

八年级数学学科

(满分 100 分 时间 90 分钟)

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分) (每题只有一个选项正确)

1. 下列函数中，是一次函数的是 ()

A. $y = \frac{7}{x}$

B. $y = x^2 + 1$

C. $y = kx + b$ (k, b 是常数)

D. $y = \sqrt{3}x - 5$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的定义，一般地，形如 $y = kx + b$ (k, b 常数， $k \neq 0$) 的函数叫做一次函数，据此求解即可.

【详解】 解：根据一次函数的定义可知，只有 D 选项中的函数是一次函数，
故选：D.

2. 下列方程中，属于二项方程的是 ()

A. $2x^3 + 9 = 0$

B. $x^3 + 5x = 0$

C. $x^4 + 2x^2 = 1$

D. $\frac{1}{x} + 4 = 0$

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据二项方程的定义，依次判读可得正确答案.

【详解】 解：A. $2x^3 + 9 = 0$ ，故选项正确，不符合题意；

B. $x^3 + 5x = 0$ ，含有两个未知数的项，故选项错误，不符合题意；

C. $x^4 + 2x^2 = 1$ ，含有两个未知数的项，故选项错误，不符合题意；

D. $\frac{1}{x} + 4 = 0$ ，不是整式方程，故选项错误，不符合题意；

故选：A.

【点睛】 此题考查二项方程的定义，解题的关键是知道二项方程的定义（一元 n 次方程的一边只有含未知数的一项和非零的常数项，另一边是零）并会用概念判断.

3. 在下列方程中，有实数根的是 ()

A. $\sqrt{x-2} + 3 = 0$

B. $\sqrt{4x+1} = -x$

C. $x^2 + 2x + 3 = 0$

D. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查方程的解法，根据无理方程以及整式方程的解法即可求出答案.

【详解】解：A.原方程化为： $\sqrt{x-2} = -3$ ，故A无解，不符合题意；

B.原方程化为： $4x+1 = x^2$ ，

解得： $x = 2 \pm \sqrt{5}$ ，

$$\therefore \begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases},$$

解得： $-\frac{1}{4} \leq x \leq 0$ ，

$\therefore x = 2 - \sqrt{5}$ ，故B有实数解，符合题意；

C.原方程化为： $x^2 + 2x + 1 = -2$ ，

$\therefore (x+1)^2 = -2$ ，故C无解，

D.去分母可得： $x = 1$ ，

经验可知： $x = 1$ 是该方程的增根，故D无解，

故选：B.

4. 甲乙两个工程队修建某段公路. 如果甲乙两队合作，16天可以完成；如果甲队独做5天后，乙队加入，两队继续工作10天，共完成了总工作量的 $\frac{3}{4}$. 设甲队单独完成这项工程需要 x 天，乙队单独完成这项工程需要 y 天，那么根据题意可列方程组为（ ）

A.
$$\begin{cases} \frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1 \\ \frac{5}{x} + \frac{10}{y} = 1 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} \frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1 \\ \frac{15}{x} + \frac{10}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} \frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1 \\ \frac{5}{x} + \frac{10}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} \frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1 \\ \frac{15}{x} + \frac{10}{y} = 1 \end{cases}$$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了由实际问题抽象出分式方程组. 根据甲乙两队合作，16天可以完成；甲队独做5天后，

乙队加入，两队继续工作了 10 天，共完成了总工作量的 $\frac{3}{4}$ ，可得出关于 x, y 的方程组，此题得解.

【详解】解：∵ 甲乙两队合作，16 天可以完成，

$$\therefore 16\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1, \text{ 即 } \frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1$$

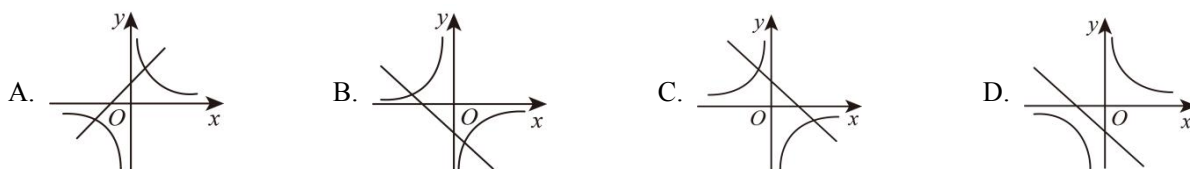
∵ 甲队独做 5 天后，乙队加入，两队继续工作了 10 天，共完成了总工作量的 $\frac{3}{4}$

$$\therefore \frac{10+5}{x} + \frac{10}{y} = \frac{3}{4}, \text{ 即 } \frac{15}{x} + \frac{10}{y} = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore \text{根据题意可列出方程组} \begin{cases} \frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1 \\ \frac{15}{x} + \frac{10}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

故选：B.

5. 函数 $y = k(x-1)$ 与函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在同一直角坐标系中的大致图像可能是 ()



【答案】C

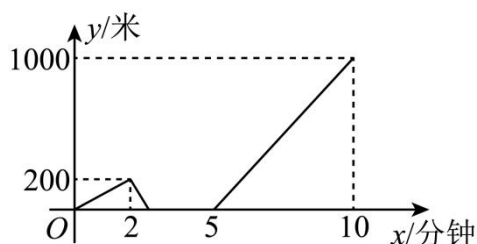
【解析】

【分析】本题主要考查一次函数与反比例函数的图像，由函数 $y = k(x-1)$ 知直线必过 $(1, 0)$ 这一点，据此可得.

【详解】解：由函数 $y = k(x-1)$ 知直线必过 $(1, 0)$ 这一点，

故选：C.

6. 乐乐家与学校相距 1000 米，某天乐乐上学时忘了带了一本书，走了一段时间才想起，于是返回家拿书，然后加快速度赶到学校，图中是乐乐与家的距离 y (米) 关于时间 x (分钟) 的函数图像，下列说法错误的是 ()



A. 乐乐走了 200 米后返回家拿书

B. 乐乐在家停留了 3 分钟

C. 乐乐以每分钟 200 米的速度加速赶到学校

D. 乐乐在第 10 分钟的时候赶到学校

【答案】 B

【解析】

【分析】从图像可以知道，2 分钟时乐乐返回家，在家一段时间后，5 分钟又开始回学校，10 分钟到达学校.

【详解】解：A、乐乐走了 200 米后返回家拿书，正确，不合题意；

B、乐乐在家停留了 3 分钟，错误，从回家到拿到书，一共用 3 分钟，故符合题意；

C、乐乐以每分钟： $\frac{100}{10-5}=200$ 米的速度加速赶到学校，正确，不合题意；

D、乐乐在第 10 分钟的时候赶到学校，正确，不合题意.

故选：B.

【点睛】此题主要考查了函数图像，正确认识图像是解答本题的关键.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分)

7. 直线 $y = -7 - 3x$ 在 y 轴上的截距是_____.

【答案】 -7

【解析】

【分析】本题主要考查了求一次函数在 y 轴上的截距，一次函数在 y 轴上的截距即为该一次函数与 y 轴交点的纵坐标，据此求解即可.

【详解】解：在 $y = -7 - 3x$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = -7$ ，

$\therefore$ 直线 $y = -7 - 3x$ 在 y 轴上的截距是 -7 ，

故答案为： -7 .

8. 方程 $\frac{1}{3}x^4 - 27 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = \pm 3$

【解析】

【分析】先把方程转化为 $\frac{1}{3}(x^2)^2 - 27 = 0$ 的形式，然后再利用平方根的概念求解.

【详解】解：原方程化为： $\frac{1}{3}(x^2)^2 - 27 = 0$ ，

$$\frac{1}{3}(x^2)^2 = 27,$$

$$(x^2)^2 = 81,$$

$$\therefore x^2=9 \text{ 或 } x^2=-9 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore x = \pm 3.$$

故答案为: $x = \pm 3$

【点睛】 本题考查了利用平方根解方程, 理解掌握平方根的概念是解题的关键.

9. 一次函数 $y = -2(x-1)$ 可由一次函数 $y = -2x+3$ 向___平移___个单位得到.

【答案】 ①. 下 ②. 1

【解析】

【分析】 直接根据“上加下减”的原则进行解答即可.

【详解】 解: $\because$ 原直线解析式为 $y = -2x+3$, 新直线的解析式为 $y = -2(x-1)$, 即 $y = -2x+2$,

$\therefore$ 将直线 $y = -2x+3$ 向下平移 1 个单位长度得到直线 $y = -2(x-1)$.

故答案为: 下; 1.

【点睛】 本题考查的是一次函数图像与几何变换, 熟知函数图像平移的法则是解答此题的关键.

10. 已知一次函数 $y = kx + b$ 与 x 轴的交点坐标的横坐标是 3, 且平行于函数 $y = -3x$, 那么这个一次函数解析式是_____.

【答案】 $y = -3x + 9$

【解析】

【分析】 本题考查了两直线平行的问题, 根据平行直线解析式的 k 值相等可得 $k = -3$, 再将与 x 轴的交点代入求出 b 的值, 然后写出函数解析式即可.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 平行于函数 $y = -3x$,

$$\therefore k = -3,$$

$\therefore$ 一次函数 $y = kx + b$ 与 x 轴的交点坐标的横坐标是 3,

$\therefore$ 与 x 轴的交点坐标为 $(3, 0)$,

$$\therefore -3 \times 3 + b = 0,$$

解得 $b = 9$,

$\therefore$ 这个一次函数解析式是 $y = -3x + 9$.

故答案为: $y = -3x + 9$.

11. 若点 $A(2, a)$ 、 $B(-1, b)$ 在直线 $y = -x + 1$ 上, 则 a 、 b 的大小关系是 a _____ b . (填 “>” “=” 或 “<”)

【答案】<

【解析】

【分析】由 $k = -1 < 0$, 利用一次函数的性质可得出 y 随 x 的增大而减小, 结合 $2 > -1$, 即可得出 $a < b$.

【详解】解: $\because y = -x + 1$ 中, $k = -1 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小.

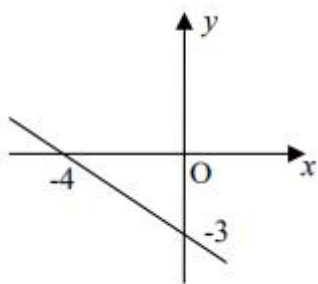
又 $\because 2 > -1$,

$\therefore a < b$.

故答案为: <.

【点睛】本题考查了一次函数的性质, 牢记 “ $k > 0$, y 随 x 的增大而增大; $k < 0$, y 随 x 的增大而减小” 是解题的关键.

12. 一次函数 $y = kx + b$ 的图像如图所示. 当 $y > 0$ 时, x 的取值范围是_____.



【答案】 $x < -4$

【解析】

【分析】根据图像直接解答即可.

【详解】由图像可知, 当 $y > 0$ 时, x 的取值范围是 $x < -4$.

故答案为: $x < -4$.

【点睛】本题主要考查一次函数和一元一次不等式的关系及数形结合思想的应用. 解决此类问题关键是仔细观察图形, 注意几个关键点 (交点、原点等), 做到数形结合.

13. 用换元法解方程 $\frac{2(x-1)}{x^2} - \frac{x^2}{3(x-1)} = 1$ 时, 设 $y = \frac{x-1}{x^2}$, 则原方程可化为关于 y 的整式方程是 _____.

【答案】 $6y^2 - 3y - 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了换元法、解分式方程，熟练掌握相关知识点是解题的关键. 设 $y = \frac{x-1}{x^2}$ ，利用换元法将原方程化为关于 y 的方程，再通过去分母得到整式方程，即可得出答案.

【详解】 解： $\because y = \frac{x-1}{x^2}$ ，
 $\therefore \frac{2(x-1)}{x^2} = 2y$ ， $\frac{x^2}{3(x-1)} = \frac{1}{3y}$ ，

$\therefore$ 原方程可化为 $2y - \frac{1}{3y} = 1$ ，

去分母，得： $6y^2 - 1 = 3y$ ，

整理得： $6y^2 - 3y - 1 = 0$ ，

$\therefore$ 原方程可化为关于 y 的整式方程是 $6y^2 - 3y - 1 = 0$.

故答案为： $6y^2 - 3y - 1 = 0$.

14. 方程 $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{3x-5} = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解无理方程，求不等式组的解集，二次根式有意义的条件，根据乘法计算法则可得 $\sqrt{x-2} = 0$ 或 $\sqrt{3x-5} = 0$ ，进而得到 $x-2=0$ 或 $3x-5=0$ ，再由二次根式有意义的条件可得 $x \geq 2$ ，据此可得答案.

【详解】 解： $\because \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{3x-5} = 0$ ，

$\therefore \sqrt{x-2} = 0$ 或 $\sqrt{3x-5} = 0$ ，

$\therefore x-2=0$ 或 $3x-5=0$ ，

解得 $x=2$ 或 $x=\frac{5}{3}$ ，

又 $\because \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-\frac{5}{3} \geq 0 \end{cases}$ ，

$\therefore x \geq 2$ ，

$\therefore x=2$ ，

故答案为: $x=2$.

15. 将一根长 56 厘米的铁丝弯折成一个直角三角形, 使它的一条直角边长为 7 厘米, 则另一条直角边长是 _____ 厘米.

【答案】 24

【解析】

【分析】 设这个直角三角形的另一条直角边长为 x 厘米, 运用勾股定理就可解决问题.

【详解】 由题可得该直角三角形的斜边为 $(56-7-x)$ cm, 即 $(49-x)$ cm,

根据勾股定理可得,

$$7^2+x^2=(49-x)^2,$$

解得: $x=24$,

$\therefore$ 另一条直角边长是 24 厘米.

故答案为: 24.

【点睛】 本题考查了勾股定理, 熟练掌握勾股定理是解答本题的关键. 在直角三角形中, 如果两条直角边分别为 a 和 b , 斜边为 c , 那么 $a^2+b^2=c^2$. 也就是说, 直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

16. 已知二元二次方程组有一组解是 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$, 写出一个符合上述条件的二元二次方程组为 _____.

【答案】 $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 分别列两个方程代入 x, y 的值就可以.

【详解】 解: 把 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$ 符合要求;

故答案为: $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$.

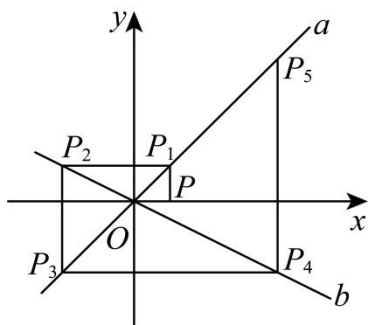
【点睛】 本题考查了二元二次方程组定义, 方程组的解, 解题关键 x, y 都能使两个方程左右值相等.

17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、点 B , 点 C 在 y 轴的负半轴上, 将 ABC 沿 AC 翻折, 点 B 恰好落在 x 轴正半轴上的点 D 处, 则点 C 的坐标为 _____.

$$\therefore C(0, -6),$$

故答案为: $(0, -6)$.

18. 如图, 已知直线 $a: y = x$, 直线 $b: y = -\frac{1}{2}x$ 和点 $P(1, 0)$, 过点 P 作 y 轴的平行线交直线 a 于点 P_1 , 过点 P_1 作 x 轴的平行线交直线 b 于点 P_2 , 过点 P_2 作 y 轴的平行线交直线 a 于点 P_3 , 过点 P_3 作 x 轴的平行线交直线 b 于点 $P_4, \dots$, 按此作法进行下去, 则点 P_{2024} 的横坐标为_____.



【答案】 2^{1012}

【解析】

【分析】 点 $P(1, 0)$, P_1 在直线 $y = x$ 上, 得到 $P_1(1, 1)$, 求得 P_2 的纵坐标 = P_1 的纵坐标 = 1, 得到 $P_2(-2, 1)$, 即 P_2 的横坐标为 $-2 = -2^1$, 同理, P_3 的横坐标为 $-2 = -2^1$, P_4 的横坐标为 $4 = 2^2$, $P_5 = 2^2$, $P_6 = -2^3$, $P_7 = -2^3$, $P_8 = 2^4 \dots$, 求得 $P_{4n} = 2^{2n}$, 于是得到结论. 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 规律型: 点的坐标, 正确地作出规律是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 点 $P(1, 0)$, P_1 在直线 $y = x$ 上,

$$\therefore P_1(1, 1),$$

$\because P_1P_2 \parallel x$ 轴,

$$\therefore P_2 \text{ 的纵坐标} = P_1 \text{ 的纵坐标} = 1,$$

$\because P_2$ 在直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 上,

$$\therefore 1 = -\frac{1}{2}x,$$

$$\therefore x = -2,$$

$$\therefore P_2(-2, 1), \text{ 即 } P_2 \text{ 的横坐标为 } -2 = -2^1,$$

同理, P_3 的横坐标为 $-2 = -2^1$, P_4 的横坐标为 $4 = 2^2$, $P_5 = 2^2$, $P_6 = -2^3$, $P_7 = -2^3$, $P_8 = 2^4 \dots$,

$$\therefore P_{4n} = 2^{2n},$$

$$\therefore P_{2020} \text{ 的横坐标为 } 2^{2 \times 505} = 2^{1010},$$

$$\therefore P_{2021} \text{ 的横坐标为 } 2^{1010},$$

$$\therefore P_{2022} \text{ 的横坐标为 } -2^{1011},$$

$$\therefore P_{2023} \text{ 的横坐标为 } -2^{1011},$$

$$\therefore \text{点 } P_{2024} \text{ 的横坐标为 } 2^{2 \times 506} = 2^{1012}$$

故答案为: 2^{1012}

三、简答题: (本大题共 6 题, 每题 6 分, 满分 36 分)

19. 解关于 x 的方程: $ax - 3x = 2(2 - x)$.

【答案】 当 $a = 1$ 时, 原方程无解, 当 $a \neq 1$ 时, $x = \frac{4}{a-1}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次方程, 按照去括号, 移项, 合并同类项的步骤得到 $(a-1)x = 4$, 然后讨论 $a-1$ 的值并求解即可.

【详解】 解: $ax - 3x = 2(2 - x)$

去括号得: $ax - 3x = 4 - 2x$,

移项得: $ax - 3x + 2x = 4$,

合并同类项得: $(a-1)x = 4$,

当 $a-1 = 0$, 即 $a = 1$ 时, 原方程无解,

当 $a \neq 1$ 时, $x = \frac{4}{a-1}$.

20. 解方程: $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+5} - 1 = 0$.

【答案】 $x=11$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程, 先把无理方程转化为有理方程, 然后求解, 注意要检验.

【详解】 解: $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+5} - 1 = 0$

变形得 $\sqrt{2x+3} = \sqrt{x+5} + 1$

两边同时平方得 $2x+3 = x+5+2\sqrt{x+5}+1$

化简得 $x-3 = 2\sqrt{x+5}$

两边同时平方得 $x^2 - 6x + 9 = 4x + 20$

化简得 $x^2 - 10x - 11 = 0$

解得 $x_1 = 11$, $x_2 = -1$

经检验, $x = -1$ 是增根, 舍去; $x = 11$ 是原方程的解,

$\therefore$ 原方程的解为 $x = 11$.

21. 解方程: $\frac{3x-x^2}{x^2-1} = 2 - \frac{1}{1-x}$.

【答案】 $x = -\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查的是分式方程的解法, 先去分母, 把方程化为整式方程, 再解整式方程并检验即可.

【详解】 解: $\frac{3x-x^2}{x^2-1} = 2 - \frac{1}{1-x}$,

$$\therefore \frac{3x-x^2}{(x+1)(x-1)} = 2 + \frac{1}{x-1},$$

去分母得: $3x-x^2 = 2(x^2-1) + x+1$,

整理得: $3x^2 - 2x - 1 = 0$,

$$\therefore (3x+1)(x-1) = 0,$$

解得: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$;

经检验: 当 $x = -\frac{1}{3}$ 时, $x^2 - 1 \neq 0$, 当 $x = 1$ 时, $x^2 - 1 = 0$,

$\therefore x = -\frac{1}{3}$ 是原方程的根, $x = 1$ 是增根;

$\therefore$ 原方程的根为 $x = -\frac{1}{3}$.

22. 解方程组:
$$\begin{cases} x-2y=4 \text{ ①} \\ x^2-xy-6y^2=0 \text{ ②} \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=12 \\ y=4 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解二元二次方程组，把方程②的左边分解因式，进而得到 $x+2y=0$ 或 $x-3y=0$ ，则 $x=-2y$ 或 $x=3y$ ，再把 $x=-2y$ 和 $x=3y$ 分别代入①中求解即可。

【详解】 解： $\begin{cases} x-2y=4 \text{ ①} \\ x^2-xy-6y^2=0 \text{ ②} \end{cases}$

由②得 $(x+2y)(x-3y)=0$ ，

$\therefore x+2y=0$ 或 $x-3y=0$ ，

$\therefore x=-2y$ 或 $x=3y$ ，

把 $x=-2y$ 代入①得： $-2y-2y=4$ ，解得 $y=-1$ ，则 $x=2$ ，即此时方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ ；

把 $x=3y$ 代入①得： $3y-2y=4$ ，解得 $y=4$ ，则 $x=12$ ，即此时方程组的解为 $\begin{cases} x=12 \\ y=4 \end{cases}$ ；

综上所述，原方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=12 \\ y=4 \end{cases}$ 。

23. 解方程组： $\begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2 \\ \frac{3}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{5}{2} \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

【解析】

【分析】 令 $\frac{1}{x+y}=\mu$ ， $\frac{1}{x-y}=\nu$ ，则原方程组化为： $\begin{cases} 2\mu+\nu=2 \\ 3\nu-\mu=\frac{5}{2} \end{cases}$ ，求出 μ 、 ν 的值，再代入求出 x 、 y

即可。

【详解】解：令 $\frac{1}{x+y} = \mu$, $\frac{1}{x-y} = \nu$, $\therefore$ 原方程组可化为：
$$\begin{cases} 2\mu + \nu = 2 \\ 3\nu - \mu = \frac{5}{2} \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{2} \\ \nu = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x-y} = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases},$$

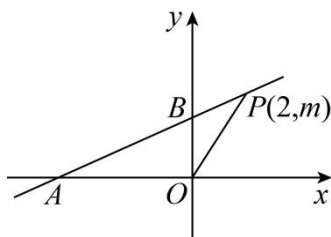
$$\therefore \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

经检验, $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ 是原方程组的解

所以原方程组的解为 $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

【点睛】本题考查了解分式方程组和解二元一次方程组，能正确换元是解此题的关键.

24. 已知，点 $P(2, m)$ 是第一象限内的点，直线 PA 交 y 轴于点 $B(0, 2)$ ，交 x 轴负半轴于点 A . 连 $OP = 6$, $S_{\triangle AOP} = 6$.



(1) 求 $\triangle BOP$ 的面积;

(2) 直接写出点 A 的坐标_____和 m 的值_____.

【答案】(1) 2; (2) $(-4, 0)$, 3.

【解析】

【分析】(1) 根据三角形面积公式求解;

(2) 先计算出 $S_{\triangle AOB} = 4$, 利用三角形面积公式得 $\frac{1}{2}OA \cdot 2 = 4$, 解得 $OA = 4$, 则 A 点坐标为 $(-4, 0)$; 再利用待定系数法求直线 AB 的解析式, 然后把 $P(2, m)$ 代入可求出 m 的值.

【小问 1 详解】

解: $\triangle BOP$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$;

【小问 2 详解】

解: $\because S_{\triangle AOP} = 6, S_{\triangle POB} = 2$,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = 6 - 2 = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{2}OA \cdot OB = 4, \text{ 即 } \frac{1}{2}OA \cdot 2 = 4, \text{ 解得 } OA = 4,$$

$$\therefore A \text{ 点坐标为 } (-4, 0);$$

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{把 } A(-4, 0)、B(0, 2) \text{ 代入得 } \begin{cases} -4k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{2}x + 2,$$

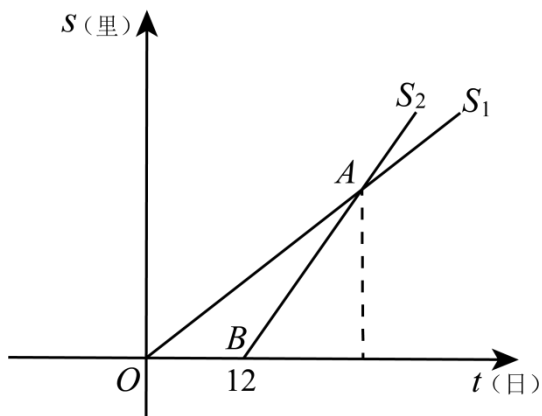
把 $P(2, m)$ 代入得 $m = 1 + 2 = 3$.

故答案为: $(-4, 0)$, 3.

【点睛】本题考查一次函数的综合问题, 解题的关键是掌握待定系数法求解析式, 结合图形利用点的坐标求面积.

四、解答题: (本大题共 3 题, 25 题 6 分, 26 题 8 分, 27 题 8 分, 满分 22 分)

25. 元朝朱世杰的《算学启蒙》一书记载了一个数学问题: “良马日行二百四十里, 驽马日行一百五十里, 驽马先行一十二日, 问良马几何追及之.” 它的大意是: “良马每天行 240 里, 劣马每天行 150 里, 劣马先行 12 天, 良马需要多少天才能追上劣马?” 如图, 是良马与驽马行走路程 s (单位: 里) 关于行走时间 t (单位: 日) 的函数图象.



- (1) 射线 OA 记为 S_1 , 射线 BA 记为 S_2 , 那么良马行走路程 s 关于行走时间 t 的函数图象是_____;
(填 S_1 或 S_2)
- (2) 两图象交点 A 的坐标是_____;
- (3) 求良马行走路程 S 关于行走时间 t 的函数解析式.

【答案】(1) S_2

(2) $(32, 4800)$

(3) $S = 240t - 2880$

【解析】

【分析】(1) 根据良马行走的速度大于劣马, 即单位时间内的路程大, 反映在函数图象上是与 x 轴夹角较大的射线, 据此即可求解;

(2) 根据题意, 列出方程, 解方程即可求解;

(3) 设 $S = kt + b$, 将点 $(12, 0)$, $(32, 4800)$ 代入, 根据待定系数法求解析式即可求解.

【小问 1 详解】

解: 根据题意, 可得良马行走的速度大于劣马,

则良马行走路程 s 关于行走时间 t 的函数图象是 S_2 ,

故答案为: S_2 .

【小问 2 详解】

根据题意可得: $240(t - 12) = 150t$,

解得: $t = 32$,

$\therefore$ 良马行走了 $32 - 12 = 20$ (天)

$\therefore A$ 的纵坐标为 $240 \times 20 = 4800$

【小问 3 详解】

解：设 $S = kt + b$ ，将点 $(12, 0)$ ， $(32, 4800)$ 代入得，

$$\therefore \begin{cases} 4800 = 32k + b \\ 12k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k = 240 \\ b = -2880 \end{cases},$$

$$\therefore S = 240t - 2880 \quad (t > 12).$$

【点睛】 本题考查了一次函数的应用，熟练掌握一次函数的性质是解题的关键.

26. 《哪吒 2 魔童闹海》票房大卖，周边玩偶热销. 小洋在网上开设相关周边专卖店，一次，小洋发现一张进货单上的一个信息是：A 款哪吒玩偶的进货单价比 B 款哪吒玩偶少 5 元，花 500 元购进 A 款哪吒玩偶的数量与花 750 元购进 B 款哪吒玩偶的数量相同.

(1) 问：A、B 两款的进货单价分别是多少元？

(2) 小洋决定将 A 款玩偶的销售单价定为 12 元，将 B 款玩偶的销售单价定为 20 元，小洋打算要花费 1000 元购进 A、B 两款玩偶若干个，且 A 款的数量不小于 B 款的一半，请你根据计算说明，当 A、B 两款各购进多少时，小洋获得的总利润最高，最高为多少？

【答案】 (1) A 款的进货单价是 10 元，则 B 款的进货单价是 15 元

(2) 购进 A 款 25 个，购进 B 款 50 个时，获得的总利润最高，最高为 300 元

【解析】

【分析】 本题考查分式方程的应用、一元一次不等式的应用、一次函数的应用，理解题意是解答的关键.

(1) 设 A 款的进货单价是 x 元，则 B 款的进货单价是 $(x+5)$ 元，根据题意列分式方程求解即可；

(2) 设购进 B 款 n 个，先根据“A 款的数量不小于 B 款的一半”求得 $n \leq 50$ ；再设总利润为 w ，则 $w = 2n + 200$ ，然后利用一次函数的性质求解即可.

【小问 1 详解】

解：设 A 款的进货单价是 x 元，则 B 款的进货单价是 $(x+5)$ 元，

$$\text{根据题意，可得 } \frac{500}{x} = \frac{750}{x+5},$$

解得 $x = 10$ ，

经检验， $x = 10$ 是该方程的解，

$$\therefore x+5 = 15,$$

答: A 款的进货单价是 10 元, 则 B 款的进货单价是 15 元;

【小问 2 详解】

解: 设购进 B 款 n 个, 则购进 A 款 $\frac{1000-15n}{10} = \left(-\frac{3}{2}n+100\right)$ 个,

又 A 款的数量不小于 B 款的一半,

$$\therefore -\frac{3n}{2}+100 \geq \frac{1}{2}n,$$

解得: $n \leq 50$,

设总利润为 w , 则 $w = (12-10)\left(-\frac{3}{2}n+100\right) + (20-15)n = 2n+200$,

$\because 2 > 0$,

$\therefore w$ 随 n 的增大而增大,

$\therefore$ 当 n 取得最大整数解 50 时, w 取得最大值, 最大值为 $2 \times 50 + 200 = 300$,

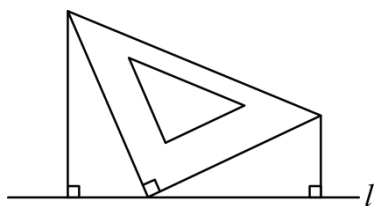
此时 $n = 50$, 则 $-\frac{3}{2} \times 50 + 100 = 25$,

答: 购进 A 款 25 个, 购进 B 款 50 个时, 获得的总利润最高, 最高为 300 元.

27. 探究活动

【模型构建】

如图, 将含有 45° 的三角板的直角顶点放在直线 l 上, 过两个锐角顶点分别向直线 l 作垂线, 这样就得到了两个全等的直角三角形. 由于三个直角的顶点都在同一条直线上, 因此我们将其称为“一线三直角”, 这模型在数学解题中被广泛使用.



【模型应用】

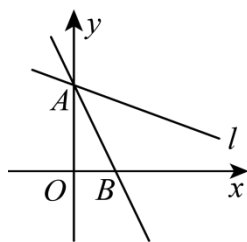


图1

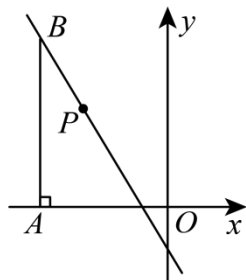


图2

(1) 在平面直角坐标系中, 直线 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 与 x 轴, y 轴分别交于 A , B 两点, 以 B 为直角顶点在第一象限内构造等腰直角 ABC , 直接写出第三个点的坐标是_____;

(2) 如图 1, 一次函数 $y = -2x + 2$ 的图像与 y 轴, x 轴分别交于 A , B 两点. 将直线 AB 绕点 A 逆时针旋转 45° 得到直线 l , 求直线 l 对应的函数表达式;

【模型拓展】

(3) 如图 2, 点 A 在 x 轴负半轴上, $OA = 8$, 过点 A 作 $AB \perp x$ 轴交直线 $y = -2x - 3$ 于点 B , P 是直线 $y = -2x - 3$ 上的动点, Q 是 y 轴上的动点, 若 $\triangle APQ$ 是以其中一个动点为直角顶点的等腰直角三角形, 请直接写出所有符合条件的点 P 的坐标.

【答案】 (1) $C(2, 6)$; (2) $y = -\frac{1}{3}x + 2$; (3) $(-1, -1)$ 或 $(-3, 3)$ 或 $(-11, 19)$ 或 $(\frac{5}{3}, -\frac{19}{3})$.

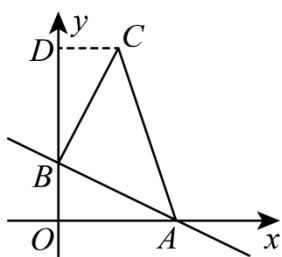
【解析】

【分析】 (1) 过点 C 作 y 轴的垂线, 垂足为 D , 先求出 A 、 B 坐标得到 OA , OB 的长, 再证明 $\triangle OAB \cong \triangle DBC$ (AAS) 推出 OD , CD 的长即可得到答案;

(2) 先证 $\triangle AOB \cong \triangle BDC$ 可得 $CD = OB = 1$, $BD = AO = 2$, 进而得到 $C(3, 1)$, 最后根据待定系数法即可解答;

(3) 分 $\angle APQ = 90^\circ$, 点 P 在 x 轴上方或下方和 $\angle AQP = 90^\circ$ 点 P 在 x 轴上方或下方, 四种情况, 分别运用全等三角形的判定与性质和二元一次方程组解答即可.

【详解】 解: (1) 如图所示, 过点 C 作 y 轴的垂线, 垂足为 D ,



在 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 中, 当 $x = 0$ 时, $y = 2$, 当 $y = 0$ 时, $x = 4$,

$\therefore A(4, 0)$, $B(0, 2)$,

$\therefore OA = 4$, $OB = 2$;

$\therefore ABC$ 是以 B 为直角顶点的等腰直角三角形,

$$\therefore AB = BC, \quad \angle ABC = \angle CDB = \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBA + \angle OAB = \angle OBA + \angle DBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle DBC,$$

$$\therefore \triangle OAB \cong \triangle DBC \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BD = OA = 4, \quad CD = OB = 2,$$

$$\therefore OD = OB + BD = 6,$$

$$\therefore C(2, 6);$$

(2) 如图，过点 B 作 $BC \perp AB$ 交直线 l 于点 C ，过点 C 作 $DC \perp x$ 轴于 D ，

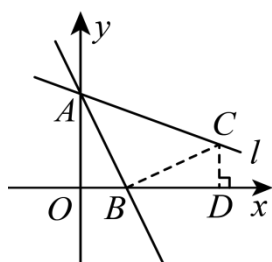


图1

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ.$$

$$\because \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCA = 90^\circ - \angle BAC = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA.$$

$$\therefore AB = BC.$$

$$\because \angle ABC = \angle AOB = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB + \angle ABO = 90^\circ, \quad \angle CBD + \angle ABO = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle OAB = \angle CBD.$$

$$\because AB = BC, \quad \angle AOB = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BDC.$$

$$\therefore AO = BD, \quad OB = CD.$$

在 $y = -2x + 2$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = -2x + 2 = 2$ ，

$$\therefore AO = BD = 2.$$

当 $y = 0$ 时， $0 = -2x + 2$ ， $x = 1$ ，

$$\therefore OB = CD = 1,$$

$$\therefore OD = OB + BD = 3,$$

$$\therefore C(3,1);$$

设直线 l 对应的函数表达式为 $y = kx + b$,

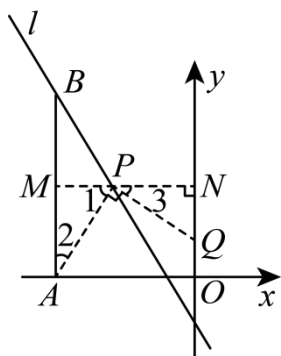
$$\text{将 } C(3,1) \text{ 和 } A(0,2) \text{ 代入得 } \begin{cases} b = 2, \\ 3k + b = 1. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -\frac{1}{3}, \\ b = 2. \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 解析式为 } y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

(3) 当 $\angle APQ = 90^\circ$, $AP = PQ$, P 在 x 轴的上方,

如图: 过 P 作 $MN \perp y$ 轴, 交 AB 于 M , 交 y 轴于 N ,



$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ, \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$$\text{又 } \because \angle AMP = \angle PMQ = 90^\circ, AP = PQ,$$

$$\therefore \triangle AMP \cong \triangle PNQ (\text{AAS}),$$

$$\therefore PM = NQ, AM = PN;$$

$$\therefore \text{直线 } l: y = -2x - 3,$$

$$\therefore \text{设 } P(m, -2m - 3), Q(0, n),$$

$$\therefore AM = -2m - 3, PN = -m,$$

$$\therefore -2m - 3 = -m \text{ ①},$$

$$\therefore PM = NQ = -2m - 3 - n,$$

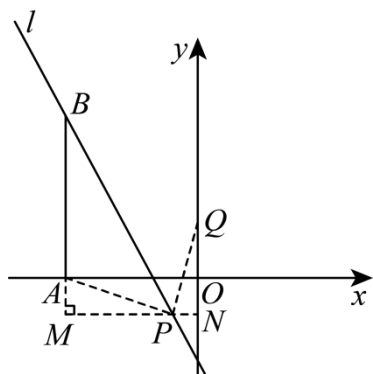
$$\therefore PM + PN = OA = 8, \text{ 即 } -2m - 3 - n + (-m) = 8 \text{ ②},$$

$$\text{①②联立解得: } m = -3, n = -2,$$

$$\therefore P(-3, 3);$$

当 $\angle APQ = 90^\circ$, $AP = PQ$, P 在 x 轴的下方,

如图:



同理可得 $\triangle AMP \cong \triangle PNQ$ (AAS),

$$\therefore AM = PN, MP = QN;$$

$$\therefore \text{直线 } l: y = -2x - 3,$$

$$\therefore \text{设 } P(m, -2m - 3), Q(0, n),$$

$$\therefore AM = 2m + 3, PN = -m,$$

$$\therefore 2m + 3 = -m \text{ ③},$$

$$\therefore PM = NQ = n - (-2m - 3),$$

$$\therefore PM + PN = OA = 8, \text{ 即 } n - (-2m - 3) + (-m) = 8 \text{ ④},$$

$$\text{③④联立解得: } m = -1, n = 6,$$

$$\therefore P(-3, -1);$$

当 $\angle AQP = 90^\circ$, $AQ = PQ$, P 在 x 轴的上方, 如图

同理可证明 $\triangle PQM \cong \triangle QAO$ (AAS),

$$\therefore PM = OQ, AO = MQ;$$

$\therefore$ 直线 $l: y = -2x - 3$,

$\therefore$ 设 $P(m, -2m - 3)$, $Q(0, n)$,

$\therefore MQ = -2m - 3 - n$, $AO = 8$,

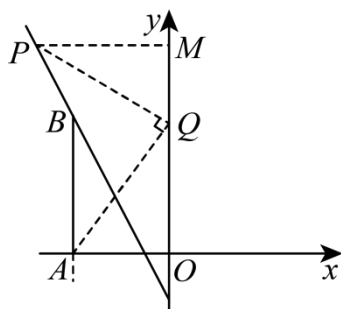
$\therefore -2m - 3 - n = 8$ ⑤,

$\therefore PM = -m$, $OQ = n$,

$\therefore -m = n$ ⑥,

⑤⑥联立解得: $m = -11$, $n = 11$,

$\therefore P(-11, 19)$;



当 $\angle AQP = 90^\circ$, $AQ = PQ$, P 在 x 轴的下方,

如图:

同理可证明 $\triangle PQM \cong \triangle QNA$ (AAS),

$\therefore PM = NQ$, $AN = MQ$;

$\therefore$ 直线 $l: y = -2x - 3$,

$\therefore$ 设 $P(m, -2m - 3)$, $Q(0, n)$,

$\therefore PM = 2m + 3 + n$, $MQ = AO = 8$,

$\therefore 2m + 3 + n = 8$ ⑦,

$\therefore QM = m$, $AN = n$,

$\therefore m = n$ ⑧,

①②联立解得: $m = \frac{5}{3}$, $n = \frac{5}{3}$,

【点睛】本题主要考查了一次函数与几何的综合、等腰直角三角形的性质与判定、全等三角形的判定与性质等知识点，熟练掌握一线三垂直模型是解题的关键.

【点睛】本题主要考查了一次函数与几何的综合、等腰直角三角形的性质与判定、全等三角形的判定与性质等知识点，熟练掌握一线三垂直模型是解题的关键.