

2024 学年第一学期初一年级数学期中考试试卷

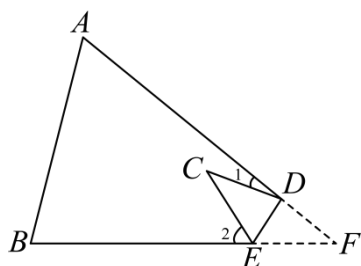
(科创班)

考试时间：90 分钟 满分：100 分

本场考试不允许使用计算器

一、填空题 (12 题, 每题 5 分, 共 60 分)

1. 如图, 在三角形纸片 ABC 中, $\angle A = 65^\circ$, $\angle B = 75^\circ$, 将纸片的一角折叠, 使点 C 落在 ABC 内, 若 $\angle 1 = 20^\circ$, 则 $\angle 2 =$ _____.



【答案】 60° ##60 度

【解析】

【分析】 本题主要是考查了三角形的内角和定理, 折叠的性质, 熟练掌握三角形的内角和定理是解题的关键.

根据已知条件求出 $\angle C$, 根据三角形内角和定理表示出 $\angle CDE + \angle CED = 140^\circ$, 然后根据折叠的性质及平角的定义得出 $\angle 1 + \angle 2$, 即可得出答案.

【详解】 解: $\because \angle A = 65^\circ$, $\angle B = 75^\circ$,

$$\therefore \angle C = 180^\circ - (65^\circ + 75^\circ) = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE + \angle CED = 180^\circ - \angle C = 140^\circ,$$

$\because$ 纸片的 $\angle C$ 沿 DE 折叠,

$$\therefore \angle EDF = \angle CDE, \quad \angle DEF = \angle CED,$$

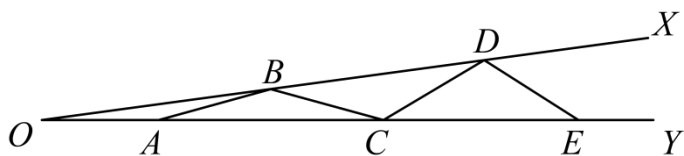
$$\therefore \angle CDE + \angle CED + \angle EDF + \angle DEF = 280^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 360^\circ - (\angle CDE + \angle CED + \angle EDF + \angle DEF) = 80^\circ,$$

$$\because \angle 1 = 20^\circ$$

$$\therefore \angle 2 = 60^\circ.$$

2. 如图, $OA = AB = BC = CD = DE$, 若 $\angle EDX = 40^\circ$, 则 $\angle XOY =$ _____.



【答案】 8° ## 8 度

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形的性质，三角形外角的性质，解题的关键是掌握：等边对等角，三角形的一个外角等于不相邻两内角的和。据此解答即可。

【详解】 解： 设 $\angle XOY = a$,

$$\because OA = AB = BC = CD = DE ,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle XOY = a ,$$

$$\therefore \angle BCA = \angle BAC = \angle ABO + \angle XOY = a + a = 2a ,$$

$$\therefore \angle CDB = \angle CBD = \angle BCA + \angle XOY = 2a + a = 3a ,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle DCE = \angle CDB + \angle XOY = 3a + a = 4a ,$$

$$\therefore \angle EDX = \angle DEC + \angle XOY = 4a + a = 5a ,$$

$$\because \angle EDX = 40^\circ ,$$

$$\therefore 5a = 40^\circ ,$$

$$\therefore \angle XOY = a = 8^\circ .$$

故答案为： 8° .

3. 已知 $A = 5^{1992} + \frac{3}{2} \times 5^{1991} + \frac{1}{2} \times 5^{1990} + 5$ 是一个整数，则 A 被 3 除所得的余数为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了数的整除与余数，熟练掌握余数的性质是解题的关键；

首先提取公因式，然后分析 5 的幂次除以 3 的余数规律，在根据余数的性质 $(a \times b) \div c$ ， $a \times b$ 除以 c 的余数等于 a 除以 c 的余数乘以 b 除以 c 的余数的积，除以 c 的余数，即可得出答案.

$$\text{【详解】 } A = 5^{1992} \times \frac{3}{2} + 5^{1991} \times \frac{1}{2} + 5^{1990} + 5$$

$$= 5^{1990} \left(5^2 \times \frac{3}{2} + 5 \times \frac{1}{2} + 1 + 5 \right)$$

$$= 5^{1990} \times 46$$

$$\because 5^1 = 5, \quad 5 \div 3 = 1 \quad 2, \text{ 余数是 } 2,$$

$5^2 = 25$, $25 \div 3 = 8 \cdots 1$, 余数是 1,

$5^3 = 125$, $125 \div 3 = 41 \cdots 2$, 余数是 2

$5^4 = 625$, $625 \div 3 = 208 \cdots 1$, 余数是 1.

$\therefore$ 可以发现 5 的幂次除以 3 的余数规律是: 指数为奇数时余数是 2, 指数为偶数时余数是 1.

$\therefore 5^{1990}$ 的余数是 1.

$46 \div 3 = 15 \cdots 1$, 余数是 1.

所以 $A = 5^{1990} \times 46$ 除以 3 的余数为 $(1 \times 1) \div 3$ 的余数, 即 1.

故答案为: 1.

4. 回文数是指按数字从前往后和从后往前读都相同的正整数, 则最小的能被 99 整除的五位回文数是 _____.

【答案】 59895

【解析】

【分析】 本题考查了整除, 有理数的概念, 理解整除和有理数的概念是解答读取关键.

设这个五位回文数为 $abcba$, 则这个数表示为 $10001a + 110b + c$, 表示出能被 9 和 11 整除的数, 再结合假设 $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ 从头开始寻找求解.

【详解】 解: 设这个五位回文数为 $abcba$,

则这个数表示为 $10001a + 110b + c$

因为 $99 = 9 \times 11$,

所以这个数必须能被 9 和 11 整除,

所以 $a + b + c + b + a = 2a + 2b + c$ 必须被 9 整除,

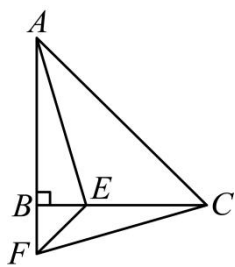
$a - b + c - b + a = 2a - 2b + c$ 必须被 11 整除.

假设 $a = 1$, $b = 0$, $c = 7$ 从头开始寻找,

最后找到最小的满足条件的五位回文数是 59895.

故答案为: 59895.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, F 为 AB 延长线上一点, 点 E 在 BC 上, $BE = BF$, 连结 AE , EF 和 CF , 此时, 若 $\angle CAE = 30^\circ$, 那么 $\angle EFC =$ _____.



【答案】 30°

【解析】

【详解】 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} BE = BF \\ \angle ABC = \angle CBF, \\ AB = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF$ (SAS),

$\therefore AB = BC, \angle ABC = 90^\circ, \angle CAE = 30^\circ,$

$\therefore \angle CAB = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ, \angle EAB = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF,$

$\therefore \angle EAB = \angle FCB = 15^\circ.$

$\therefore BE = BF, \angle EBF = 90^\circ,$

$\therefore \angle BFE = \angle FEB = 45^\circ.$

$\therefore \angle EFC = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ - 45^\circ = 30^\circ,$

故答案为 30° .

6. 质数 p 使得 $p^2 + 11$ 恰有 6 个不同的正约数, 则 $p =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查质数, 正约数, 根据质数的定义, 进行推导求解即可.

【详解】 解: $\because p$ 为质数,

$\therefore$ 当 $p = 2$ 时, $p^2 + 11 = 15,$

$\therefore 15 = 1 \times 15 = 3 \times 5,$

$\therefore p = 2$ 不符合题意;

当 $p = 3$ 时, $p^2 + 11 = 20,$

$\therefore 20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5,$

$\therefore p=3$ 符合题意;

当 p 为大于 3 的质数时, 不存在质数 p 使得 p^2+11 恰有 6 个不同的正约数,

故答案为: 3.

7. 一个等腰三角形一边上的高等于一边长度的一半, 则这个三角形的顶角是_____.

【答案】 30° 或 90° 或 150°

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质, 分类讨论是正确解答本题的关键;

分三种情况: 当三角形是直角三角形时, 底边上的高等于底边长度的一半; 当等腰三角形是锐角三角形时, 腰上的高等于腰长的一半; 当等腰三角形是钝角三角形时, 腰上的高等于腰长的一半, 分类讨论即可;

【详解】 解: 当三角形是直角三角形时, 底边上的高等于底边长度的一半,

设等腰三角形 ABC 中, $AB=AC$, AD 是底边上的高, BC 为底边, 且 $AD=\frac{1}{2}BC$.

$\because AD$ 是底边上的高,

$\therefore D$ 为 BC 中点, 即 $BD=\frac{1}{2}BC$, $\angle ADB=90^\circ$

$\because AD=\frac{1}{2}BC$,

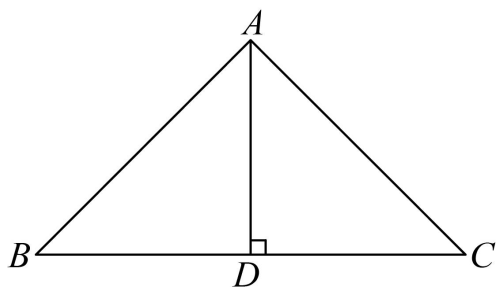
$\therefore BD=AD$,

$\therefore \angle B=\angle BAD=45^\circ$,

$\because AB=AC$,

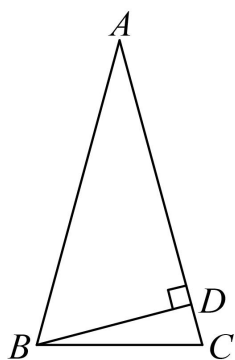
$\therefore \angle B=\angle C=45^\circ$

$\therefore$ 顶角 $\angle BAC=180^\circ-2\times 45^\circ=90^\circ$;



当等腰三角形是锐角三角形时, 腰上的高等于腰长的一半

设等腰三角形 ABC 中, $AB=AC$, BD 是腰 AC 上的高, $BD=\frac{1}{2}AB$,



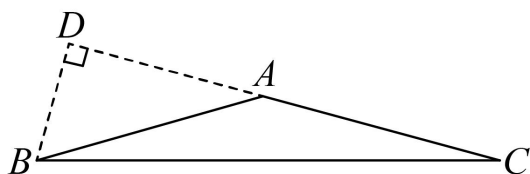
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

即此时顶角为 30° ;

当等腰三角形是钝角三角形时,



设等腰三角形 ABC 中, $AB = AC$, BD 是腰 CA 延长线上的高,,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABD \text{ 中, } BD = \frac{1}{2}AB$$

$$\therefore \angle DAB = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{顶角 } \angle BAC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ,$$

综上所述: 这个等腰三角形的顶角是 30° 或 90° 或 150° .

故答案为: 30° 或 90° 或 150° .

8. 记 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{23} = \frac{n}{23!}$, 则 n 被 13 除所得的余数为_____.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查了数的整除, 余数有理数的混合运算的知识, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

根据题意可得 $\frac{n}{13} = \frac{23!}{13} + \frac{23!}{2 \times 13} + \frac{23!}{3 \times 13} + \frac{23!}{12 \times 13} + \frac{23!}{13 \times 13} + \frac{23!}{14 \times 13} + \frac{23!}{23 \times 13}$, 故 n 被 13 除所得的余数

即为 $\frac{23!}{13 \times 13}$ 的余数, 然后进行计算求解即可.

【详解】 解: $\because 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{23} = \frac{n}{23!}$,

$$\therefore n = 23! + \frac{23!}{2} + \frac{23!}{3} + \dots + \frac{23!}{23},$$

$$\therefore \frac{n}{13} = \frac{23!}{13} + \frac{23!}{2 \times 13} + \frac{23!}{3 \times 13} + \dots + \frac{23!}{23 \times 13},$$

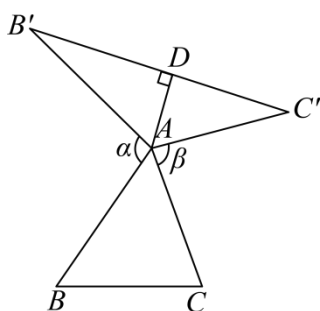
$\therefore n$ 被 13 除所得的余数即为 $\frac{23!}{13 \times 13}$ 的余数,

$$\therefore \frac{23!}{13 \times 13} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 12 \times 14 \times \dots \times 23}{13} = \frac{1988616672221921280000}{13} = 152970513247840098461 \dots 7,$$

$\therefore n$ 被 13 除所得的余数即为: 7

故答案为: 7

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 将 AB 绕点 A 顺时针旋转 α 至 AB' , 将 AC 绕点 A 逆时针旋转 β 至 AC' ($0^\circ < \alpha < 180^\circ, 0^\circ < \beta < 180^\circ$), 得到 $\triangle AB'C'$, 使 $\angle BAC + \angle B'AC' = 180^\circ$, 我们称 $\triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的“旋补三角形”, $\triangle AB'C'$ 的中线 AD 叫做 $\triangle ABC$ 的“旋补中线”, 点 A 叫做“旋补中心”. 下列结论正确的有_____.



- ① $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB'C'$ 面积相同;
- ② $BC = 2AD$;
- ③若 $AB = AC$, 连接 BB' 和 CC' , 则 $\angle B'BC + \angle CC'B' = 180^\circ$;
- ④若 $AB = AC$, $AB = 4$, $BC = 6$, 则 $B'C' = 10$.

【答案】①②③

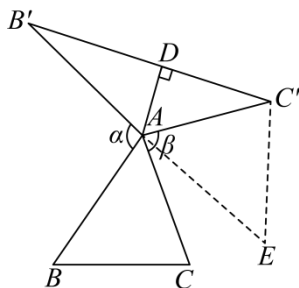
【解析】

【分析】延长 $B'A$, 并截取 $AE = AB$, 连接 $C'E$, 证明 $\triangle ABC \cong \triangle AEC'$, 得出 $BC = C'E$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC'}$, 根据 $AB = AB'$, $AB = AE$, 得出 $AE = AB'$, 证明 $S_{\triangle AB'C'} = S_{\triangle AEC'}$, 得出 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB'C'}$, 即可判断①正确; 根据三角形中位线性质得出 $AD = \frac{1}{2}C'E$, 根据 $BC = C'E$, 得出 $BC = 2AD$, 判断②正确; 根据 $AB = AC$ 时, $AB = AB' = AC' = AC$, 得出 $\angle AB'B = \angle ABB'$, $\angle AB'C' = \angle AC'B'$, $\angle AC'C = \angle ACC'$, $\angle ABC = \angle ACB$, 根据四边形内角和得出

$\angle AB'B + \angle ABB' + \angle AB'C' + \angle AC'B' + \angle AC'C + \angle ACC' + \angle ABC + \angle ACB = 360^\circ$, 求 出 $\angle B'BC + \angle CC'B' = 180^\circ$, 判断③正确; 根据②可知, $AD = \frac{1}{2}BC = 3$, 根据勾股定理得出

$B'D = \sqrt{AB'^2 - AD^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$, 求出 $B'C' = 2B'D = 2\sqrt{7}$, 判断④错误.

【详解】解: 延长 $B'A$, 并截取 $AE = AB$, 连接 $C'E$, 如图所示:



$\therefore \angle BAC + \angle B'AC' = 180^\circ$,

$\therefore a + b = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$,

$\therefore a + \angle BAE = 180^\circ$,

$\therefore \angle BAE = \beta$,

$\therefore \angle BAC + \angle CAE = \angle CAE + \angle EAC'$,

$\therefore \angle BAC = \angle EAC'$,

根据旋转可知, $AC = AC'$, $AB = AB'$,

$\therefore AB = AE$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AEC'$,

$\therefore BC = C'E$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC'}$,

$\therefore AB = AB'$, $AB = AE$,

$\therefore AE = AB'$,

$\therefore S_{\triangle AB'C'} = S_{\triangle AEC'}$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB'C'}$,

即 ABC 与 $\triangle AB'C'$ 面积相同, 故①正确;

$\therefore AE = AB'$, $B'D = C'D$,

$\therefore AD$ 是 $\triangle B'C'E$ 的中位线,

$\therefore AD = \frac{1}{2}C'E$,

$\therefore BC = C'E$,

$\therefore BC = 2AD$ ，故②正确；

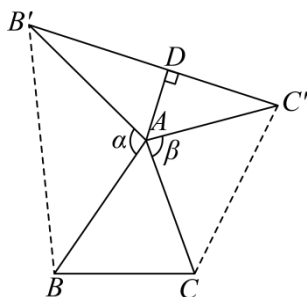
当 $AB = AC$ 时， $AB = AB' = AC' = AC$ ，

$\therefore \angle AB'B = \angle ABB'$ ， $\angle AB'C' = \angle AC'B'$ ， $\angle AC'C = \angle ACC'$ ， $\angle ABC = \angle ACB$ ，

$\therefore \angle AB'B + \angle ABB' + \angle AB'C' + \angle AC'B' + \angle AC'C + \angle ACC' + \angle ABC + \angle ACB = 360^\circ$ ，

$\therefore \angle ABB' + \angle ABC + \angle AC'B' + \angle AC'C = \angle AB'B + \angle ACB + \angle AB'C' + \angle ACC' = 180^\circ$ ，

即 $\angle B'BC + \angle CC'B' = 180^\circ$ ，故③正确；



$\therefore BC = 6$ ，

$\therefore$ 根据②可知， $AD = \frac{1}{2}BC = 3$ ，

$\therefore$ 当 $AB = AC$ 时， $AB = AB' = AC' = AC = 4$ ， AD 为中线，

$\therefore AD \perp B'C'$ ，

$\therefore \angle ADB' = 90^\circ$ ，

$\therefore B'D = \sqrt{AB'^2 - AD^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ ，

$\therefore B'C' = 2B'D = 2\sqrt{7}$ ，故④错误；

综上所述可知，正确的是①②③。

【点睛】 本题主要考查了三角形全等的判定和性质，等腰三角形的性质，中位线性质，勾股定理，四边形内角和，补角的性质，解题的关键是作出辅助线，构造全等三角形，证明 $\triangle ABC \cong \triangle AEC'$ 。

10. 在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AD = 49$ ， $BC = 60$ ， $CD = BD = 50$ ，则四边形 $ABCD$ 的面积是 _____。

【答案】 $1536 - 24\sqrt{97}$ 或 $1536 + 24\sqrt{97}$

【解析】

【分析】 根据题意画出四边形 $ABCD$ ，过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E ，过点 B 作 $BN \perp DC$ 于点 N ，①过点 A 作 $AM \perp DC$ 于点 M ，②过点 A 作 $AM \perp DC$ 交 CD 的延长线于点 M ，分两种情况求解即可。

【详解】 解：①如图，过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E ，过点 B 作 $BN \perp DC$ 于点 N ，过点 A 作 $AM \perp DC$ 于点 M ，

$$\because CD = BD = 50, \quad BC = 60,$$

$$\therefore EC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 60 = 30,$$

$$\text{在 Rt } DCE \text{ 中, } DE = \sqrt{DC^2 - EC^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40,$$

$$\because S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}DC \cdot BN = \frac{1}{2}BC \cdot DE,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 50 \times BN = \frac{1}{2} \times 60 \times 40,$$

$$\therefore BN = 48,$$

$$\therefore NC = \sqrt{BC^2 - BN^2} = \sqrt{60^2 - 48^2} = 36,$$

$$\because BN \perp DC, \quad AM \perp DC,$$

$$\therefore AM \parallel BN, \quad \angle AMN = 90^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \text{四边形 } AMNB \text{ 是平行四边形,}$$

$$\therefore \text{四边形 } AMNB \text{ 是矩形,}$$

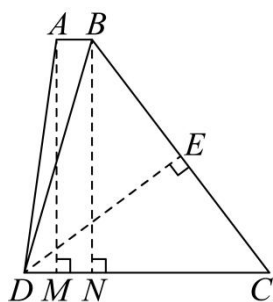
$$\therefore AB = MN, \quad AM = BN = 48,$$

$$\text{在 Rt } \triangle ADM \text{ 中, } DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{49^2 - 48^2} = \sqrt{97},$$

$$\therefore AB = MN = DC - DM - NC = 50 - \sqrt{97} - 36 = 14 - \sqrt{97},$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 的面积:}$$

$$\frac{(AB + DC)AM}{2} = \frac{(14 - \sqrt{97} + 50) \times 48}{2} = 24 \times (64 - \sqrt{97}) = 1536 - 24\sqrt{97};$$



②如图, 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E , 过点 B 作 $BN \perp DC$ 于点 N , 过点 A 作 $AM \perp DC$ 交 CD 的延长线于点 M ,

$$\text{由①知: } DM = \sqrt{97}, \quad NC = 36, \quad BN = 48,$$

$$\therefore DN = DC - NC = 50 - 36 = 14,$$

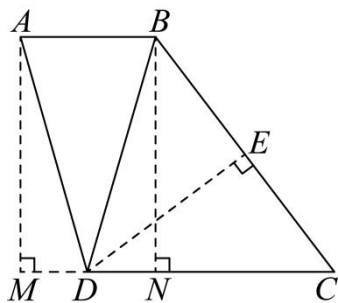
$$\therefore AB = MN = MD + NC = \sqrt{97} + 14,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积:

$$\frac{(AB + DC) \cdot AM}{2} = \frac{(14 + \sqrt{97} + 50) \times 48}{2} = 24 \times (64 + \sqrt{97}) = 1536 + 24\sqrt{97};$$

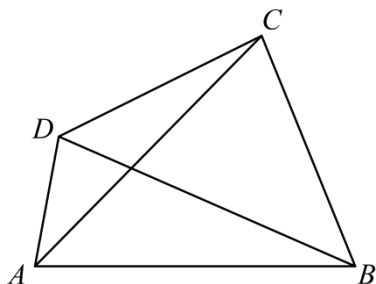
综上所述, 四边形 $ABCD$ 的面积为 $1536 - 24\sqrt{97}$ 或 $1536 + 24\sqrt{97}$.

故答案为: $1536 - 24\sqrt{97}$ 或 $1536 + 24\sqrt{97}$.



【点睛】本题求梯形的面积, 考查了等腰三角形的三线合一性质, 勾股定理, 平行四边形的判定, 矩形的判定和性质等知识点, 正确理解题意并画出图形是解题的关键.

11. 如图, 在凸四边形 $ABCD$ 中, $AB = AC = BD$, 且 $\angle DAB = 72^\circ$, $\angle ABC = 66^\circ$, 则 $\angle BCD =$ _____.



【答案】 96° ## 96度

【解析】

【分析】根据等边对等角得 $\angle ADB = \angle DAB = 72^\circ$, $\angle ACB = \angle ABC = 66^\circ$, 根据三角形内角和得 $\angle ABD = 36^\circ$, $\angle BAC = 48^\circ$, 继而得到 $\angle CAD = \angle DAB - \angle BAC = 24^\circ$, 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 并交 BD 于点 S , 连接 SC , 延长 AD 于点 K , 过点 C 作 $CM \perp BD$ 于点 M , 作 $CN \perp DK$ 于点 N , 说明 AC 平分 $\angle DAS$, 得 $CN = CH$, 说明 SC 平分 $\angle DSH$, 得 $CM = CH$, 说明 DC 平分 $\angle BDK$, 得 $\angle CDK = \frac{1}{2} \angle BDK = 54^\circ$, 求出 $\angle ACD = \angle CDK - \angle DAC = 30^\circ$, 即可得出结论.

【详解】解: $\because AB = AC = BD$, $\angle DAB = 72^\circ$, $\angle ABC = 66^\circ$,

$$\therefore \angle ADB = \angle DAB = 72^\circ, \angle ACB = \angle ABC = 66^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 180^\circ - \angle ADB - \angle DAB = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ,$$

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle ACB - \angle ABC = 180^\circ - 66^\circ - 66^\circ = 48^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle DAB - \angle BAC = 72^\circ - 48^\circ = 24^\circ,$$

过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H, 并交 BD 于点 S, 连接 SC , 延长 AD 于点 K, 过点 C 作 $CM \perp BD$ 于点 M, 作 $CN \perp DK$ 于点 N,

$$\therefore \angle SAC = \angle SAB = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 48^\circ = 24^\circ, \quad BH = CH,$$

$$\therefore \angle SAC = \angle CAD, \text{ 即 } AC \text{ 平分 } \angle DAS,$$

$$\therefore CN = CH,$$

$$\therefore \angle BSH = 90^\circ - \angle SBH = 90^\circ - (\angle ABC - \angle ABD) = 90^\circ - (66^\circ - 36^\circ) = 60^\circ,$$

$$\therefore AH \perp BC, \quad BH = CH,$$

$$\therefore AH \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\therefore SB = SC,$$

$$\therefore \angle CSH = \angle BSH = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DSC = 180^\circ - \angle CSH - \angle BSH = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DSC = \angle CSH, \text{ 即 } SC \text{ 平分 } \angle DSH,$$

$$\therefore CM = CH,$$

$$\therefore CM = CN,$$

$$\therefore CM \perp BD, \quad CN \perp DK,$$

$$\therefore DC \text{ 平分 } \angle BDK,$$

$$\therefore \angle ADB = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle BDK = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle CDK = \frac{1}{2} \angle BDK = \frac{1}{2} \times 108^\circ = 54^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle CDK - \angle DAC = 54^\circ - 24^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ACD + \angle ACB = 30^\circ + 66^\circ = 96^\circ.$$

故答案为: 96° .

∴ 正偶数约数有： $18 \times 10 \times 6 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 86400$ (个)，

∴ 奇数与偶数的比： $\frac{4800}{86400} = \frac{1}{18}$.

故答案为： $\frac{1}{18}$.

二、解答题 (4 题，每题 10 分，共 40 分)

13. 求所有的正整数 n ，使得 $6^n + 1$ 在十进制下的所有数字都相同，

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了指数运算，数字末尾规律，根据指数运算的出数字规律是解题的关键；
根据 n 的取值找到数字相同的规律，验证即可得出答案；

【详解】 当 $n=1$ 时， $6^1 + 1 = 7$ ，显然不符合所有数字都相同的条件.

当 $n=2$ 时， $6^2 + 1 = 36 + 1 = 37$ ，不符合要求.

当 $n=3$ 时， $6^3 + 1 = 216 + 1 = 217$ ，不符合条件.

当 $n=4$ 时， $6^4 + 1 = 1296 + 1 = 1297$ ，不符合条件.

当 $n=5$ 时， $6^5 + 1 = 7776 + 1 = 7777$ ，此时 7777 所有数字都相同，符合条件.

∵ 6^n ， $n \geq 2$ 的末位数字一定是 6，所以 $6^n + 1$ 的末位数字一定是 7.

对于一个数所有数字都相同且末位数字是 7，形如 $a \times \frac{10^m - 1}{9}$ ， ($a=7$ ， m 为正整数)，

随着 n 增大， 6^n 增长的速度远远小于 $a \times \frac{10^m - 1}{9}$ 增长的速度.

当 $m=4$ ， $7 \times \frac{10^4 - 1}{9} = 7777$ ，

当 n 再增大， $6^n + 1$ 不可能再出现这种所有数字都相同的形式.

综上， $n=5$ 是使得 $6^n + 1$ 在十进制下所有数字都相同的正整数.

14. 如图，在 ABC 与 ADE 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，延长 DE 交 BC 于点 F ，
连接 CD 和 BE .

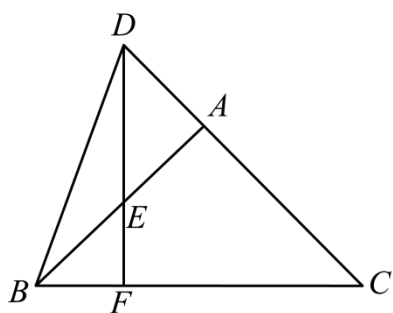


图1

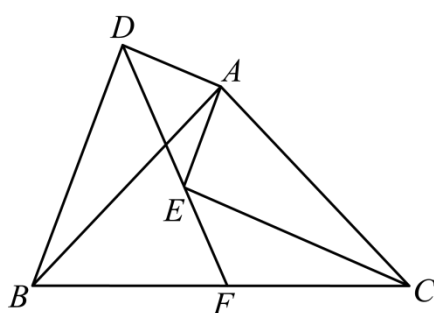


图2

(1) 如图 1, 当点 B, A, E 在同一直线上时, 若 $\angle ABD = 30^\circ$, $AE = 2$, 求 BC 的长;

(2) 如图 2, 当 F 是中点时, 求证: $AE \perp CE$.

【答案】(1) $2\sqrt{6}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 直角三角形的性质;

(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 求出 $AB = 2\sqrt{3}$, 再根据等腰直角三角形得到 $BC = \sqrt{2}AB$, 代入求值即可;

(2) 延长 DF 至 M , 使 $DF = FM$, 连接 CM , 由倍长中线得到 $\triangle BFD \cong \triangle CFM$ (SAS), 得到 $\angle BDF = \angle M$, $BD = CM$, 再由等腰直角三角形证明 $\triangle DAB \cong \triangle EAC$ (SAS), 得到 $\angle AEC = \angle ADB$, $BD = EC$, 即可得到 $BD = EC = CM$, $\angle BDF = \angle M = \angle MEC$, 再由 $\angle AEC = \angle ADB = \angle ADE + \angle BDF = 45^\circ + \angle M$, 结合 $\angle AEC + \angle AED + \angle MEC = 180^\circ$, 解得 $\angle AEC = 90^\circ$, 即可得到 $AE \perp EC$.

【小问 1 详解】

解: 当点 B, A, E 在同一直线上时, $\angle DAB = \angle DAE = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ABD = 30^\circ$, $AE = AD = 2$,

$$\therefore BD = 2AD = 4,$$

$$\therefore AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

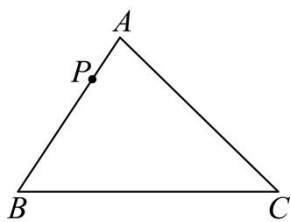
$$\therefore AB = AC, \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{6};$$

【小问 2 详解】

证明: 如图, 延长 DF 至 M , 使 $DF = FM$, 连接 CM ,

并说明理由.



【答案】作图见解析

【解析】

【分析】线段 BC 的垂直平分线交 BC 于点 D ，连接 AD 、 PD ，作 $\angle BAQ = \angle BPD$ 交 BC 于点 Q ，作直线 PQ 即可.

【详解】解：作线段 BC 的垂直平分线交 BC 于点 D ，连接 AD 、 PD ，作 $\angle BAQ = \angle BPD$ 交 BC 于点 Q ，作直线 PQ ，

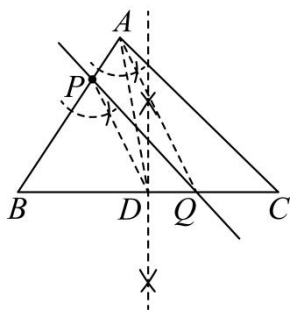
$\therefore$ 点 D 是线段 BC 的中点， $PD \parallel AQ$ ，

$$\therefore S_{\triangle APD} = S_{\triangle QPD}, \quad S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle PBQ} = S_{\triangle PBD} + S_{\triangle PDQ} = S_{\triangle PBD} + S_{\triangle APD} = S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle PBQ} = S_{\text{四边形}PACQ} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

则直线 PQ 即为所作.



【点睛】本题考查作图—应用设计作图，考查了基本作图—作线段的垂直平分线，作一个角等于已知角，三角形中线的性质，平行线判定和性质，三角形的面积及等积变换. 解题的关键是理解题意，利用数形结合的思想解决问题.

16. 求方程 $17(xyzt + xy + xt + zt + 1) - 54(yzt + y + t) = 0$ 的正整数解

【答案】 $x = 3, y = 5, z = 1, t = 2$

【解析】

【分析】 本题考查不等式（组）的应用，将原方程化为 $17(zt+1)=(54-17x)(yzt+y+t)$ ，根据题意得 $yzt+y+t>zt+1>0$ ，推出 $0<54-17x<17$ ，解得 $\frac{37}{17}<x<\frac{54}{17}$ ，确定 $x=3$ ，按同样的方程可确定 $y=5$ ，则原方程化为 $(3-2z)t=2$ ，得 $3-2z>0$ ，即可得解。根据题意将方程转化为不等式（组）是解题的关键。

【详解】 解： $17x(yzt+y+t)+17(zt+1)-54(yzt+y+t)=0$ ，

$$17(zt+1)=54(yzt+y+t)-17x(yzt+y+t),$$

$$17(zt+1)=(54-17x)(yzt+y+t),$$

∵ 求方程的正整数解，

∴ x 、 y 、 z 、 t 都是正整数，

$$\therefore yzt+y+t>zt+1>0,$$

$$\therefore 0<54-17x<17,$$

$$\text{解得: } \frac{37}{17}<x<\frac{54}{17},$$

$$\therefore x=3,$$

$$\therefore 17(zt+1)=3(yzt+y+t), \text{ 即 } (17-3y)(zt+1)=3t,$$

∵ y 、 z 、 t 都是正整数，

$$\therefore zt+1>t>0,$$

$$\therefore 0<17-3y<3,$$

$$\text{解得: } \frac{14}{3}<y<\frac{17}{3},$$

$$\therefore y=5,$$

$$\therefore (3-2z)t=2,$$

∵ z 、 t 都是正整数，

$$\therefore 3-2z>0,$$

$$\text{解得: } z<\frac{3}{2},$$

∵ z 是正整数，

$$\therefore z=1,$$

$$\therefore t=2,$$

∴ 方程 $17(xyzt + xy + xt + zt + 1) - 54(yzt + y + t) = 0$ 的正整数解是 $x = 3$, $y = 5$, $z = 1$, $t = 2$.