

2024-2025 学年上海市长宁区八年级（下）期中数学试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 3 分，共计 18 分）

1. 下列方程组中，属于二元二次方程组的为（ ）

A.
$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -4 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x+\sqrt{y}=1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} 3x=2 \\ xy=4 \end{cases}$$

【答案】D

【解析】

【分析】根据一元一次方程组的定义对 A 进行判断；根据整式方程组的定义对 B、C 进行判断；根据二元二次方程组的定义对 D 进行判断.

【详解】解：A、两个方程都是二元一次方程，所组成的方程组为二元一次方程组，所以 A 选项不正确；

B、两个方程都是分式方程，所组成的方程组为分式方程组，所以 B 选项不正确；

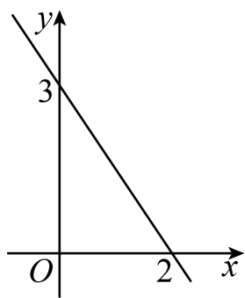
C、有一个方程是无理方程，所组成的方程组不是二元二次方程组，所以 C 选项不正确；

D、有一个方程是二元二次方程，另一个是一元一次方程，所组成的方程组为二元二次方程组，所以 D 选项正确.

故选 D.

【点睛】本题考查二元二次方程组：有两个二元二次方程或一个二元二次方程，一个一元一次方程所组成的方程组称为二元二次方程组.

2. 一次函数的图象如图所示，当 $y > 3$ 时， x 的取值范围是（ ）



A. $x < 0$

B. $x > 0$

C. $x < 2$

D. $x > 2$

【答案】A

【解析】

【分析】直接根据函数图象即可得出结论.

【详解】解：由函数图象可知，当 $x < 0$ 时， $y > 3$.

故选：A.

【点睛】 本题考查的是一次函数的性质，能利用数形结合求解是解题的关键.

3. 以下关于 x 的方程中，有实数根的是 ()

A. $x^2 + 2x + 3 = 0$ B. $x^4 - 2x^2 = 0$ C. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ D. $\sqrt{x+2} + 3 = 0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 由一元二次方程根的判别式可知 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 无实数根，判断 A 不符合题意；解方程 $x^4 - 2x^2 = 0$ 判断 B 符合题意；解方程 $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ 判断 C 不符合题意；由算术平方根的非负性判断 D 不符合题意.

【详解】 解：在 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 中， $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$,

$\therefore x^2 + 2x + 3 = 0$ 无实数根，故 A 不符合题意；

由 $x^4 - 2x^2 = 0$ 得 $x^2(x^2 - 2) = 0$,

$\therefore x = 0$ 或 $x = \pm\sqrt{2}$,

$\therefore x^4 - 2x^2 = 0$ 有实数根，故 B 符合题意；

由 $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ 可得 $x = 1$ ，但 $x = 1$ 是原方程的增根，

$\therefore \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ 无实数根，故 C 不符合题意；

由 $\sqrt{x+2} + 3 = 0$ 得 $\sqrt{x+2} = -3$,

$\therefore \sqrt{x+2} \geq 0$

$\therefore \sqrt{x+2} + 3 = 0$ 无实数根，故 D 不符合题意；

故选：B.

【点睛】 本题考查一元二次方程根的判别式，高次方程，无理方程和分式方程，解题的关键是掌握相关方程的解法.

4. 关于多边形，下列说法中正确的是 ()

- A. 过七边形一个顶点可以作 7 条对角线
- B. 凸多边形的外角和与边数成正比例关系
- C. 凸多边形的内角中最多只有 3 个锐角
- D. 凸多边形的内角和一定大于它的外角和

【答案】C

【解析】

【分析】根据多边形的内角和与外角和等有关知识进行判断即可.

【详解】解: A, 过七边形一个顶点可以作 4 条对角线, 故此选项不符合题意;

B, 凸多边形的外角和是 360° , 与边数无关, 故此选项不符合题意;

C, 凸多边形的内角中最多只有 3 个锐角, 故此选项符合题意;

D, 三角形的内角和小于它的外角和, 故此选项不符合题意.

故选: C.

【点睛】本题考查了多边形的内角与外角, 熟练掌握有关定理是解题的关键.

5. 方程组 $\begin{cases} x^2 - y = 2, \\ 2x - y = k \end{cases}$ 有实数解, 则 k 的取值范围是 ()

A. $k \geq 3$;

B. $k = 3$;

C. $k < 3$;

D. $k \leq 3$.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查根据二元二次方程组的解的情况, 求参数的范围, 将二元二次方程组转化为一元二次方程, 进行求解即可.

【详解】解: $\begin{cases} x^2 - y = 2 \text{ ①} \\ 2x - y = k \text{ ②} \end{cases}$,

由②, 得: $y = 2x - k$,

把 $y = 2x - k$ 代入①, 得: $x^2 - 2x + k = 2$, 即: $x^2 - 2x + k - 2 = 0$,

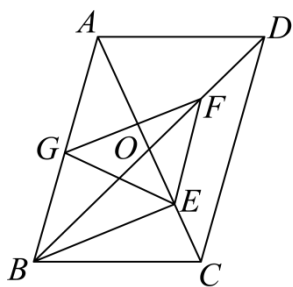
$\therefore$ 方程组有实数解,

$\therefore \Delta = 4 - 4(k - 2) \geq 0$,

$\therefore k \leq 3$;

故选 D.

6. 如图, $\square ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 相交于 O , $BD = 2AD$, E , F , G 分别是 OC , OD , AB 的中点, 下列结论: ① $BE \perp AC$; ② 四边形 $BEFG$ 是平行四边形; ③ $EG = GF$; ④ EA 平分 $\angle GEF$. 其中正确的是 ()



A. ①②③

B. ①②④

C. ①③④

D. ②③④

【答案】B

【解析】

【分析】由平行四边形的性质得到 $BO = \frac{1}{2}BD$ ， $AD = BC$ ，从而得到 $BO = BC$ ，根据等腰三角形的“三线合一”即可判断结论①；根据中位线定理得到 $EF \parallel CD$ ， $EF = \frac{1}{2}CD$ ，进而 $EF \parallel BG$ ， $EF = BG$ ，得证四边形 $BEFG$ 是平行四边形，即可判断结论②；根据直角三角形斜边上的中线的性质可得 $EG = EF$ ，但无法证明 $GE = GF$ ，即可判断结论③；由 $EF \parallel AB \parallel CD$ ，得到 $\angle BAC = \angle ACD = \angle AEF$ ，再根据 $AG = EG = \frac{1}{2}AB$ ，得到 $\angle GAE = \angle AEG$ ，从而 $\angle AEG = \angle AEF$ ，即可判断结论④。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore BO = DO = \frac{1}{2}BD, \quad AD = BC, \quad AB = CD, \quad AB \parallel BC,$$

$$\because BD = 2AD, \quad \text{即 } AD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BO = BC,$$

∵ 点 E 是 OC 中点，

∴ $BE \perp AC$ ，故①正确；

∵ E 、 F 分别是 OC 、 OD 的中点，

$$\therefore EF \parallel CD, \quad EF = \frac{1}{2}CD,$$

∵ 点 G 是 AB 上的中点，

$$\therefore BG = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore EF \parallel BG, \quad EF = BG,$$

∴ 四边形 $BEFG$ 是平行四边形，故结论②正确；

$$\because BE \perp AC, \quad \text{即 } \angle BEA = 90^\circ,$$

又点 G 是 AB 上的中点，

$$\therefore EG = \frac{1}{2}AB,$$

$\therefore EG = EF$ ，但无法证明 $GE = GF$ ，故结论③错误，

$$\therefore EF \parallel AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACD = \angle AEF,$$

$$\therefore AG = \frac{1}{2}AB, \quad EG = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore AG = EG,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle AEG,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle AEF,$$

$\therefore AE$ 平分 $\angle GEF$ ，故结论④正确。

故选：B

【点睛】本题考查平行四边形的判定及性质，中位线定理，直角三角形斜边上的中线的性质，等腰三角形的性质。综合运用相关知识是解题的关键。

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，共计 24 分）

7. 直线 $y = x - 7$ 在 y 轴上的截距是_____。

【答案】-7

【解析】

【分析】根据在 y 轴上的截距就是与 y 轴交点的纵坐标的值即可解答。

【详解】解：在 $y = x - 7$ 中，令 $x = 0$ ，得 $y = -7$ 。

所以直线 $y = x - 7$ 在 y 轴上的截距是-7。

故答案为-7。

【点睛】本题主要考查截距的定义，即为与 y 轴交点的纵坐标的值，比较简单，需要熟练掌握。

8. 已知一次函数 $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ ，则 $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】1

【解析】

【分析】本题考查了函数值的求解，把自变量的值代入函数解析式计算即可求出结果。

把自变量 $x = -2$ 代入函数解析式进行计算即可得解。

【详解】解： $f(-2) = \frac{1}{2} \times (-2) + 2 = -1 + 2 = 1$ 。

故答案为：1。

9. 将直线 $y = -2x - 4$ 向上平移 5 个单位，所得直线的表达式是_____。

【答案】 $y=-2x+1$

【解析】

【分析】 根据“左加右减、上加下减”的函数图象平移规律来解答.

【详解】 解: 直线 $y=-2x-4$ 向上平移 5 个单位后, 所得直线的表达式是 $y=-2x-4+5$, 即 $y=-2x+1$,
故答案为 $y=-2x+1$.

【点睛】 本题考查的是一次函数图象变换的应用, 熟知“左加右减、上加下减”的原则是解答此题的关键.

10. 某商品原价为 180 元, 连续两次提价后售价为 300 元, 且每次提价的百分率相等, 设每次提价的百分率为 x , 依题意可列方程_____.

【答案】 $180(1+x)^2=300$

【解析】

【分析】 根据该商品的原价及经过两次提价后的价格, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 此题得解.

【详解】 解: 依题意得: $180(1+x)^2=300$.

故答案为: $180(1+x)^2=300$.

【点睛】 本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解题的关键.

11. 已知: 点 $A(-1, a)$ 、 $B(1, b)$ 在函数 $y=-2x+m$ 的图象上, 则 a _____ b (在横线上填写“>”或“=”或“<”).

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 根据一次函数 $y=kx+b$ 的性质, 当 $k<0$ 时, y 将随 x 的增大而减小, 即可得出 a , b 的大小关系即可.

【详解】 解: $\because k=-2<0$,
 $\therefore y$ 将随 x 的增大而减小,
 $\because -1<1$,
 $\therefore a>b$.
故答案为: $>$.

【点睛】 此题主要考查了一次函数的增减性, 比较简单. 解答此题的关键是熟知一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$

的增减性, 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

12. 如果关于 x 的方程 $(a-1)x=3$ 有解, 那么字母 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \neq 1$

【解析】

【分析】 根据一元一次方程未知数前系数不为 0 得到 $a-1 \neq 0$ 由此求解.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $(a-1)x=3$ 有解,

$$\therefore a-1 \neq 0,$$

解得: $a \neq 1$;

故答案是: $a \neq 1$.

【点睛】 本题考查了一元一次方程的解. 注意: 一元一次方程的未知数的系数不为零.:

13. 二项方程 $\frac{1}{2}x^5 - 16 = 0$ 的实数根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 先移项得到 $\frac{1}{2}x^5 = 16$, 推出 $x^5 = 32$, 根据 $2^5 = 32$ 即可求出答案.

【详解】 $\frac{1}{2}x^5 - 16 = 0$,

$$\frac{1}{2}x^5 = 16,$$

$$x^5 = 32,$$

$$\because 2^5 = 32,$$

$$\therefore x = 2,$$

故答案为: $x = 2$.

【点睛】 此题考查解高次方程, 掌握解方程的步骤, 正确计算数的高次方是解题的关键.

14. 用换元法解分式方程 $\frac{x-2}{x} - \frac{3x}{x-2} - 2 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x-2}{x} = y$, 则原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 2y - 3 = 0$;

【解析】

【分析】 如果设 $\frac{x-2}{x} = y$, 那么 $\frac{x}{x-2} = \frac{1}{y}$, 原方程变为: $y - \frac{3}{y} - 2 = 0$, 方程两边乘最简公分母 y , 可以

把分式方程转化为整式方程.

【详解】解：设 $\frac{x-2}{x} = y$,

原方程变为 $y - \frac{3}{y} - 2 = 0$,

方程两边都乘 y 得 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

故原方程可化为关于 y 的整式方程是 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

故答案为 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

【点睛】本题考查用换元法使分式方程简便. 换元后再在方程两边乘最简公分母可以把分式方程转化为整式方程. 应注意换元后的字母系数.

15. 方程 $(x+1)\sqrt{x-2} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x=2$

【解析】

【详解】试题解析： $(x+1)\sqrt{x-2} = 0$,

$\therefore x+1=0$ 或 $\sqrt{x-2} = 0$.

解得： $x = -1$ 或 $x = 2$.

当 $x = -1$ 时, $\sqrt{x-2}$ 不成立, 故舍去.

故答案为 $x = 2$.

16. 已知一次函数 $y = kx + k - 1$ (其中 k 为常数且 $k \neq 0$) 的图象不经过第二象限, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $0 < k \leq 1$

【解析】

【分析】本题主要考查一次函数图象在坐标平面内的位置与 k 、 b 的关系, 掌握一次函数经过象限与 k 、 b 的关系成为解题的关键.

直接根据图象在坐标平面内的位置关系确定 k 的取值范围, 进而完成解答.

【详解】解：一次函数 $y = kx + k - 1$ (其中 k 为常数且 $k \neq 0$) 的图象不经过第二象限,

则可能是经过一、三象限或一、三、四象限,

经过一、三象限时, $k > 0$ 且 $k - 1 = 0$, 此时 $k = 1$,

经过一、三、四象限时, $k > 0$ 且 $k - 1 < 0$. 此时 $0 < k < 1$,

综上所述, k 的取值范围是: $0 < k \leq 1$.

故答案为: $0 < k \leq 1$.

17. 若一个多边形内角和与外角和的比为 $9:2$, 则这个多边形的边数是_____.

【答案】 11

【解析】

【分析】 根据多边形的外角和是 360° , 可得此多边形的内角和是 $360^\circ \times \frac{9}{2}$, 再由 n 边形的内角和是

$(n-2) \cdot 180^\circ$ 可得关于 n 的方程, 求解后即可求出边数 n .

【详解】 解: 设这个多边形是 n 边形, $\because$ 多边形内角和与外角和的比为 $9:2$,

$$\therefore (n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ \times \frac{9}{2},$$

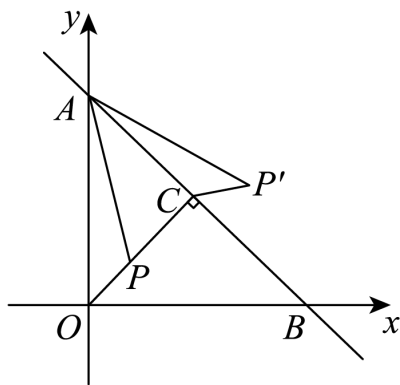
解得 $n = 11$.

$\therefore$ 此多边形的边数为 11.

故答案为: 11.

【点睛】 本题考查了多边形的内角和与外角和, 解题的关键是利用多边形的内角和公式将问题转化为解方程的问题解决.

18. 如图, 直线 $y = -x + 4$ 与坐标轴分别交于 A , B 两点, $OC \perp AB$ 于点 C , P 是线段 OC 上一个动点, 连接 AP , 将线段 AP 绕点 A 逆时针旋转 45° , 得到线段 AP' , 连接 CP' , 则线段 CP' 的最小值为_____.



【答案】 $2\sqrt{2} - 2$

【解析】

【分析】 由点 P 的运动确定 P' 的运动轨迹是在与 x 轴垂直的一段线段 MN , 当线段 CP' 与 MN 垂直时, 线段 CP' 的值最小.

【详解】 解: 由已知可得 $A(0, 4)$, $B(4, 0)$,

$\therefore$ 三角形 OAB 是等腰直角三角形, $AB = 4\sqrt{2}$,

$\because OC \perp AB$,

$\therefore C(2,2)$,

又 $\because P$ 是线段 OC 上动点, 将线段 AP 绕点 A 逆时针旋转 45° ,

$\therefore P$ 在线段 OC 上运动, 所以 P' 的运动轨迹也是线段,

当 P 在 O 点时和 P 在 C 点时分别确定 P' 的起点与终点,

$\therefore P'$ 的运动轨迹是在与 x 轴垂直的一段线段 MN ,

$\therefore$ 当线段 CP' 与 MN 垂直时, 线段 CP' 的值最小,

在 AOB 中, $AO = AN = 4$, $AB = 4\sqrt{2}$,

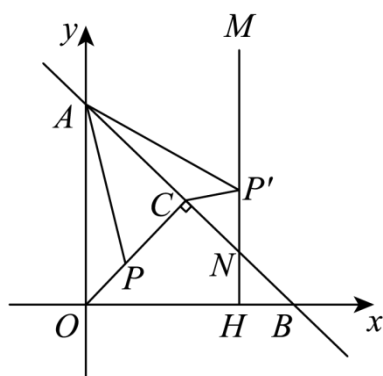
$\therefore NB = 4\sqrt{2} - 4$,

又 $\because Rt\triangle HBN$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore HB = \sqrt{\frac{(4\sqrt{2}-4)^2}{2}} = 4 - 2\sqrt{2},$$

$$\therefore CP' = OB - BH - 2 = 4 - (4 - 2\sqrt{2}) - 2 = 2\sqrt{2} - 2,$$

故答案为: $2\sqrt{2} - 2$.



【点睛】本题考查了勾股定理、一次函数图象上点的坐标特点, 动点运动

轨迹的判断, 垂线段最短, 熟练掌握一次函数图象的性质是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 8 题, 19-23 每题 6 分, 24、25 每题 8 分, 26 题 12 分, 共计 58 分)

19. 解方程: $\frac{1}{1-x} = \frac{2}{x+1} - 1$.

【答案】 $x=0$ 或 $x=3$.

【解析】

【分析】把原方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到原方程的解.

【详解】解: 两边乘以 $(1+x)(1-x)$ 并整理得:

$$x^2-3x=0,$$

解之可得: $x=0$ 或 $x=3$,

经检验 $x=0$, $x=3$ 都是原方程的解.

【点睛】 本题考查分式方程的综合应用, 熟练掌握分式方程的解题步骤和方法、一元二次方程的解法是解题关键.

20. 解方程: $6-2\sqrt{x-3}=x$.

【答案】 $x=4$

【解析】

【分析】 本题考查无理方程. 原方程可变形为 $6-x=2\sqrt{x-3}$, 然后两边平方, 即可转化成整式方程求得 x 的值, 然后代入方程检验即可. 在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法,

【详解】 解: 原方程可变形为 $6-x=2\sqrt{x-3}$,

方程两边平方, 得 $(6-x)^2=4(x-3)$,

整理, 得 $x^2-16x+48=0$,

解这个方程, 得 $x_1=4$, $x_2=12$,

检验: 把 $x=4$ 代入原方程的两边, 左边 $=6-2\sqrt{4-3}=4$, 右边 $=4$, 左边 = 右边, 可知 $x=4$ 是原方程的根,

把 $x=12$ 代入原方程的两边, 左边 $=6-2\sqrt{12-3}=0$, 右边 $=12$, 左边 $\neq$ 右边, 可知 $x=12$ 是增根, 应舍去,

所以, 原方程的根是 $x=4$.

21. 解方程组:
$$\begin{cases} 4x^2-y^2=0 & \text{①} \\ x^2-xy+4=0 & \text{②} \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=4 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-4 \end{cases}.$$

【解析】

【分析】 首先对方程 (1) 进行因式分解, 经分析得: $2x+y=0$ 或 $2x-y=0$, 然后与方程 (2) 重新组合成两个方程组, 解这两个方程组即可.

【详解】 解: 由方程 ①, 得 $2x+y=0$ 或 $2x-y=0$.

将它们与方程 ② 分别组成方程组, 得:

$$(I) \begin{cases} 2x+y=0 \\ x^2-xy+4=0 \end{cases} \text{ 或 } (II) \begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2-xy+4=0 \end{cases},$$

方程组 (I), 无实数解;

$$\text{解方程组 (II), 得 } \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}, \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases},$$

$$\text{所以, 原方程组的解是 } \begin{cases} x_1=2 \\ y_1=4 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-4 \end{cases}.$$

【点睛】此题考查了解二元二次方程组, 解题的关键在于正确的对原方程的两个方程进行因式分解.

$$22. \text{ 用换元法解方程组 } \begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 8 \\ \frac{2}{x+y} - \frac{1}{x-y} = 7 \end{cases}.$$

$$\text{【答案】} \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

【解析】

【分析】本题考查了解二元一次方程组, 掌握换元法解方程组是解答本题的关键. 设 $\frac{1}{x+y} = m$, $\frac{1}{x-y} = n$,

方程组可化为 $\begin{cases} 3m+n=8 \\ 2m-n=7 \end{cases}$, 据此可得 m 、 n 的值, 再代入计算即可.

【详解】解: 设 $\frac{1}{x+y} = m$, $\frac{1}{x-y} = n$,

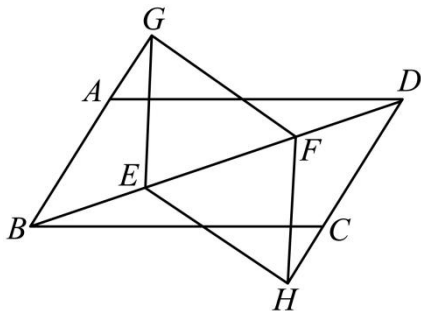
方程组可化为 $\begin{cases} 3m+n=8 \\ 2m-n=7 \end{cases}$,

$$\text{解得 } \begin{cases} m=3 \\ n=-1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} 3x+3y=1 \\ -x+y=1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

23. 已知在 $\square ABCD$ 中, E 、 F 是对角线 BD 上的两点, $BE = DF$, 点 G 、 H 分别在 BA 和 DC 的延长线上, 且 $AG = CH$, 连接 GE 、 EH 、 HF 、 FG . 求证: 四边形 $GEHF$ 是平行四边形.



【答案】证明见解析

【解析】

【分析】由条件可证明 $\triangle BEG \cong \triangle DFH$, 可得到 $GE = HF$, $\angle BEG = \angle DFH$, 可证得 $GE \parallel HF$, 可证得结论.

【详解】证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CDF,$$

$$\because AG = CH,$$

$$\therefore AG + AB = CD + CH,$$

$$\text{即 } BG = DH,$$

在 $\triangle BEG$ 与 $\triangle DFH$ 中,

$$\begin{cases} BG = DH \\ \angle GBD = \angle HDF, \\ BE = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BEG \cong \triangle DFH \quad (\text{SAS}),$$

$$\therefore GE = HF, \angle BEG = \angle DFH,$$

$$\therefore GE \parallel HF.$$

$\therefore$ 四边形 $GEHF$ 是平行四边形.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质与判定, 全等三角形的性质与判定, 平行线的判定, 掌握平行四边形的性质与判定是解题的关键.

24. 某校青年教师准备捐款 3600 元为敬老院的老年人购买一台电脑，这笔钱大家平均承担．实际捐款时又多了 2 名教师，因为购买电脑所需的总费用不变，于是每人少捐 90 元．问共有多少人参加捐款？原计划每人捐款多少元？．

【答案】共有 10 人参加捐款，原计划每人捐款 450 元．

【解析】

【分析】设实际共有 x 人参加捐款，那么原来有 $(x-2)$ 人参加捐款，根据：原来捐款的平均数-实际捐款平均数=90，列分式方程求解．

【详解】解：设实际共有 x 人参加捐款，那么原来有 $(x-2)$ 人参加捐款，实际每人捐款 $\frac{3600}{x}$ (元)，原计划每

人捐款 $\frac{3600}{x-2}$ (元)，

依据题意，得 $\frac{3600}{x-2} - \frac{3600}{x} = 90$ ，

即 $\frac{40}{x-2} - \frac{40}{x} = 1$ ，

两边同乘以 $x(x-2)$ ，再整理，得 $x^2 - 2x - 80 = 0$ ，

解得 $x_1 = 10$ ， $x_2 = -8$ ，

经检验， $x_1 = 10$ ， $x_2 = -8$ 都是原方程的根，

但人数不能为负数，所以取 $x = 10$ ，

当 $x = 10$ 时， $\frac{3600}{x-2} = \frac{3600}{10-2} = 450$ (元)，

答：共有 10 人参加捐款，原计划每人捐款 450 元．

【点睛】本题考查了分式方程的应用．利用分式方程解应用题时，一般题目中会有两个相等关系，这时要根据题目所要解决的问题，选择其中的一个相等关系作为列方程的依据，而另一个则用来设未知数．

25. 《九章算术》中记载，浮箭漏（图①）出现于汉武帝时期，它由供水壶和箭壶组成，箭壶内装有箭尺，水匀速地从供水壶流到箭壶，箭壶中的水位逐渐上升，箭尺匀速上浮，可通过读取箭尺读数计算时间，某学校 STEAM 小组仿制了一套浮箭漏，并从函数角度进行了如下实验探究：

【实验观察】实验小组通过观察，每 2 小时记录次箭尺读数，得到下表：

供水时间 x (小时)	0	2	4	6	8
箭尺读数 y (厘米)	6	18	30	42	54

【探索发现】(1)建立平面直角坐标系，如图②，横轴表示供水时间 x ．纵轴表示箭尺读数 y ，描出以表格中

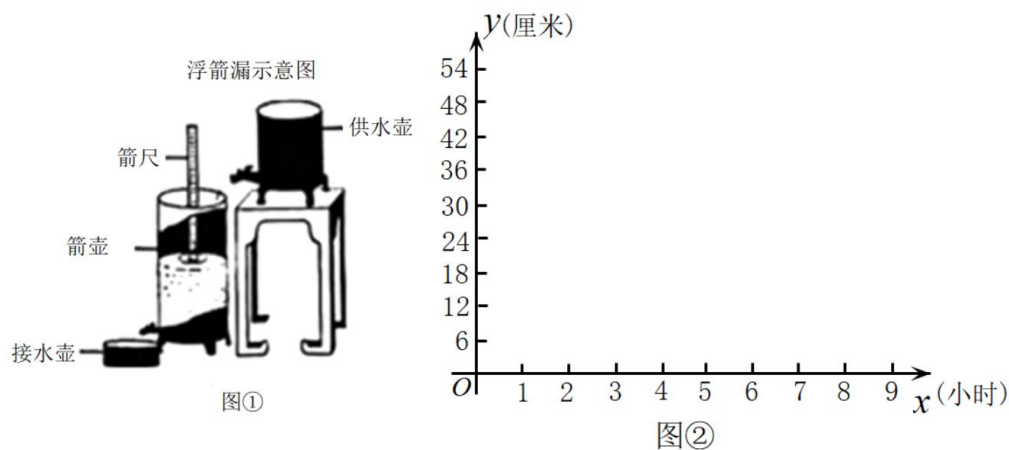
数据为坐标的各点.

(2)观察上述各点的分布规律,判断它们是否在同一条直线上,如果在同一条直线上,求出这条直线所对应的函数表达式,如果不在同一条直线上,说明理由.

【结论应用】应用上述发现的规律估算:

(3)供水时间达到 12 小时时,箭尺的读数为多少厘米?

(4)如果本次实验记录的开始时间是上午 8:00,那么当箭尺读数为 90 厘米时是几点钟? (箭尺最大读数为 100 厘米)



【答案】(1)见解析; (2)在同一直线上, 解析式为 $y = 6x + 6$; (3) $78(cm)$; (4)当天晚上的22:00.

【解析】

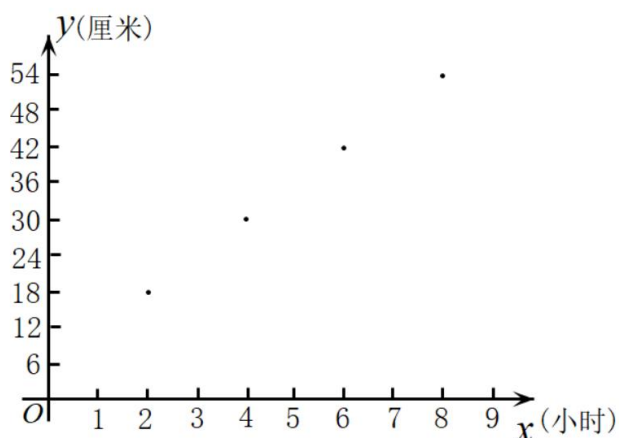
【分析】(1)将各点在坐标系中直接描出即可;

(2)观察发现, 供水时间每增加 2 小时, 箭尺读数增加 $12cm$, 由此可判断它们在同以直线上, 设直线解析式为 $y = kx + b$, 再代入两个点坐标即可求解;

(3)当 $x = 12$ 时代入(2)中解析式即可求出箭尺的读数;

(4)当 $y = 90$ 时代入(2)中解析式即可求出供水时间, 再结合实验开始时间为 8:00 即可求解.

【详解】解: (1)将表格中各点在直角坐标系中描出来如下图所示:



图②

(2)分析表格中数据发现，供水时间每增加 2 小时，箭尺读数增加 12cm ，观察(1)中直角坐标系点的特点，发现它们位于同一直线上，

设直线解析式为 $y = kx + b$ ，代入点(0, 6)和点(2, 18)，

$$\text{得到 } \begin{cases} 6 = 0 + b \\ 18 = 2k + b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 6 \\ b = 6 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线的表达式为: $y = 6x + 6$;

(3)当供水时间达到 12 小时时，即 $x = 12$ 时，代入 $y = 6x + 6$ 中，

$$\text{解得 } y = 6 \times 12 + 6 = 78 \text{ cm},$$

$\therefore$ 此时箭尺的读数为 78cm ;

(4)当箭尺读数为 90 厘米时，即 $y = 90$ 时，代入 $y = 6x + 6$ 中，

$$\text{解得 } x = (90 - 6) \div 6 = 14 \text{ (小时)},$$

$\therefore$ 经过 14 小时后箭尺读数为 90 厘米，

$\therefore$ 实验记录的开始时间是上午 8:00，

$\therefore$ 箭尺读数为 90 厘米时对应的时间为 $8 + 14 = 22$ ，即对应当天晚上的 22:00.

【点睛】 本题考查待定系数法求一次函数的解析式、一次函数的实际问题，读懂题目，掌握一次函数的图形及性质是解决本题的关键.

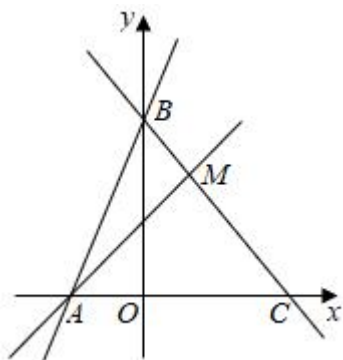
26. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = \frac{5}{2}x + 5$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，过点 B 的另一直线交 x

轴正半轴于 C ，且 $\triangle ABC$ 面积为 15.

(1) 求点 C 的坐标及直线 BC 的表达式;

(2) 若 M 为线段 BC 上一点, 且 $\triangle ABM$ 的面积等于 $\triangle AOB$ 的面积, 求 M 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 点 E 为直线 AM 上一动点, 在 x 轴上是否存在点 D , 使以点 D 、 E 、 B 、 C 为顶点的四边形为平行四边形? 若存在, 直接写出点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



【答案】 (1) $C(4, 0)$, $y = -\frac{5}{4}x + 5$; (2) $M(\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$; (3) 存在, 满足条件的点 D 的坐标为 $(7, 0)$ 或 $(-11, 0)$ 或 $(1, 0)$.

【解析】

【分析】 (1) 先求出 A 、 B 的坐标, 然后根据三角形的面积求出 C , 设直线 BC 的表达式为 $y = kx + b$, 将 B 、 C 的坐标代入求解即可;

(2) 根据 $S_{\triangle ACM} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABO}$ 求解即可;

(3) 设直线 AM 的表达式为 $y = k_1x + b_1$, 求出 AM 的解析式, 然后分三种情况: ①当 BC 为平行四边形的边, 四边形 $BCDE$ 为平行四边形时; ②当 BC 为平行四边形的边, 四边形 $BDEC$ 为平行四边形时; ③当 BC 为平行四边形的对角线时, 讨论求解即可.

【详解】 解: (1) 直线 $y = \frac{5}{2}x + 5$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B ,

$$\therefore A(-2, 0), B(0, 5),$$

$$\text{即 } OA = 2, OB = 5,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 面积为 } 15,$$

$$\therefore \frac{1}{2} (OA + OC) \cdot OB = 15,$$

$$\therefore OC = 4,$$

$$\therefore C(4, 0),$$

设直线 BC 的表达式为 $y = kx + b$,

将点 B 、 C 的坐标代入一次函数表达式得:
$$\begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{5}{4} \\ b = 5 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为: $y = -\frac{5}{4}x + 5$;

$$(2) \because S_{\triangle ACM} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABO} = 15 - \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 10,$$

$$\therefore S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} \times 6 \times y_m = 10, \text{ 解得: } y_m = \frac{10}{3},$$

$$\therefore \frac{10}{3} = -\frac{5}{4}x + 5$$

$$\text{解得: } x_m = \frac{4}{3},$$

$$\therefore M \left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3} \right);$$

$$(3) \because A(-2, 0), M \left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3} \right),$$

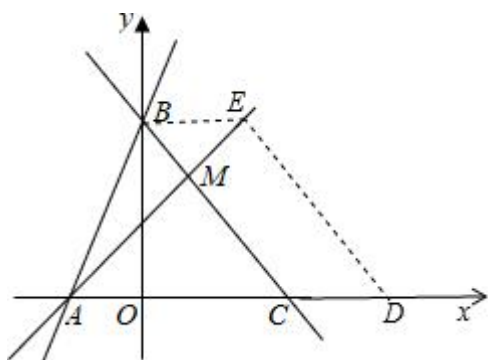
设直线 AM 的表达式为 $y = k_1x + b_1$,

$$\text{将点 } A、M \text{ 的坐标代入一次函数表达式得: } \begin{cases} -2k_1 + b_1 = 0 \\ \frac{4}{3}k_1 + b_1 = \frac{10}{3} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = 1 \\ b_1 = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AM 的表达式为: $y = x + 2$.

①当 BC 为平行四边形的边, 四边形 $BCDE$ 为平行四边形时, 如图:



$$\because B(0, 5), BE \parallel CD, BE = CD,$$

$\therefore$ 点 E 的纵坐标是 5,

$\because$ 点 E 为直线 AM 上一动点, 直线 AM 的表达式为: $y = x + 2$.

$$\therefore x + 2 = 5, \text{ 解得: } x = 3,$$

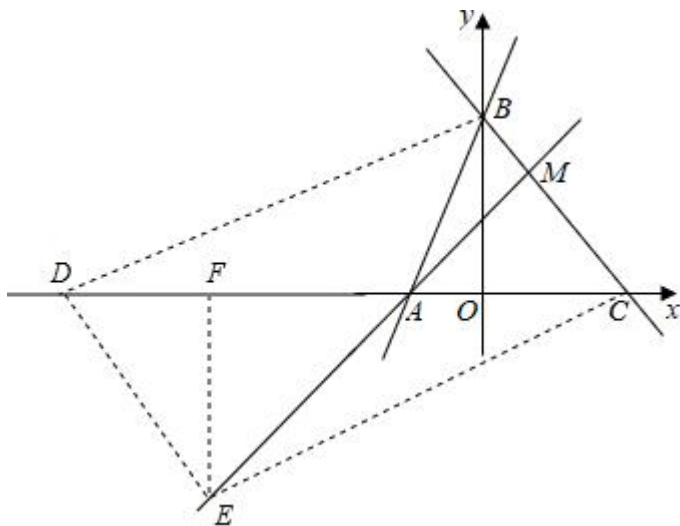
$$\therefore E(3, 5),$$

$$\therefore BE = CD = 3,$$

$$\because C(4, 0),$$

$$\therefore D(7, 0);$$

②当 BC 为平行四边形的边，四边形 $BDEC$ 为平行四边形时，如图：过点 E 作 $EF \perp x$ 轴于 F ,



$\because$ 四边形 $BDEC$ 为平行四边形,

$$\therefore BC = ED, \angle DBC = \angle CED, BD = EC,$$

$$\therefore \triangle BDC \cong \triangle ECD \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EF = OB,$$

$$\because B(0, 5),$$

$$\therefore EF = OB = 5,$$

$\therefore$ 点 E 的纵坐标是 -5 ,

$\because$ 点 E 为直线 AM 上一动点，直线 AM 的表达式为: $y = x + 2$.

$$\therefore x + 2 = -5, \text{ 解得: } x = -7,$$

$$\therefore OF = 7,$$

在 $Rt\triangle BOC$ 和 $Rt\triangle EFD$ 中,

$$\begin{cases} BC = ED \\ OB = FE \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle BOC \cong Rt\triangle EFD \text{ (HL)},$$

$$\therefore DF = OC,$$

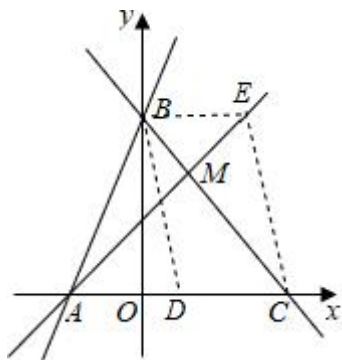
$$\because C(4, 0),$$

$$\therefore DF = 4,$$

$$\therefore OD = 4 + 7 = 11,$$

$$\therefore D(-11, 0);$$

③当 BC 为平行四边形的对角线时,



$$\because B(0, 5), BE \parallel CD, BE = CD,$$

$\therefore$ 点 E 的纵坐标是 5,

$\because$ 点 E 为直线 AM 上一动点, 直线 AM 的表达式为: $y = x + 2$.

$$\therefore x + 2 = 5, \text{ 解得: } x = 3,$$

$$\therefore E(3, 5),$$

$$\therefore BE = CD = 3,$$

$$\because C(4, 0),$$

$$\therefore D(1, 0).$$

综上, 存在, 满足条件的点 D 的坐标为 $(7, 0)$ 或 $(-11, 0)$ 或 $(1, 0)$.

【点睛】 本题主要考查了一次函数的综合题, 待定系数法求一次函数解析式, 全等三角形的性质与判定, 平行四边形的性质与判定, 解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行求解.