之和都为 400 米,

$\therefore$ 每一次相遇后到下一次相遇的时间都为 $\frac{20}{21}$ 分钟;

$\therefore$ 第 n 次相遇的时间为 $\frac{20}{21}n$ 分钟,

$\therefore$ 第 n 次相遇时, 小明的路程为 $\frac{20}{21}n \cdot 250 = \frac{5000}{21}n$ 米, 小丽的路程为 $\frac{20}{21}n \cdot 170 = \frac{3400}{21}n$ 米,

$\therefore$ 两人恰好在起点处相遇,

$\therefore \frac{5000}{21}n$ 和 $\frac{3400}{21}n$ 是 400 的整倍数,

$$\therefore \frac{5000}{21 \times 400}n = \frac{25}{42}n, \quad \frac{3400}{21 \times 400}n = \frac{17}{42}n,$$

$\therefore \frac{25}{42}n, \frac{17}{42}n$ 都是整数,

$\therefore n$ 一定是 42 的倍数,

$\therefore$ 每经过 42 次相遇, 两人相遇的地点为起点处.