

2024-2025 学年上海市宝山实验学校八年级（下）期中数学试卷

一、选择题：（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 一次函数 $y=3(x-1)$ 在 y 轴上的截距是 ()

- A. 1 B. -1 C. 3 D. -3

【答案】D

【解析】

【分析】直接求出一次数函数与 y 轴的交点即可得出答案.

【详解】解: $\because y=3(x-1)=3x-3$,

$\therefore$ 当 $x=0$ 时, $y=-3$,

$\therefore$ 一次函数 $y=3(x-1)$ 在 y 轴上的截距是: -3 .

故选 D.

【点睛】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 属于基础题, 关键是令 $x=0$ 求出与 y 轴的交点坐标.

2. 下列函数中是一次函数的是 ()

- A. $y=\frac{2}{x}+1$ B. $y=kx+b$ C. $y=3x$ D. $y=x^2-2x+1$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的定义, 熟练掌握其定义是解题的关键.

根据一次函数的定义逐一验证即可.

【详解】解: A: $y=\frac{2}{x}+1$, 该函数含分式 $\frac{2}{x}$, 不符合一次函数的形式, 故该选项不符合题意;

B: $y=kx+b$, 未明确 $k \neq 0$, 故该选项不符合题意;

C: $y=3x$, 该函数符合一次函数的标准形式, 故该选项符合题意;

D: $y=x^2-2x+1$, 该函数最高次数为 2, 不符合一次函数的定义, 故该选项不符合题意.

故选: C.

3. 下列方程中, 有实数解的是 ()

- A. $x^2+1=0$ B. $x^3+1=0$ C. $\sqrt{x+1}=-2$ D. $\frac{x}{x-2}=\frac{2}{x-2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是利用平方根, 立方根的含义解方程, 无理方程的解法, 分式方程的解法, 掌握“无

理方程的解法与步骤”是解本题的关键.

逐一分析各选项方程是否存在实数解, 即可解题.

【详解】A. 方程 $x^2 + 1 = 0$ 变形为 $x^2 = -1$, 平方数非负, 无实数解, 不符合题意.

B. 方程 $x^3 + 1 = 0$ 变形为 $x^3 = -1$, 解得 $x = \sqrt[3]{-1} = -1$, 是实数解, 符合题意.

C. 方程 $\sqrt{x+1} = -2$, 左边平方根非负, 右边为负数, 无解, 不符合题意.

D. 方程 $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$, 两边同乘 $(x-2)$ 得 $x = 2$, 但 $x = 2$ 使分母为 0, 舍去, 无解, 不符合题意.

故选: B.

4. 甲队修路 120m 与乙队修路 100m 所用天数相同, 已知甲队比乙队每天多修 10m, 设乙队每天修路 x m. 依题意, 下面所列方程正确的是 ()

A. $\frac{120}{x} = \frac{100}{x-10}$

B. $\frac{120}{x+10} = \frac{100}{x}$

C. $\frac{120}{x-10} = \frac{100}{x}$

D. $\frac{120}{x} = \frac{100}{x+10}$

【答案】B

【解析】

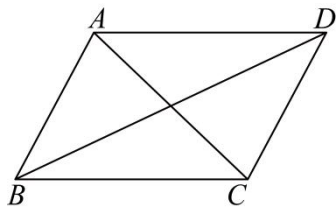
【分析】本题考查了分式方程的应用, 理解题意正确列出方程是解题的关键. 设乙队每天修路 x 米, 则甲队每天修路 $(x+10)$ 米, 根据甲队修路 120m 与乙队修路 100m 所用天数相同列方程即可.

【详解】解: 设乙队每天修路 x 米, 则甲队每天修路 $(x+10)$ 米,

由题意得, $\frac{120}{x+10} = \frac{100}{x}$.

故选: B.

5. 如图在四边形 $ABCD$ 中, 若已知 $AB \parallel CD$, 再添加下列条件之一, 能使四边形 $ABCD$ 成为平行四边形的条件是 ()



A. $\angle DAB = \angle ADC$

B. $AD = BC$

C. $\angle ABD = \angle BDC$

D. $\angle BAD = \angle BCD$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了平行四边形的判定. 根据平行四边形的判定进行逐项判断即可.

【详解】解：A、由 $AB \parallel CD$ ， $\angle DAB = \angle ADC$ ，不能判定四边形 $ABCD$ 成为平行四边形，故选项 A 不符合题意；

B、由 $AB \parallel CD$ ， $AD = BC$ ，不能判定四边形 $ABCD$ 成为平行四边形，故选项 B 不符合题意；

C、 $\because \angle ABD = \angle BDC$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ ，不能判定四边形 $ABCD$ 成为平行四边形，故选项 C 不符合题意；

D、 $\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle BCD$ ，

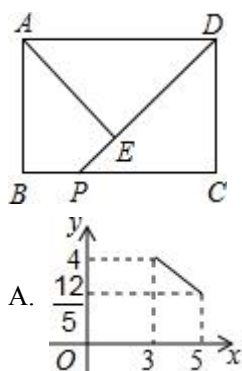
$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，故选项 D 符合题意；

故选：D.

6. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，点 P 在 BC 边上运动，连接 DP ，过点 A 作 $AE \perp DP$ ，垂足为 E ，设 $DP = x$ ， $AE = y$ ，则能反映 y 与 x 之间函数关系的大致图象是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】首先连接 AP ，根据矩形的性质可得 $S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} S_{\text{矩形 } ABCD}$ ，再代入相应数值可得 y 与 x 之间函数关系式，即可判断最终结果.

【详解】解：如图，连接 AP ，

$\because AE \perp DP$ ，

$$\therefore S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} DP \cdot AE = \frac{1}{2} AD \cdot AB,$$

$\because AB = 3$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore S_{\triangle APD} = 6,$$

$$\text{又} \because DP = x, \quad AE = y,$$

$$\therefore \frac{1}{2}xy = 6, \quad xy = 12,$$

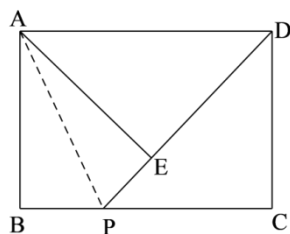
$$\therefore y = \frac{12}{x},$$

$$\because AB \leq DP \leq BD,$$

$$\therefore 3 \leq x \leq 5,$$

根据解析式和自变量取值范围可知 C 符合题意.

故选: C.



【点睛】此题主要考查了矩形的性质, 涉及反比例函数的表达式, 利用 $\triangle APD$ 面积的不同表示方法求得 y 与 x 的函数关系是解决本题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知一次函数的图象在 y 轴上的截距是 5, 且过点 $(-1, 0)$, 则该函数的解析式是_____.

【答案】 $y = 5x + 5$ ## $y = 5 + 5x$

【解析】

【分析】本题主要考查了求一次函数解析式, 设一次函数的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$, 一次函数在 y 轴上的截距即为一次函数与 y 轴交点的纵坐标, 据此可得 $b = 5$, 再利用待定系数法求解即可.

【详解】解: 设一次函数的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$\because$ 一次函数在 y 轴上的截距是 5,

$$\therefore b = 5,$$

把点 $(-1, 0)$ 代入 $y = kx + b (k \neq 0)$ 得, $-k + 5 = 0$,

$$\therefore k = 5,$$

$\therefore$ 该函数的解析式是 $y = 5x + 5$.

故答案为: $y = 5x + 5$.

8. 如果直线 $y = -\frac{1}{2}x - 1$ 经过点 $(2, a)$, 那么 $a =$ _____ .

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查一次函数解析式, 掌握一次函数的性质是解题的关键. 直接将 $(2, a)$ 代入计算即可得出答案.

【详解】 解: $\because$ 直线 $y = -\frac{1}{2}x - 1$ 经过点 $(2, a)$,

$$\therefore a = -\frac{1}{2} \times 2 - 1 = -2.$$

故答案为: -2.

9. 已知: 点 $A(-1, a)$ 、 $B(1, b)$ 在函数 $y = -2x + m$ 的图象上, 则 a _____ b (在横线上填写“>”或“=”或“<”).

【答案】 >

【解析】

【分析】 根据一次函数 $y = kx + b$ 的性质, 当 $k < 0$ 时, y 将随 x 的增大而减小, 即可得出 a, b 的大小关系即可.

【详解】 解: $\because k = -2 < 0$,

$\therefore y$ 将随 x 的增大而减小,

$$\because -1 < 1,$$

$$\therefore a > b.$$

故答案为: >.

【点睛】 此题主要考查了一次函数的增减性, 比较简单. 解答此题的关键是熟知一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的增减性, 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

10. 关于 x 的方程 $a(x-1) = x+1 (a \neq 1)$ 的解为 _____.

【答案】 $x = \frac{1+a}{a-1}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次方程以及方程的解的概念, 掌握解方程的基本步骤是解题的关键. 按照解方程的基本步骤依次去括号, 移项, 合并同类项, 系数化 1 即可.

【详解】解： $a(x-1) = x+1 (a \neq 1)$

$$ax - a = x + 1$$

$$(a-1)x = 1+a$$

$$\because a \neq 1$$

$$\therefore x = \frac{1+a}{a-1}$$

故答案为： $x = \frac{1+a}{a-1}$.

11. 分式方程 $\frac{x^2-1}{x-1} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的计算，解题时根据分式方程的解答步骤，先去分母，最后进行验根即可.

【详解】 解： 由 $\frac{x^2-1}{x-1} = 0$,

$$\therefore \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 0,$$

$$\therefore x+1 = 0,$$

$$\therefore \text{解得, } x = -1,$$

经检验, 当 $x = -1$ 时, $x-1 \neq 0$,

所以 $x = -1$ 是原分式方程的解,

故答案是: $x = -1$.

12. 方程 $2x^3 + 54 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = -3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了立方根的性质，熟练掌握立方根的性质是解题的关键. 先将方程 $2x^3 + 54 = 0$ 变形为 $x^3 = -27$ ，再利用立方根的性质，即可求解.

【详解】 解： $\because 2x^3 + 54 = 0$,

$$\therefore x^3 = -27,$$

解得: $x = -3$.

故答案为: $x = -3$.

13. 方程 $\sqrt{x+6} = -x$ 的解为_____

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，将方程两边同时平方，再解方程得出 x 的值，检验即可得出答案.

【详解】 解：两边平方得: $x+6 = x^2$,

移项得: $x^2 - x - 6 = 0$,

解得: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$,

经检验, $x = -2$ 是原方程的解,

故答案为: -2 .

14. 在分式方程 $\frac{x^2-1}{x} + \frac{3x}{x^2-1} = 4$ 中, 令 $y = \frac{x^2-1}{x}$, 则原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 4y + 3 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，根据换元法将分式方程化为整式方程，即可求解.

【详解】 解：分式方程变形得: $\frac{x^2-1}{x} + 3\frac{3}{x^2-1} = 4$

根据 $y = \frac{x^2-1}{x}$, 得到 $\frac{1}{y} = \frac{x}{x^2-1}$

分式方程整理得: $y + \frac{3}{y} = 4$,

整理得: $y^2 - 4y + 3 = 0$,

故答案为: $y^2 - 4y + 3 = 0$.

15. 在去分母解关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-4} = 2 - \frac{a}{4-x}$ 的过程中产生增根, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 4

【解析】

【分析】先将分式方程化为整式方程，再由分式方程有增根，可得 $x=4$ ，再代入整式方程，即可求解.

【详解】解：方程两边同乘 $(x-4)$ 得： $x=2(x-4)+a$ ，

∵ 关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-4}=2-\frac{a}{4-x}$ 有增根，

$$\therefore x-4=0,$$

解得： $x=4$ ，

将 $x=4$ 代入方程 $x=2(x-4)+a$ ，得： $4=2(4-4)+a$ ，

解得： $a=4$.

故答案为： 4

【点睛】 本题考查了分式方程的增根，熟练掌握增根问题可按如下步骤进行：①化分式方程为整式方程；②让最简公分母为 0 确定增根；③把增根代入整式方程即可求得相关字母的值是解题的关键.

16. 如果一个多边形的内角和是它的外角和的 4 倍，那么这个多边形的边数为_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形的外角和以及内角和，任何多边形的外角和是 360 度，即这个多边形的内角和是 360×4 度. n 边形的内角和是 $180(n-2)$ ，列方程就可以求出多边形的边数.

【详解】 解：设这个多边形的边数为 n ，

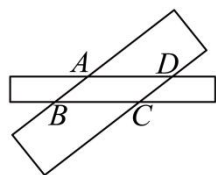
根据题意得： $180^\circ \times (n-2) = 4 \times 360^\circ$ ，

解得： $n=10$ ，

则这个多边形的边数是 10，

故答案为： 10 .

17. 如图，两条宽度分别为 2 和 4 方形纸条交叉放置，重叠部分为四边形 $ABCD$ ，若 $AB+BC=9$ ，则四边形 $ABCD$ 的面积是_____.



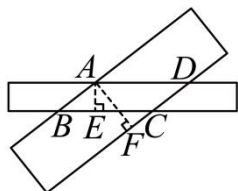
【答案】 12

【解析】

【分析】根据题意判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 如图, 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 过点 A 作 $AF \perp CD$ 于点 F , 利用面积法求得 AB 与 BC 的数量关系, 从而求得该平行四边形的面积.

【详解】解: 依题意得: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, 则四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

如图, 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 过点 A 作 $AF \perp CD$ 于点 F ,



$$\therefore AE = 2, AF = 4,$$

$$\therefore BC \cdot AE = AB \cdot AF,$$

$$\therefore BC = 2AB.$$

$$\text{又} \because AB + BC = 9,$$

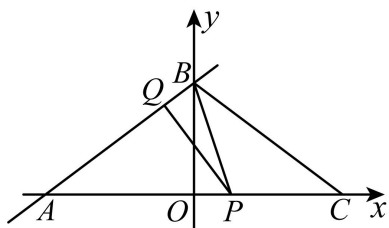
$$\therefore AB = 3, BC = 6,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 的面积} = 2 \times 6 = 12;$$

答案为: 9

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质. 根据面积法求得 $BC = 2AB$ 是解题的关键, 另外, 注意解题过程中辅助线的作法.

18. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = \frac{3}{4}x + 6$ 交 x 轴于点 A 、交 y 轴于点 B , 点 C 与点 A 关于 y 轴对称, 动点 P 、 Q 分别在线段 AC 、 AB 上 (点 P 不与点 A 、 C 重合), 满足 $\angle BPQ = \angle BAO$. 当 $\triangle PQB$ 为等腰三角形时, 点 P 的坐标是_____



【答案】 $(2,0)$ 或 $(-\frac{7}{4},0)$

【解析】

【分析】把 $x = 0$ 和 $y = 0$ 分别代入一次函数的解析式, 求出 B 、 A 的坐标, 分为三种情况: ① $PQ = BP$,

② $BQ = QP$, ③ $BQ = BP$, 分别求解即可.

【详解】解： $\because y = \frac{3}{4}x + 6$,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = 6$,

当 $y = 0$ 时, $x = -8$,

即点 A 的坐标是 $(-8, 0)$, 点 B 的坐标是 $(0, 6)$,

$\because C$ 点与 A 点关于 y 轴对称,

$\therefore C$ 的坐标是 $(8, 0)$,

分为三种情况:

①当 $PB = PQ$ 时,

$\because A$ 和 C 关于 y 轴对称,

$\therefore \angle BAO = \angle BCP$,

$\because \angle BPQ = \angle BAO$, $\angle BAO + \angle AQP + \angle APQ = 180^\circ$, $\angle APQ + \angle BPQ + \angle BPC = 180^\circ$,

$\therefore \angle AQP = \angle BPC$,

$\because A$ 和 C 关于 y 轴对称,

$\therefore \angle BAO = \angle BCP$,

在 $\triangle APQ$ 和 $\triangle CBP$ 中,

$$\begin{cases} \angle AQP = \angle BPC \\ \angle BAO = \angle BCP, \\ PB = PQ \end{cases}$$

$\therefore \triangle APQ \cong \triangle CBP (\text{AAS})$,

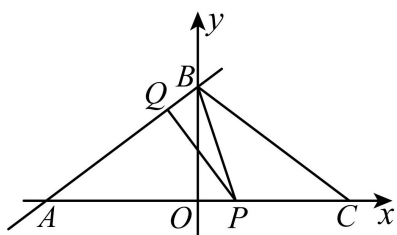
$\therefore AP = CB$,

$\because B(0, 6)$, $C(8, 0)$,

$\therefore BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$,

$\therefore AP = 10$,

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(2, 0)$;



②当 $BQ = BP$ 时, 则 $\angle BPQ = \angle BQP$,

$\therefore \angle BAO = \angle BPQ$,

$\therefore \angle BAO = \angle BQP$,

而根据三角形的外角性质得: $\angle BQP > \angle BAO$,

$\therefore$ 此种情况不存在;

③当 $QB = QP$ 时, 则 $\angle BPQ = \angle QBP = \angle BAO$,

即 $BP = AP$,

设此时 P 的坐标是 $(x, 0)$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle OBP$ 中, 由勾股定理得: $AP^2 = OP^2 + OB^2$,

$\therefore (x+8)^2 = x^2 + 6^2$,

解得: $x = -\frac{7}{4}$,

即此时 P 的坐标是 $(-\frac{7}{4}, 0)$.

$\therefore$ 当 $\triangle PQB$ 为等腰三角形时, 点 P 的坐标是 $(2, 0)$ 或 $(-\frac{7}{4}, 0)$.

故答案为: $(2, 0)$ 或 $(-\frac{7}{4}, 0)$.

【点睛】本题是一次函数综合题, 考查了一次函数图像上点的坐标特征, 勾股定理, 等腰三角形的性质, 全等三角形的性质和判定的应用, 解题的关键是分类思想的运用.

三、简答题: (第 19-22 每题 10 分, 23-24 每题 12 分, 25 题 14 分)

19. 解方程: $\frac{x}{x-2} - \frac{8}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$.

【答案】原方程的根是 $x = -3$.

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解: 方程两边乘 $(x-2)(x+2)$,

$$\text{得 } x(x+2)-8=x-2,$$

$$x^2+x-6=0,$$

$$(x+3)(x-2)=0,$$

$$\text{解得 } x_1=-3, \quad x_2=2.$$

经检验: $x_1=-3$ 是原方程的根, $x_2=2$ 是增根.

$\therefore$ 原方程的根是 $x=-3$.

【点睛】 本题考查分式方程的解法, 掌握分式方程的解题的步骤是解题的关键, 注意检验.

$$20. \text{ 解方程: } \sqrt{3x-3} + \sqrt{x+3} = 2.$$

$$\text{【答案】 } x_1=1$$

【解析】

【分析】 本题主要考查无理方程, 解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解, 在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法. 常用的方法有: 乘方法, 配方法, 因式分解法, 设辅助元素法, 利用比例性质法等. 先移项, 再利用两边平方的办法去掉一个根号, 整理后再利用同样的办法去掉另外一个根号, 进一步求解可得.

$$\text{【详解】 解: } \because \sqrt{3x-3} + \sqrt{x+3} = 2,$$

$$\therefore \sqrt{3x-3} = 2 - \sqrt{x+3},$$

$$\text{则 } 3x-3 = 4 - 4\sqrt{x+3} + x+3,$$

$$\text{整理, 得: } 4\sqrt{x+3} = 10 - 2x,$$

$$\therefore 16(x+3) = 100 - 40x + 4x^2,$$

$$\text{整理, 得: } 2x^2 - 28x + 26 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1=1, \quad x_2=13 \text{ (舍)}.$$

$$21. \text{ 解方程组: } \begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 = 4(1) \\ x - 2y = 3(2) \end{cases}$$

$$\text{【答案】 } \begin{cases} x_1=5 \\ y_1=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=13 \\ y_2=5 \end{cases}$$

【解析】

【分析】先将①中的 $x^2 - 6xy + 9y^2$ 分解因式为： $(x-3y)^2$ ，则 $x-3y=\pm 2$ ，与②组合成两个方程组，解出即可

【详解】解：由①，得 $(x-3y)^2 = 4$ ，

$$\therefore x-3y=\pm 2,$$

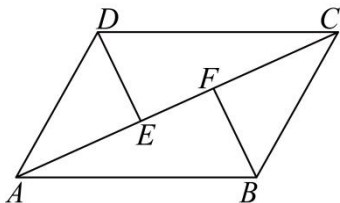
$$\therefore \text{原方程组可转化为: } \begin{cases} x-3y=3 \\ x-2y=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-3y=-2 \\ x-2y=3 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_1=5 \\ y_1=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=13 \\ y_2=5 \end{cases}$$

$$\text{所以原方程组的解为: } \begin{cases} x_1=5 \\ y_1=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=13 \\ y_2=5 \end{cases}$$

【点睛】此题考查二元二次方程组的解，解题关键在于掌握运算法则

22. 已知：如图， E 、 F 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上的两个点，且 $AE = CF$ ．求证： $DE \parallel BF$ ．



【答案】证明见解析

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质，全等三角形的判定与性质，平行线的判定，熟练掌握各知识点并灵活运用是解题的关键．根据平行四边形的性质证明 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$ (SAS) 得到 $\angle AED = \angle CFB$ ，再由等角的补角相等得到 $\angle DEF = \angle BFE$ ，即可证明平行．

【详解】证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = CB, \quad AD \parallel CB,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BCF,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 中，

$$\begin{cases} AD = CB \\ \angle DAE = \angle BCF \\ AE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle AED = \angle CFB,$$

$$\therefore \angle DEF + \angle AED = \angle BFE + \angle CFB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle BFE,$$

$\therefore DE \parallel BF$.

23. 某机械加工厂计划在一定时间内组装 240 个机器人, 后因市场供不应求, 不但需要增产 50%, 而且要提前 4 天完成任务. 经测算, 每天需要多组装 8 个. 问原计划每天组装多少个机器人?

【答案】原计划每天组装 10 个机器人

【解析】

【分析】本题考查了分式的实际应用, 解题关键是找准等量关系.

设原计划每天组装 x 个机器人, 则实际每天需组装 $(x+8)$ 个机器人, 根据等量关系列出分式方程求解, 并验根.

【详解】解: 设原计划每天组装 x 个机器人, 则实际每天需组装 $(x+8)$ 个机器人,

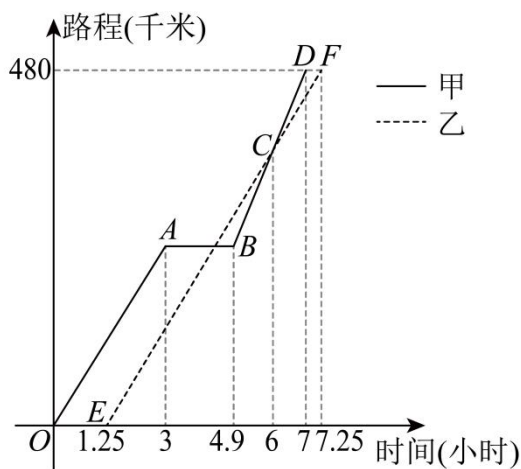
根据题意得: $\frac{240}{x} - \frac{240 \times (1+50\%)}{x+8} = 4$,

解得: $x_1 = 10$, $x_2 = -48$,

经检验, $x_1 = 10$, $x_2 = -48$ 均为所列方程的解, $x_1 = 10$ 符合题意, $x_2 = -48$ 不符合题意, 舍去.

答: 原计划每天组装 10 个机器人.

24. 某市接到上级通知, 立即派出甲、乙两个抗震救灾小组乘车沿同一路线赶赴距出发点 480 千米的灾区. 乙组由于要携带一些救灾物资, 比甲组迟出发 1.25 小时 (从甲组出发时开始计时). 图中的折线、线段分别表示甲、乙两组的所走路程 $y_{\text{甲}}$ (千米)、 $y_{\text{乙}}$ (千米) 与时间 x (小时) 之间的函数关系对应的图象. 请根据图象所提供的信息, 解决下列问题:



(1) 由于汽车发生故障, 甲组在途中停留的时间为_____小时;

(2) 甲组的汽车排除故障后, 立即提速赶往灾区. 问甲组的汽车在排除故障时, 距出发地的路程是多少千

米?

(3) 为了保证及时联络, 甲、乙两组在第二次相遇 (即点 C 处) 时约定此后两车之间的路程不超过 25 千米, 请通过计算说明, 按图象所表示的走法是否符合约定.

【答案】 (1) 1.9

(2) 甲组的汽车在排除故障时, 距出发地的路程是 270 千米

(3) 按图象所表示的走法符合约定

【解析】

【分析】 本题主要考查了从函数图象获取信息, 正确读懂函数图象是解题的关键.

(1) 根据函数图象所给的信息即可得到答案;

(2) 可求出乙的速度, 进而求出点 C 的坐标, 则可求出甲车在 BD 段的速度, 进而可求出甲组的汽车在排除故障时, 距出发地的路程;

(3) 由于甲车在 BD 段的速度大于乙的速度, 那么甲、乙两组在第二次相遇后当 $x = 7$ 时两车之间的距离最大, 据此求出此时两车之间的距离即可得到结论.

【小问 1 详解】

解: 由函数图象可得, 甲组在途中停留的时间为 $4.9 - 3 = 1.9$ (小时).

【小问 2 详解】

解: 乙组的速度为 $480 \div (7.25 - 1.25) = 80$ (千米/小时),

当 $x = 6$ 时, 乙组所走的路程为 $80 \times (6 - 1.25) = 380$ (千米),

$\therefore C(6, 380)$,

$\therefore$ 甲车在 BD 段的速度为 $(480 - 380) \div (7 - 6) = 100$ (千米/小时),

$480 - 100 \times (7 - 4.9) = 270$ (千米).

答: 甲组的汽车在排除故障时, 距出发地的路程是 270 千米.

【小问 3 详解】

解: $\because$ 甲车在 BD 段的速度大于乙的速度,

$\therefore$ 甲、乙两组在第二次相遇后当 $x = 7$ 时两车之间的距离最大,

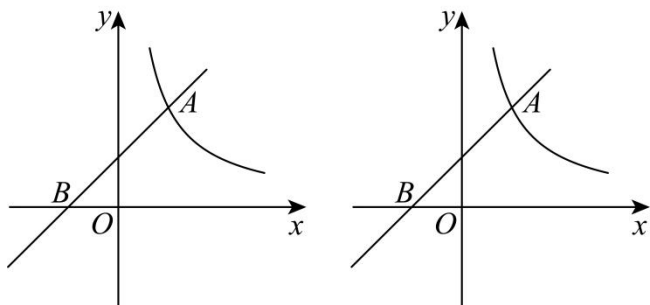
$\therefore$ 此时甲所走的路程为 480 千米, 乙所走的路程为 $80 \times (7 - 1.25) = 460$ (千米),

$\therefore$ 两车之间的最大距离为 $480 - 460 = 20$ (千米),

$\therefore 20 < 25$,

∴按图象所表示的走法符合约定.

25. 如图, 一次函数 $y_1 = kx + 2$ 的图象与 x 轴交于点 $B(-2, 0)$, 与反比例函数 $y_2 = \frac{m}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(2, a)$.



备用图

- (1) 求 k 和 m 的值;
- (2) 若点 D 是反比例函数 $y_2 = \frac{m}{x} (x > 0)$ 上一点, 在点 A 的下方, 且 $\triangle BAD$ 的面积是 8, 求出点 D 的坐标.
- (3) 将函数 $y_1 = kx + 2$ 的图象沿 y 轴向下平移 4 个单位后交 x 轴于点 C . 点 P 是直线 $y_1 = kx + 2$ 上一点, 点 Q 是反比例函数 $y_2 = \frac{m}{x} (x > 0)$ 图象上一点. 如果以点 B 、 C 、 P 、 Q 为顶点的四边形为平行四边形, 请直接写出点 P 的坐标.

【答案】 (1) $k = 1$, $m = 8$

(2) $(4, 2)$

(3) $(0, 2)$ 或 $(1 + \sqrt{17}, 3 + \sqrt{17})$ 或 $(-4, -2)$

【解析】

【分析】 本题是反比例函数综合题, 考查了待定系数法求解析式, 反比例函数的性质, 平行四边形的性质, 学会构建方程组确定交点坐标, 灵活运用这些性质进行推理是本题的关键.

- (1) 分别将点 B 和点 A 的坐标代入 $y_1 = kx + 2$ 中可得 $k = 1$, $a = 4$, 即可得反比例函数的解析式;
- (2) 如图 1, 过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E , 过点 D 作 $DF \perp x$ 轴于点 F , 设点 D 的坐标为 $\left(x, \frac{8}{x}\right) (x > 0)$, 利用面积和与差即可解答;
- (3) 先根据平移可得函数 $y_1 = x + 2$ 的图象沿 y 轴向下平移 4 个单位得: $y = x - 2$, 分三种情况: ①如图 2, 四边形 $BCQP$ 是平行四边形, 则 P , Q 的纵坐标相等, ②如图 3, 四边形 $CBQP$ 是平行四边形, ③如图

4, 四边形 $PCQB$ 是平行四边形, 根据平行四边形的性质即可解答.

【小问 1 详解】

$\because$ 一次函数 $y_1 = kx + 2$ 的图象与 x 轴交于点 $B(-2, 0)$,

$$\therefore -2k + 2 = 0,$$

$$\therefore k = 1,$$

$$\therefore y_1 = x + 2,$$

当 $x = 2$ 时, $a = 2 + 2 = 4$,

$$\therefore A(2, 4),$$

$$\therefore m = 2 \times 4 = 8;$$

【小问 2 详解】

如图 1, 过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E , 过点 D 作 $DF \perp x$ 轴于点 F ,

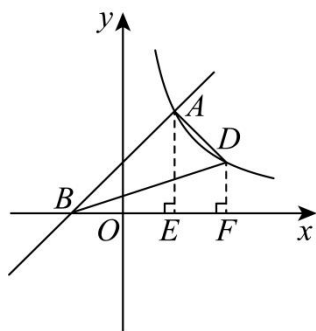


图1

设点 D 的坐标为 $\left(x, \frac{8}{x}\right) (x > 0)$,

$$\because S_{\triangle ABD} = S_{\text{梯形}AEFD} + S_{\triangle AEB} - S_{\triangle BDF},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{8}{x} + 4 \right) (x - 2) + \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times (x + 2) \times \frac{8}{x} = 8,$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0,$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0,$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -2,$$

经检验均是方程的解,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(4, 2)$;

【小问 3 详解】

由题意得：函数 $y_1 = x + 2$ 的图象沿 y 轴向下平移 4 个单位得： $y = x - 2$ ，

当 $y = 0$ 时， $x = 2$ ，

$\therefore C(2, 0)$ ，

分三种情况：

如图 2，四边形 $BCQP$ 是平行四边形，则 P ， Q 的纵坐标相等，

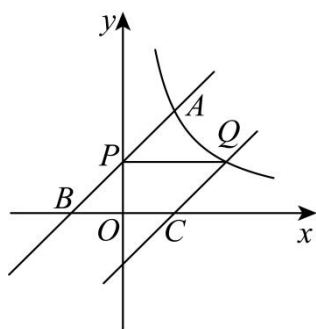


图2

$\therefore$ 设 $Q\left(\frac{8}{y}, y\right)$ ， $P(y-2, y)$ ，

$\therefore PQ = BC = 2 - (-2) = 4$ ，

$\therefore \frac{8}{y} - (y-2) = 4$ ，

解得： $y_1 = -4$ (舍)， $y_2 = 2$ ，

经检验： $y = 2$ 是原方程的解，

$\therefore P(0, 2)$ ；

如图 3，四边形 $CBQP$ 是平行四边形，

由①知 $Q\left(\frac{8}{y}, y\right)$ ， $P(y-2, y)$ ，

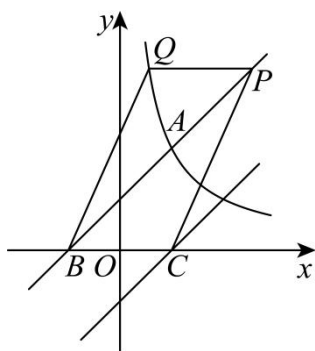


图3

$$\therefore y - 2 - \frac{8}{y} = 4,$$

$$\therefore y_1 = 3 + \sqrt{17}, \quad y_2 = 3 - \sqrt{17} \quad (\text{舍}),$$

经检验: $y_1 = 3 + \sqrt{17}$ 是原方程的解,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (1 + \sqrt{17}, 3 + \sqrt{17});$$

③如图 4, 四边形 $PCQB$ 是平行四边形,

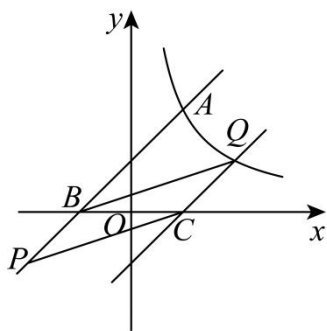


图4

$\therefore B, C$ 关于原点对称,

$\therefore P, Q$ 关于原点对称,

设点 Q 的坐标为 $(a, \frac{8}{a})$, 则点 P 的坐标为 $(-a, -\frac{8}{a})$,

$\therefore$ 点 P 在直线 $y_1 = x + 2$ 上,

$$\therefore -a + 2 = -\frac{8}{a},$$

解得: $a_1 = 4, \quad a_2 = -2,$

经检验: $a_1 = 4, \quad a_2 = -2$ 是原方程的解,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-4, -2)$;

综上, 点 P 的坐标为 $(0, 2)$ 或 $(1 + \sqrt{17}, 3 + \sqrt{17})$ 或 $(-4, -2)$.