

2024 学年第二学期 期中阶段练习

八年级 数学学科

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. 在下列函数中, y 是 x 的一次函数的是 ()

A. $y = kx + b$ (k 、 b 是常数)

B. $2x + 7y = 1$

C. $y = \frac{1}{x} + 4$

D. $y = 2x^2 - 1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的定义 (识别一次函数), 熟练掌握一次函数的定义及一般形式是解题的关键:

1、一次函数的一般形式为 $y = kx + b$, 其中 k , b 为常数, $k \neq 0$; 2、一次函数的一般形式的结构特征:

(1) $k \neq 0$, (2) x 的次数是 1, (3) 常数 b 可以为任意实数; 3、注意: ①正比例函数是一次函数, 但一次函数不一定是正比例函数; ②一般情况下, 一次函数的自变量的取值范围是全体实数; ③如果一个函数是一次函数, 那么含有自变量 x 的式子是一次的, 系数 k 不等于 0, 而 b 可以为任意实数; ④判断一个函数是不是一次函数, 就是判断它是否能化成 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的形式; ⑤一次函数的一般形式可以转化为含 x 、 y 的二元一次方程.

根据一次函数的定义及一般形式逐项分析判断即可.

【详解】解: A. $y = kx + b$ (k 、 b 是常数), 当 $k = 0$ 时, y 不是 x 的一次函数, 故选项 A 不符合题意;

B. $2x + 7y = 1$, 可化为 $y = -\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}$, y 是 x 的一次函数, 故选项 B 符合题意;

C. $y = \frac{1}{x} + 4$, y 不是 x 的一次函数, 故选项 C 不符合题意;

D. $y = 2x^2 - 1$, y 不是 x 的一次函数, 故选项 D 不符合题意;

故选: B.

2. 下列说法正确的是 ()

A. $x^3 + 3x = 0$ 是二项方程

B. $x^2 + \sqrt{2}x - 3 = 0$ 是无理方程

C. $\frac{x^2 - x}{3} = 2$ 是分式方程

D. $2x^2 + y = 3$ 是二元二次方程

【答案】D

【解析】

【分析】根据二项方程的定义，无理方程的定义，二元二次方程的定义，分式方程的定义逐个判断即可.

【详解】解：A. 方程的左边两项都含未知数，故本选项不符合题意；

B. 根号内没有未知数，不是无理方程，故本选项不符合题意；

C. 分母中不能未知数，不是分式方程，故本选项不符合题意；

D. 方程是二元二次方程，故本选项符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了二项方程、无理方程、二元二次方程、分式方程的定义等知识点，注意：根号内含有未知数的方程，叫无理方程，分母中含有未知数的方程，叫分式方程.

3. 在平面直角坐标系中，若直线 $y = kx + 1$ 不经过第四象限，则关于 x 的方程 $x^2 + x - k = 0$ 的实数根的情况为 ()

A. 无解

B. 两个不相等的实数根

C. 两个相等的实数根

D. 无法确定

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的性质，根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根. 由直线解析式求得 $k \geq 0$ ，然后确定 Δ 的符号即可.

【详解】解：∵ 直线 $y = kx + 1$ 不经过第四象限，

$$\therefore k \geq 0,$$

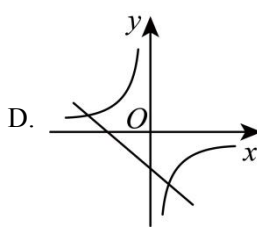
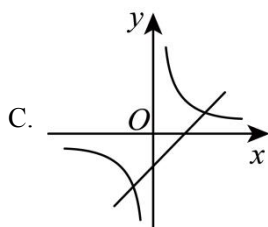
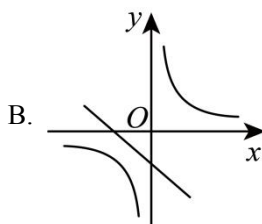
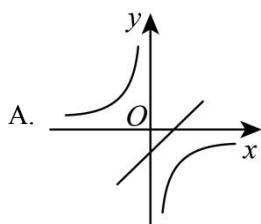
∴ 关于 x 的方程 $x^2 + x - k = 0$,

$$\therefore \Delta = 1^2 + 4k > 0,$$

∴ 关于 x 的方程 $x^2 + x - k = 0$ 有两个不相等的实数根.

故选：B.

4. 关于 x 的函数 $y = k(x + 1)$ 和 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在同一坐标系中的图象大致是()



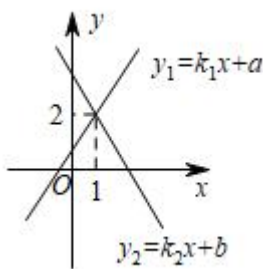
【答案】D

【解析】

【详解】试题分析：当 $k > 0$ 时，函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像在一三象限，函数 $y = k(x+1) = kx + k$ 的图像经过一二三象限，所以选项 A、C 错误；当 $k < 0$ 时，函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像在二四象限，函数 $y = k(x+1) = kx + k$ 的图像经过二三四象限，所以选项 B 错误，选项 D 正确，故选 D.

考点：1.一次函数图像；2.反比例函数的图像.

5. 如图，直线 $y_1 = k_1x + a$ 与 $y_2 = k_2x + b$ 的交点坐标为 $(1, 2)$ ，则使 $y_1 < y_2$ 的 x 的取值范围为 ()



A. $x > 1$

B. $x > 2$

C. $x < 2$

D. $x < 1$

【答案】D

【解析】

【分析】求使 $y_1 < y_2$ 的 x 的取值范围，即求对于相同的 x 的取值，直线 y_1 落在直线 y_2 的下方时，对应的 x 的取值范围. 直接观察图象，可得出结果.

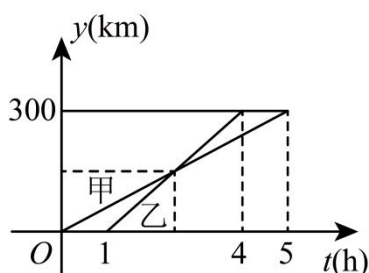
【详解】解：由图象可知，当 $x < 1$ 时，直线 y_1 落在直线 y_2 的下方，故使 $y_1 < y_2$ 的 x 的取值范围是： $x < 1$.

故选：D.

【点睛】本题考查了一次函数与不等式（组）的关系及数形结合思想的应用. 解决此类问题关键是仔细观

察图形，注意几个关键点（交点、原点等），做到数形结合.

6. 甲、乙两车从A城出发匀速行驶至B城，在整个行驶过程中，甲、乙两车离开A城的距离 $y(\text{km})$ 与甲车行驶的时间之间的函数关系式如图所示.



有下列结论：①A、B两城相距300km；②乙车比甲车晚出发1h，却早到1h；③乙车出发后2.5h追上甲；④当甲、乙两车相距50km时，甲车行驶了 $\frac{5}{4}$ h. 其中正确的结论有（ ）.

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意用待定系数法分别求出甲、乙的函数关系，图形结合分析即可求解.

【详解】解：根据题意可知，设甲车行驶的时间与离开A城的距离 $y(\text{km})$ 的函数关系为 $y_1 = k_1 t (k_1 \neq 0)$,

$$\therefore \text{当 } t = 5 \text{ 时, } y_1 = 300, \text{ 则 } k_1 = \frac{y_1}{t} = \frac{300}{5} = 60,$$

$$\therefore \text{甲的函数关系式为 } y_1 = 60t,$$

设乙车行驶的时间与离开A城的距离 $y(\text{km})$ 的函数关系为 $y_2 = k_2 t + b (k_2 \neq 0)$,

$$\therefore \text{当 } t = 1 \text{ 时, } y_2 = 0; \text{ 当 } t = 4 \text{ 时, } y_2 = 300;$$

$$\therefore \begin{cases} k_2 + b = 0 \\ 4k_2 + b = 300 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} k_2 = 100 \\ b = -100 \end{cases},$$

$$\therefore \text{乙的函数关系式为 } y_2 = 100t - 100,$$

$$\therefore \text{结论①A、B两城相距300km,}$$

根据图示可得，结论①正确；

结论②乙车比甲车晚出发1h，却早到1h，

根据图示可得，结论②正确；

结论③乙车出发后2.5h追上甲，

$$\text{令 } y_1 = y_2, \text{ 则 } \begin{cases} y = 60t \\ y = 100t - 100 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} t = 2.5 \\ y = 150 \end{cases},$$

$\therefore$ 当 $t = 2.5$ 时, 甲乙相遇, 乙行驶的时间为 $2.5 - 1 = 1.5$ (h),

$\therefore$ 乙车出发后 1.5h 追上甲, 故结论③错误;

结论④当甲、乙两车相距 50km 时, 甲车行驶了 $\frac{5}{4}$ h,

$$\text{令 } y_1 - y_2 = 50, \text{ 则 } 60t - (100t - 100) = 50, \text{ 解得, } t = \frac{5}{4},$$

$\therefore$ 当 $t = 2.5$ 时, 甲乙相遇,

$$\text{令相遇后 } y_2 - y_1 = 50, \text{ 则 } 100t - 100 - 60t = 50, \text{ 解得, } t = \frac{15}{4},$$

$\therefore$ 当 $y_1 = 50$ 时, $t = \frac{50}{60} = \frac{5}{6} < 1$, 此时乙还未出发; 当 $t = 4$ 时, 乙已经到达 B 地, 甲离 B 地的路程为

$$60 \times 4 = 240(\text{km}), \text{ 若甲、乙相距 } 50(\text{km}), \text{ 则甲需要行驶到 } y_1 = 250 \text{ 时, 则 } t = \frac{250}{60} = \frac{25}{6},$$

$\therefore$ 当 $t = \frac{5}{4}$ 或 $t = \frac{15}{4}$ 或 $t = \frac{5}{6}$ 或 $t = \frac{25}{6}$ 时, 甲、乙相距 50km, 故结论④错误;

综上所述, 正确的有①②,

故选: B.

【点睛】 本题主要考查一次函数与行程的综合运用, 掌握待定系数法求一次函数解析式, 图形结合分析是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 一次函数 $y = 2(x - 1) + 4$ 的图像在 y 轴上的截距是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 牢记直线在 y 轴上的截距是直线与 y 轴交点的纵坐标是解题的关键. 代入 $x = 0$ 求出 y 值, 此题得解.

【详解】 解: 代入 $x = 0$, 得

$$y = 2 \times (0 - 1) + 4 = 2.$$

故答案为: 2.

8. 方程 $\frac{1}{2}x^4 - 8 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$ 或 $x = -2$

【解析】

【分析】 本题考查了解高次方程，逐步降次是解答本题的关键。先求出 x^2 的值，再求 x 的值。

【详解】 解： $\because \frac{1}{2}x^4 - 8 = 0$,

$$\therefore \frac{1}{2}x^4 = 8,$$

$$\therefore x^4 = 16,$$

$$\therefore x^2 = 4 \text{ 或 } x^2 = -4 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore x = 2 \text{ 或 } x = -2.$$

故答案为： $x = 2$ 或 $x = -2$

9. 一次函数 $y = (2m-1)x + 2$ 的值随 x 值的增大而增大，则常数 m 的取值范围为_____.

【答案】 $m > \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据一次函数的性质得 $2m-1 > 0$ ，然后解不等式即可。

【详解】 解： 因为一次函数 $y = (2m-1)x + 2$ 的值随 x 值的增大而增大，

所以 $2m-1 > 0$.

解得 $m > \frac{1}{2}$.

故答案为： $m > \frac{1}{2}$.

【点睛】 本题考查了一次函数的性质： $k > 0$ ， y 随 x 的增大而增大，函数从左到右上升； $k < 0$ ， y 随 x 的增大而减小，函数从左到右下降。

10. 方程 $(x-2)\sqrt{x-3} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 2$ 或 $x = 3$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，由乘法法则得出 $x-2=0$ 或 $\sqrt{x-3}=0$ 是解答本题的关键。将原方程化为 $x-2=0$ 或 $\sqrt{x-3}=0$ 求解即可。

【详解】 解： $\because (x-2)\sqrt{x-3} = 0$

$$\therefore x-2=0 \text{ 或 } \sqrt{x-3}=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 或 } x=3.$$

故答案为: $x=2$ 或 $x=3$.

11. 如果关于 x 的无理方程 $\sqrt{x+2}+5+m=0$ 没有实数根, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > -5$

【解析】

【分析】 根据关于 x 的无理方程 $\sqrt{x+2}+5+m=0$ 没有实数根, 可知 $-5-m < 0$, 从而可以求得 k 的取值范围.

【详解】 由 $\sqrt{x+2}+5+m=0$ 可得, $\sqrt{x+2}=-5-m$,

$\therefore$ 关于 x 的无理方程 $\sqrt{x+2}+5+m=0$ 没有实数根,

$\therefore -5-m < 0$ 没有实数根,

解得, $m > -5$,

故答案为: $m > -5$.

【点睛】 本题考查无理方程, 解题的关键是明确无理方程的解答方法, 无实数根应满足什么条件.

12. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-1} + \frac{k}{x-1} = \frac{x}{x+1}$ 有增根 $x=1$, 则 $k=$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 先把分式方程化为整式方程得到 $(2+k)x+k=0$, 然后把 $x=1$ 代入得 $2+k+k=0$, 再解关于 k 的方程即可.

【详解】 解: 去分母得 $x(x+1)+k(x+1)=x(x-1)$,

整理得 $(2+k)x+k=0$,

把 $x=1$ 代入得 $2+k+k=0$, 解得 $k=-1$;

所以当 $k=-1$ 时, 原方程有增根 $x=1$.

故答案为 -1.

【点睛】 本题考查了分式方程的增根: 在分式方程变形时, 有可能产生不适合原方程的根, 即代入分式方程后分母的值为 0 或是转化后的整式方程的根恰好是原方程未知数的允许值之外的值的根, 叫做原方程的增根.

13. 已知方程 $\frac{x^2+1}{x} + \frac{3x}{x^2+1} = 2$, 如果设 $\frac{x}{x^2+1} = y$, 那么原方程可以变形为关于 y 的整式方程是

_____.

【答案】 $3y^2-2y+1=0$

【解析】

【分析】 根据 $\frac{x}{x^2+1}=y$ ，把原方程变形，再化为整式方程即可.

【详解】 解：设 $\frac{x}{x^2+1}=y$ ，

原方程变形为： $\frac{1}{y}+3y=2$ ，

化为整式方程为： $3y^2-2y+1=0$ ，

故答案为 $3y^2-2y+1=0$.

【点睛】 本题考查了用换元法解分式方程，掌握整体思想是解题的关键.

14. 某服装厂准备加工 400 套运动装，在加工完 160 套后，采用了新技术，使得工作效率比原计划提高了 20%，结果共用了 18 天完成任务，问计划每天加工服装多少套？在这个问题中，设计划每天加工 x 套，则根据题意可得方程为_____.

【答案】 $\frac{160}{x} + \frac{400-160}{(1+20\%)x} = 18$

【解析】

【分析】 根据题意，分别列出采用新技术前和采用新技术后所用时间，相加等于 18 即可.

【详解】 根据题意，采用新技术前所用时间为： $\frac{160}{x}$ 天，

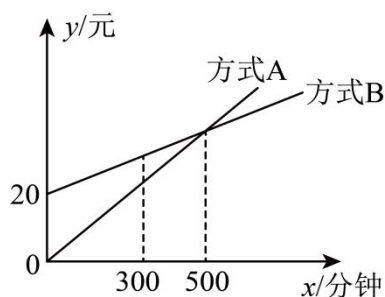
采用新技术后所用时间为： $\frac{400-160}{(1+20\%)x}$ 天，

$\therefore$ 所列方程为： $\frac{160}{x} + \frac{400-160}{(1+20\%)x} = 18$ ，

故答案为： $\frac{160}{x} + \frac{400-160}{(1+20\%)x} = 18$.

【点睛】 本题主要考查列分式方程，属于基础题，找出题目中的关键词，找到相应的等量关系是解决问题的关键.

15. 某电信公司为顾客提供了 A 、 B 两种手机上网方式，一个月的手机上网费用 y (元) 与上网时间 x (分钟) 之间的关系如图，如果一个月上网 300 分钟，那么方式 B 产生的费用比方式 A 高_____元.



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用，理解题意正确设出一次函数的解析式是解题的关键．设方式 A 的函数关系式为 $y_1 = k_1x$ ，方式 B 的函数关系式为 $y_2 = k_2x + 20$ ，由图象得，当 $x = 500$ 时， $y_1 = y_2$ ，求出 $k_2 - k_1$ 的值，再令 $x = 300$ ，求出此时 $y_2 - y_1$ 的值即可解答．

【详解】 解：设方式 A 的函数关系式为 $y_1 = k_1x$ ，方式 B 的函数关系式为 $y_2 = k_2x + 20$ ，

由图象得，当 $x = 500$ 时， $y_1 = y_2$ ，

$$\therefore 500k_1 = 500k_2 + 20,$$

$$\text{整理得： } k_2 - k_1 = -\frac{2}{50},$$

当 $x = 300$ 时，

$$y_2 - y_1$$

$$= 300k_2 + 20 - 300k_1$$

$$= 300(k_2 - k_1) + 20$$

$$= 300 \times \left(-\frac{2}{50}\right) + 20$$

$$= 8,$$

$\therefore$ 如果一个月上网 300 分钟，那么方式 B 产生的费用比方式 A 高 8 元．

故答案为：8．

16. 已知关于 x 的方程 $\frac{2x+m}{x-2} = 3$ 的解是正数，则 m 的取值范围为_____．

【答案】 $m > -6$ 且 $m \neq -4$

【解析】

【分析】先解分式方程得到方程的根为： $x = m + 6$ ，再根据方程的解为正数及分母不为 0，列不等式组，从而可得答案.

【详解】解：∵ $\frac{2x+m}{x-2}=3$,

$$\therefore 2x + m = 3x - 6,$$

解得： $x = m + 6$,

∵ 关于 x 的方程 $\frac{2x+m}{x-2} = 3$ 的解是正数,

$$\therefore m + 6 > 0 \text{ 且 } m + 6 \neq 2,$$

解得： $m > -6$ 且 $m \neq -4$.

故答案为： $m > -6$ 且 $m \neq -4$.

【点睛】本题考查的是根据分式方程的解的情况求解参数的取值范围，易错点是不注意分式方程产生增根时字母参数的取值要排除.

17. 对于两个不相等的有理数 a, b , 我们规定符号 $\text{Max}\{a, b\}$ 表示 a, b 中的较大值, 如: $\text{Max}\{2, 4\} = 4$,

按照这个规定, 方程 $\text{Max}\{-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\} = \frac{2}{3-x}$ 的解为_____.

【答案】 $x = 1$ 或 $x = -3$

【解析】

【分析】分类讨论 $-\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{x}$ 的大小情况, 利用题中的新定义得出对应方程, 求解即可.

【详解】解: (1) 当 $-\frac{1}{x} < \frac{1}{x}$ 时, 方程整理得: $\frac{1}{x} = \frac{2}{3-x}$,

去分母得: $3-x = 2x$,

解得: $x = 1$,

经检验 $x = 1$ 是分式方程的解;

(2) 当 $-\frac{1}{x} > \frac{1}{x}$ 时, 方程整理得: $-\frac{1}{x} = \frac{2}{3-x}$,

去分母到: $x-3 = 2x$,

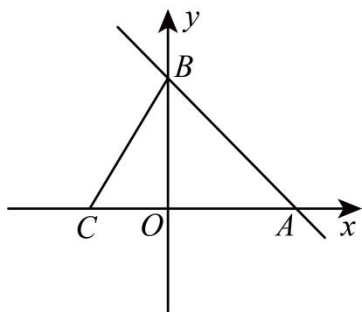
解得: $x = -3$,

经检验 $x = -3$ 是分式方程的解.

故答案为: $x = 1$ 或 $x = -3$.

【点睛】此题考查了解分式方程, 关键在于理解把新定义方程转化为对应的分式方程, 分情况讨论注意要验根, 避免增根.

18. 如图，一次函数 $y = -x + 1$ 的图象与 x 轴交于点 A 与 y 轴交于点 B ， C 是 x 轴上一动点，连接 BC ，将 ABC 沿 BC 所在的直线折叠，当点 A 落在 y 轴上时，点 C 的坐标为_____.



【答案】 $(-\sqrt{2}-1, 0)$ 或 $(\sqrt{2}-1, 0)$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的图象及性质，折叠的性质，勾股定理的应用；分两种情况讨论：当 A 点落在 y 轴正半轴上 A' 处时，在 $\text{Rt}\triangle A'CO$ 中， $(1-m)^2 = (1+\sqrt{2})^2 + m^2$ ，当 A 点落在 y 轴负半轴上 A' 处时，连结 AA' ， $A'C$ ，在 $\text{Rt}\triangle A'CO$ 中， $(1-m)^2 = (\sqrt{2}-1)^2 + m^2$ ，求出 m ，即可求解.

【详解】 解： $\because y = -x + 1$ 的图象与 x 轴交于点 A 与 y 轴交于点 B ，

当 $x = 0$ 时， $y = 1$ ，

当 $y = 0$ 时， $x = 1$ ，

$\therefore A(1, 0), B(0, 1)$ ，

$\therefore OA = 1, OB = 1$ ，

$\therefore AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ，

设 $C(m, 0)$ ，

如图 1，当 A 点落在 y 轴正半轴上 A' 处时，连接 AA' ， $A'C$ ，

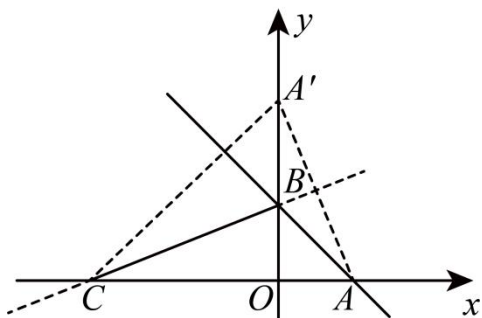


图1

$\because A$ 与 A' 关于 BC 对称,

$$\therefore AC = A'C, AB = A'B = \sqrt{2},$$

$$\therefore OA' = 1 + \sqrt{2},$$

$$\therefore AC = A'C = 1 - m,$$

在 $\text{Rt}\triangle A'CO$ 中, $(1-m)^2 = (1+\sqrt{2})^2 + m^2,$

$$\therefore m = -\sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore C(-\sqrt{2}-1, 0);$$

如图 2, 当 A 点落在 y 轴负半轴上 A' 处时, 连结 $AA', A'C$,

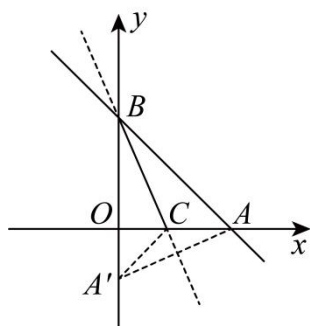


图2

由对称可得, $AC = A'C = 1 - m$, $A'B = AB = \sqrt{2}$,

$$\therefore OA' = A'B - OB = \sqrt{2} - 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle A'CO$ 中, $(1-m)^2 = (\sqrt{2}-1)^2 + m^2,$

$$\therefore m = \sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore C(\sqrt{2}-1, 0);$$

综上所述: C 点坐标为 $(-\sqrt{2}-1, 0)$ 或 $(\sqrt{2}-1, 0)$,

故答案为: $(-\sqrt{2}-1, 0)$ 或 $(\sqrt{2}-1, 0)$.

三、简答题 (本大题共 4 题, 每题 6 分, 满分 24 分)

19. 解方程: $\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{1}{x} = 1$

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = 3$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，熟练掌握分式方程的解法是解答本题的关键．两边都乘以 $x^2 - 2x$ 化为整式方程求解，然后检验．

【详解】 解： $\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{1}{x} = 1$

两边都乘以 $x^2 - 2x$ ，得

$$x-1+x-2=x^2-2x$$

解得 $x_1 = 1, x_2 = 3$

检验：当 $x = 1$ 时， $x^2 - 2x \neq 0$ ，符合题意

当 $x = 3$ 时， $x^2 - 2x \neq 0$ ，符合题意

$\therefore x_1 = 1, x_2 = 3$ 是原方程的解

20. 解方程： $\sqrt{x+2} + 6 = 2x$

【答案】 $x = \frac{17}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，熟练掌握无理方程的解法是解答本题的关键．先把 6 移项，然后两边平方求解即可．

【详解】 解： $\because \sqrt{x+2} + 6 = 2x$

$$\therefore \sqrt{x+2} = 2x - 6$$

$$\therefore (\sqrt{x+2})^2 = (2x-6)^2$$

$$\therefore x+2 = 4x^2 - 24x + 36$$

$$\therefore 4x^2 - 25x + 34 = 0$$

$$\therefore (x-2)(4x-17) = 0$$

$$\therefore x-2 = 0 \text{ 或 } 4x-17 = 0$$

$$\therefore x_1 = 2, x_2 = \frac{17}{4},$$

$$\because \sqrt{x+2} \geq 0,$$

$$\therefore 2x-6 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq 3,$$

$$\therefore x = \frac{17}{4}.$$

21. 解方程组
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ (x-y)^2 - 2(x-y) - 3 = 0 \end{cases}.$$

【答案】方程组的解为
$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} \\ y_1 = -\frac{4}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

【解析】

【分析】把 $(x-y)^2 - 2(x-y) - 3 = 0$ 用因式分解法化为 $x-y=3$ 或 $x-y=-1$ ，从而即可得到两个新的方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x-y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ ，解之即可得到答案.

【详解】解：
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \text{ ①} \\ (x-y)^2 - 2(x-y) - 3 = 0 \text{ ②} \end{cases},$$

由②得： $(x-y-3)(x-y+1) = 0,$

$\therefore x-y=3$ 或 $x-y=-1,$

$\therefore$ 原方程组可以化为 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x-y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x-y=-1 \end{cases},$

解 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x-y=3 \end{cases}$ 得，
$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases},$$

解 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 得，
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases},$$

$\therefore$ 方程组的解为
$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} \\ y_1 = -\frac{4}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 0 \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查了解二元二次方程组，将 $(x-y)^2 - 2(x-y) - 3 = 0$ 用因式分解法化为 $x-y=3$ 或

$x-y=-1$ ，从而即可得到两个新的方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x-y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 是解题的关键.

22. 解方程:
$$\begin{cases} \frac{5}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 7, \\ \frac{1}{x+y} - \frac{3}{x-y} = -1. \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 设 $\frac{1}{x+y} = a$, $\frac{1}{x-y} = b$, 将原方程化为整式方程, 可解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 2 \\ \frac{1}{x-y} = 1 \end{cases}$, 解此分式

方程, 即可求得.

【详解】 解: 设 $\frac{1}{x+y} = a$, $\frac{1}{x-y} = b$,

则原方程为
$$\begin{cases} a + 5b = 7 \text{ ①} \\ a - 3b = -1 \text{ ②} \end{cases},$$

用①-②得: $8b = 8$, 解得 $b = 1$,

把 $b = 1$ 代入①得: $a + 5 = 7$, 解得 $a = 2$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x+y} = 2 \\ \frac{1}{x-y} = 1 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases},$$

经检验 $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$ 是原方程组的解,

$$\therefore \text{原方程组的解为} \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

【点睛】本题考查了利用换元法解分式方程，利用换元法把分式方程化为整式方程是解决本题的关键，注意检验.

四、解答题 (本大题共 4 题, 第 23 题 6 分, 第 24 题 8 分, 第 25 题 10 分, 第 26 题 10 分, 满分 34 分)

23. 甲、乙两城间的铁路路程为 1600 千米, 经过技术改造, 列车实施了提速, 提速后比提速前速度增加了 20 千米/小时, 列车从甲城到乙城行驶时间减少 4 小时, 这条铁路在现有条件下安全行驶速度不得超过 140 千米/小时, 请你用学过的知识说明在这条铁路的现有条件下列车是否还可以再提速.

【答案】这条铁路在现有的条件下列车还能再提速

【解析】

【分析】提速前后路程没变, 关键描述语为: “列车从 A 到 B 地行驶的时间减少了 4 小时”; 等量关系为: 提速前的列车所用时间=提速后的列车所用时间+4, 据此列出方程求出现在的速度, 然后与 140 千米/小时进行比较后即可作出判断.

【详解】设提速前的速度是 x 千米/小时, 则提速后的速度为 $(20+x)$ 千米/小时, 由题意得

$$\frac{1600}{x} - \frac{1600}{x+20} = 4,$$

解得: $x_1 = -100$, $x_2 = 80$,

经检验: $x_1 = -100$, $x_2 = 80$ 都是原方程的解,

但 $x_1 = -100$ 不合题意, 所以舍去,

当 $x=80$ 时, $x+20=80+20=100<140$, 所以还能提速,

答: 这条铁路在现有的条件下列车还能再提速.

【点睛】本题考查了分式方程的应用, 弄清题意, 找到关键描述语, 找到合适的等量关系是解决问题的关键.

24. 已知直线 $l_1: y = kx + b$ 经过点 $A(0, -2)$ 、 $B(2, m)$, 且平行于直线 $l: y = 2x$. 求:

(1) 直线 l_1 的解析式及 B 点的坐标.

(2) 如果直线 l_2 经过点 B , 且与 y 轴的正半轴交于点 C , 使得 $\triangle ABC$ 的面积为 8, 求直线 l_2 的解析式.

【答案】(1) 直线 l_1 的解析式为 $y = 2x - 2$ ，点 B 的坐标为 $(2, 2)$

(2) 直线 l_2 的解析式为 $y = -2x + 6$

【解析】

【分析】本题考查了两直线相交或平行问题：两条直线的交点坐标，就是由这两条直线相对应的一次函数表达式所组成的二元一次方程组的解；若两条直线是平行的关系，那么他们的自变量系数相同，即 k 值相同．也考查了待定系数法求一次函数解析式．

(1) 根据一次函数图象上点的坐标特征易得 $b = -2$ ，根据两直线平行的问题易得 $k = 2$ ，从而可确定直线 l_1 的解析式，进而可得点 B 的坐标；

(2) 设 C 点坐标为 $(0, t)$ ，然后根据三角形面积公式得到 $\frac{1}{2} \times 2 \cdot |t + 2| = 8$ ，求出 t 的值可得到 C 点坐标，由 B 、 C 的坐标，利用待定系数法即可求解．

【小问 1 详解】

解：∵ $l_1: y = kx + b$ 经过点 $A(0, -2)$ ，

$$\therefore b = -2,$$

∵ 直线 $l_1: y = kx + b$ 平行于直线 $l: y = 2x$ ，

$$\therefore k = 2,$$

∴ 直线 l_1 的解析式为 $y = 2x - 2$ ，

∵ $y = 2x - 2$ 经过点 $B(2, m)$ ，

$$\therefore m = 2 \times 2 - 2 = 2,$$

∴ 点 B 的坐标为 $(2, 2)$ ；

【小问 2 详解】

如图，设 C 点坐标为 $(0, t)$ ，，

∵ ABC 的面积为 8，

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \cdot |t + 2| = 8,$$

解得： $t = 6$ 或 $t = -10$ (舍去)，

$$\therefore C(0, 6),$$

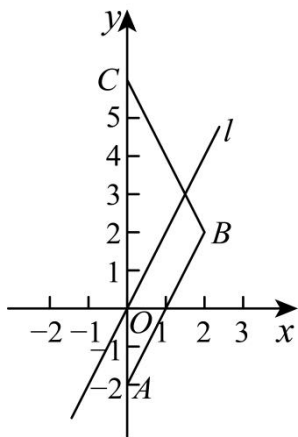
设直线 l_2 的解析式为 $y = px + q$ ，

∵ 直线 l_2 经过点 $B(2, 2)$ ，与 y 轴的正半轴相交于点 $C(0, 6)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 2p + q = 2 \\ 0 + q = 6 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} p = -2 \\ q = 6 \end{cases},$

∴ 直线 l_2 的解析式为 $y = -2x + 6$.



25. “程，课程也，二物者二程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程。”这是我国古代著名数学家刘徽在《九章算术》对方程一词给出的注释. 对于一些特殊的方程，我们给出两个定义：①若两个方程有相同的一个解，则称这两个方程为“相似方程”；②若两个方程有相同的整数解，则称这两个方程为“相伴方程” .

(1) 判断分式方程 $\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2}{1+x}$ 与无理方程 $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2x + 1}$ 是否是“相似方程”，并说明理由；

(2) 已知关于 x, y 的方程： $4x^2 - 9y^2 = 28$ 和 $2x - 3y = 4$ ，它们是“相似方程”吗？如果是，请写出它们的公共解；如果不是，请说明理由；

(3) 已知关于 x, y 的二元一次方程： $y = (k + 1)x - 4$ 和 $y = x - 3k$ （其中 k 为常数）是“相伴方程”，求 k 的值.

【答案】(1) 分式方程 $\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2}{1+x}$ 与无理方程 $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2x + 1}$ 是“相似方程”，理由见解析；

(2) $4x^2 - 9y^2 = 28$ 和 $2x - 3y = 4$ ，它们是“相似方程”，公共解为 $\begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

(3) $k = \pm 1$ 或 $k = \pm 2$ 或 $k = \pm 4$

【解析】

【分析】(1) 分别求出分式方程和无理方程的解，然后根据“相似方程”的定义进行判断即可；

(2) 联立两个方程，求出它们的公共解，如果只有唯一解，即说明两个方程是“相似方程”，如果没有唯一解则说明两个方程不是“相似方程”；

(3) 联立两个方程得到 $kx = 4 - 3k$ ，再分当 $k = 0$ 时，当 $k \neq 0$ 时，两种情况讨论求解即可。

【小问 1 详解】

解：分式方程 $\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2}{1+x}$ 与无理方程 $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2x + 1}$ 是“相似方程”，理由如下：

$$\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2}{1+x}$$

两边用时乘以 $(1-x)(1+x)$ 得： $1+x + (1+x)(1-x) = 2(1-x)$ ，

$$\therefore 1+x+1-x^2 = 2-2x,$$

$$\therefore x^2 - 3x = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x = 3,$$

经检验 $x = 0$ 和 $x = 3$ 都是原方程的解；

$$\therefore \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2x + 1},$$

$$\therefore x^2 - 2 = 2x + 1,$$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore (x-3)(x+1) = 0,$$

解得 $x = -1$ 或 $x = 3$ ，

$\therefore$ 分式方程 $\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2}{1+x}$ 与无理方程 $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2x + 1}$ 有一个相同的解，

$\therefore$ 分式方程 $\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{2}{1+x}$ 与无理方程 $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2x + 1}$ 是“相似方程”；

【小问 2 详解】

解：联立 $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 28 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ 得： $(4+3y)^2 - 9y^2 = 28$ ，

$$\therefore 16 + 24y + 9y^2 - 9y^2 = 28,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x = \frac{11}{4},$$

$$\therefore \text{原方程组的解为} \begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{方程 } 4x^2 - 9y^2 = 28 \text{ 和方程 } 2x - 3y = 4 \text{ 有一个公共解} \begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore 4x^2 - 9y^2 = 28 \text{ 和 } 2x - 3y = 4, \text{ 它们是“相似方程”, 公共解为} \begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

【小问3详解】

解: $\because$ 关于 x, y 的二元一次方程: $y = (k+1)x - 4$ 和 $y = x - 3k$ (其中 k 为常数) 是“相伴方程”,

$$\therefore (k+1)x - 4 = x - 3k,$$

$$\therefore kx = 4 - 3k,$$

当 $k = 0$ 时, 即 $0 = 4$ 不符合题意;

$$\text{当 } k \neq 0 \text{ 时, 则 } x = \frac{4-3k}{k} = \frac{4}{k} - 3,$$

$\therefore x, y$ 都是整数,

$$\therefore k = \pm 1 \text{ 或 } k = \pm 2 \text{ 或 } k = \pm 4$$

【点睛】 本题主要考查了解分式方程, 解无理方程, 解二元二次方程, 解二元一次方程组等等, 正确理解题意是解题的关键.

26. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知直线 AB 过点 $A(m, 0)$ 和 $B(0, n)$, 且 m, n 满足 $(m+3)^2 + \sqrt{2+n} = 0$.

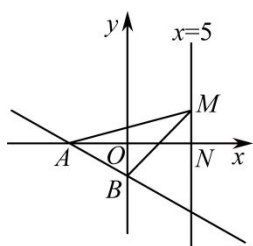


图1

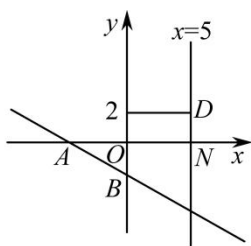
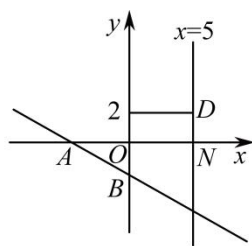


图2



备用图

(1) 求直线 AB 的表达式;

(2) 如图 1, 直线 $x=5$ 与 x 轴交于点 N , 点 M 在直线 $x=5$ 上, 若 $\triangle MAB$ 面积等于 10, 求出点 M 的坐标;

(3) 如图 2, 已知点 $D(5, 2)$, 若点 C 为射线 AB 上一动点, 连接 CD , 在坐标轴上是否存在点 P , 使 $\triangle CDP$ 是以 CD 为斜边的等腰直角三角形, 直角顶点为 P . 若存在, 请直接写出点 P 坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = -\frac{2}{3}x - 2$

(2) 点 M 的坐标为 $(5, \frac{4}{3})$ 或 $(5, -12)$;

(3) 存在, 点 P 的坐标为 $(1, 0)$ 或 $(17, 0)$ 或 $(0, 5)$

【解析】

【分析】 (1) 根据偶次方及算术平方根的非负性求出 m, n 得到点 A, B 的坐标, 利用待定系数法求解即可;

(2) 设直线 AB 与 $x=5$ 交于点 K , 求出点 K 的坐标, 利用 $S_{\triangle ABM}=10$, 得到 $\frac{1}{2}MK(5-x_A) - \frac{1}{2}MK(5-x_B) = 10$, 由此求出 $MK = \frac{20}{3}$, 即可得到点 M 的坐标;

(3) 存在, 根据题意画出图形, 根据全等三角形的性质表示出点 C 的坐标, 代入直线 AB 的解析式即可求出答案.

【小问 1 详解】

$$\therefore (m+3)^2 + \sqrt{2+n} = 0,$$

$$\therefore m+3=0, 2+n=0,$$

解得 $m=-3, n=-2$,

$$\therefore A(-3, 0), B(0, -2),$$

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$, 得

$$\begin{cases} -3k+b=0 \\ b=-2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k=-\frac{2}{3} \\ b=-2 \end{cases}$$

∴ 直线 AB 的解析式为 $y = -\frac{2}{3}x - 2$;

【小问 2 详解】

设直线 AB 与 $x=5$ 交于点 K , 如图,

令 $y = -\frac{2}{3}x - 2$ 中 $x=5$, 得 $y = -\frac{16}{3}$,

∴ $K(5, -\frac{16}{3})$,

∵ $S_{\triangle ABM} = 10$,

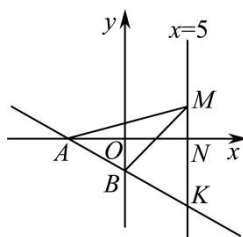
∴ $\frac{1}{2}MK(5-x_A) - \frac{1}{2}MK(5-x_B) = 10$,

∴ $\frac{1}{2}MK(5-x_A-5+x_B) = 10$,

∴ $MK = \frac{20}{3}$,

∴ $-\frac{16}{3} + \frac{20}{3} = \frac{4}{3}$, $-\frac{16}{3} - \frac{20}{3} = -12$,

∴ 点 M 的坐标为 $(5, \frac{4}{3})$ 或 $(5, -12)$;



【小问 3 详解】

存在, 点 P 的坐标为 $(1, 0)$ 或 $(17, 0)$ 或 $(0, 5)$

当点 P 在 x 轴上时, 设点 P 的坐标为 $(a, 0)$,

如图 1, 过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于 E ,

∵ $\triangle CDP$ 是以 CD 为斜边的等腰直角三角形, 直角顶点为 P .

∴ $PD=PC$, $\angle DPN + \angle CPN = 90^\circ$,

∵ $\angle DPN + \angle PDN = 90^\circ$,

∴ $\angle CPN = \angle PDN$,

∴ $\triangle DPN \cong \triangle PCE$,

∴ $PE=DN=2$, $CE=PN=5-a$,

∴ $C(a+2, a-5)$,

将点 C 的坐标代入 $y = -\frac{2}{3}x - 2$, 得 $-\frac{2}{3}(a+2) - 2 = a-5$, 解得 $a=1$,

∴ $P(1, 0)$;

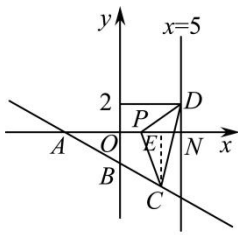


图1

如图 1，过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于 E ，

可得 $\triangle DPN \cong \triangle PCE$ ，

$$\therefore PE = DN = 2, \quad CE = PN = a - 5,$$

$$\therefore C(a - 2, 5 - a),$$

将点 C 的坐标代入 $y = -\frac{2}{3}x - 2$ ，

$$\text{得 } -\frac{2}{3}(a - 2) - 2 = 5 - a, \text{ 解得 } a = 17,$$

$$\therefore P(17, 0);$$

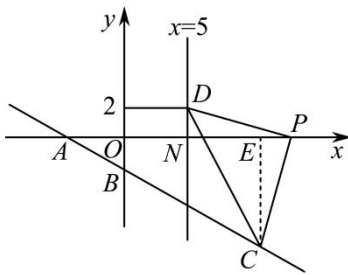


图2

当点 P 在 y 轴上时，设点 P 的坐标为 $(0, c)$ ，

如图 3，过 C 作 $CF \perp t$ 轴于 F ，

则 $\triangle PGD \cong \triangle CFP$ ，

$$\therefore PF = DG = 5, \quad PG = CF = c - 2,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (2 - c, c - 5),$$

将点 C 的坐标代入 $y = -\frac{2}{3}x - 2$ ，

$$\text{得 } -\frac{2}{3}(2 - c) - 2 = c - 5, \text{ 解得 } c = 5,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的横坐标为 } 2 - 5 = -3, \text{ 符合题意,}$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (0, 5);$$

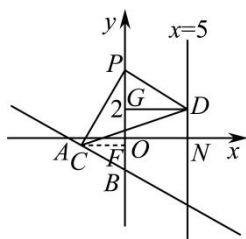


图3

综上，存在点 P ，点 P 的坐标为 $(1, 0)$ 或 $(17, 0)$ 或 $(0, 5)$ 。

【点睛】 此题考查了待定系数法求一次函数的解析式，全等三角形的判定合性质，等腰直角三角形的性质，直角三角形中已知三角形面积求点坐标，正确掌握各知识点并综合应用是解题的关键。