

2024 学年第二学期期中检测

八年级数学

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 在下列方程中, 分式方程是 ()

A. $\frac{x+1}{3} = 2$

B. $\frac{\sqrt{x+1}}{3} = 2$

C. $\frac{3}{x+1} = 2$

D. $\frac{3}{\sqrt{x+1}} = 2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的定义. 判断一个方程是否为分式方程, 主要是依据分式方程的定义, 也就是看分母中是否含有未知数 (注意: 仅仅是字母不行, 必须是表示未知数的字母). 据此逐项判断即可.

【详解】解: A、它不是分式方程;

B、它不是分式方程;

C、它是分式方程;

D、它不是分式方程.

故选: C

2. 一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象不经过 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】先判断 k 、 b 的符号, 再判断直线经过的象限, 进而可得答案.

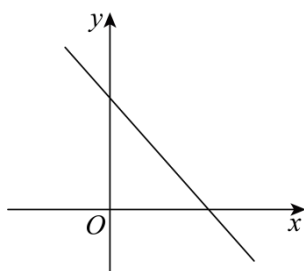
【详解】解: $\because k = 2 > 0, b = -3 < 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象经过第一、三、四象限, 不经过第二象限;

故选: B.

【点睛】本题考查了一次函数的系数与其图象的关系, 属于基础题型, 熟练掌握一次函数的图象与其系数的关系是解题的关键.

3. 如图是某一次函数的图像, 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 为该图像上两点, 如果 $x_1 > x_2$ 时, 那么 y_1 与 y_2 的大小关系是 ()



- A. $y_1 < y_2$ B. $y_1 > y_2$ C. $y_1 = y_2$ D. 无法判断

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查一次函数的性质，一次函数 $y = kx + b$ ，当 $k > 0$ 时， y 随 x 增大而增大；当 $k < 0$ 时， y 随 x 增大而减小。

根据一次函数性质求解即可。

【详解】解：根据一次函数的图象可知， y 随 x 增大而减小，

$$\because x_1 > x_2,$$

$$\therefore y_1 < y_2;$$

故选：A.

4. 下列方程中，没有实数根的是（ ）

A. $x + 1 = 0$

B. $x^2 - 1 = 0$

C. $\sqrt{x} + 1 = 0$

D. $\frac{x^2 - 8}{x - 3} = \frac{1}{x - 3}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了解无理方程，算术平方根，解分式方程等知识点，能把无理方程转化成有理方程和把分式方程转化成整式方程是解此题的关键。

移项，即可判断 A；根据平方根的定义可判断 B；根据算术平方根的非负性即可判断 C；方程两边都乘以 $x - 3$ ，再求出方程的解，进行检验后即可判断 D。

【详解】解：A、 $x + 1 = 0$ ，

移项，得 $x = -1$ ，

$\therefore$ 此方程有实数根，故本选项不符合题意；

B、 $x^2 - 1 = 0$ ，

$$\therefore x^2 = 1,$$

则 $x=1$ 或 $x=-1$

即原方程有实数根，故本选项不符合题意；

C、 $\because \sqrt{x}+1=0,$

$$\therefore \sqrt{x} = -1 < 0,$$

此时 x 不存在，

即原方程无实数根，故本选项符合题意；

D、 $\frac{x^2-8}{x-3} = \frac{1}{x-3},$

方程两边都乘以 $x-3$ ，得 $x^2-8=1,$

解得： $x = \pm 3,$

经检验 $x=3$ 是增根， $x=-3$ 是原方程的解，

即原方程有实数根，故本选项不符合题意；

故选：C.

5. 如果多边形的每一个内角都是 150° ，那么这个多边形的边数是（ ）

A. 8

B. 10

C. 12

D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】设这个多边形的边数为 n ，根据多边形的外角和是 360 度求出 n 的值即可.

【详解】解： $\because$ 多边形的各个内角都等于 150° ，

$\therefore$ 每个外角为 30° ，

设这个多边形的边数为 n ，则

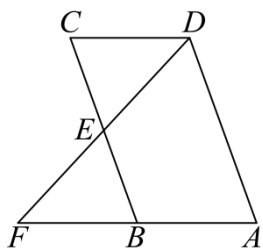
$$30^\circ \times n = 360^\circ,$$

解得 $n=12$.

故选 C.

【点睛】本题考查的是多边形的内角与外角，解答此类问题时要找到不变量，即多边形的外角和是 360° 这一关键.

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， E 是 BC 边的中点，联结 DE 并延长交 AB 的延长线于点 F ，如果 $AB=BF$ ，那么再添加以下一个条件使得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，请选出正确的是（ ）



A. $AD = BC$

B. $\angle A = \angle C$

C. $AB = CD$

D. $\angle F = \angle CDF$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的判定. 当添加 $\angle F = \angle CDF$ 时, 可证得 $\triangle CDE \cong \triangle BFE$ (AAS), 进而推出 $CD \parallel AB$, $CD = AB$, 即可得到四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

【详解】 解: 当添加 $\angle F = \angle CDF$ 时, $CD \parallel AF$,

$\therefore$ 点 E 是 BC 的中点,

$\therefore BE = CE$,

在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle BFE$ 中,

$$\begin{cases} \angle F = \angle CDE \\ \angle BEF = \angle CED, \\ BE = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle BFE$ (AAS),

$\therefore BF = CD$,

$\therefore AB = BF$,

$\therefore AB = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

而添加 $AD = BC$, $\angle A = \angle C$, $AB = CD$ 均无法证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

故选: D

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 直线 $y = 2x - 3$ 在 y 轴上的截距为_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 当 $x = 0$ 时, 进行计算即可得.

【详解】解：当 $x=0$ 时， $y=-3$ ，

则直线 $y=2x-3$ 在 y 轴上的截距为 -3 ，

故答案为： -3 。

【点睛】本题考查了一次函数图像与 x 轴、 y 轴交点，解题的关键是掌握一次函数的性质。

8. 关于 y 的方程 $m(y-1)=y$ ($m \neq 1$) 的解是_____.

【答案】 $y = \frac{m}{m-1}$

【解析】

【分析】此题考查了解一元一次方程，按照去括号、移项、合并同类项、系数化为1进行计算即可。

【详解】解： $m(y-1)=y$ ($m \neq 1$)

去括号得， $my-m=y$ ，

移项合并同类项得到， $(m-1)y=m$ ，

系数化为1得， $y = \frac{m}{m-1}$ ，

故答案为： $y = \frac{m}{m-1}$

9. 方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 的解为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】根据无理方程的解法，首先，两边平方解出 x 的值，然后验根，解答即可。

【详解】解：两边平方得： $2x+3=x^2$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0,$$

解方程得： $x_1=3$ ， $x_2=-1$ ，

检验：当 $x_1=3$ 时，方程的左边=右边，所以 $x_1=3$ 为原方程的解，

当 $x_2=-1$ 时，原方程的左边 $\neq$ 右边，所以 $x_2=-1$ 不是原方程的解。

故答案为 3。

【点睛】此题考查无理方程的解，解题关键在于掌握运算法则

10. 一次函数的图像经过点 $(0, 2)$ ，且与直线 $y=2x-5$ 平行，则这个一次函数的解析式是_____.

【答案】 $y=2x+2$

【解析】

【分析】 本题考查待定系数法求解析式，根据一次函数的图像与直线 $y = 2x - 5$ 平行，可设该一次函数为 $y = 2x + b$ ，再将点 $(0, 2)$ 代入，即可解答.

【详解】 解： $\because$ 一次函数的图像与直线 $y = 2x - 5$ 平行，

$\therefore$ 设该一次函数为 $y = 2x + b$ ，

$\because$ 该函数的图像经过点 $(0, 2)$ ，

$\therefore b = 2$ ，

$\therefore$ 这个一次函数的解析式为 $y = 2x + 2$.

故答案为： $y = 2x + 2$

11. 用换元法解分式方程 $\frac{2x^2}{x+1} - \frac{x+1}{x^2} + 1 = 0$ 时，如果设 $\frac{x^2}{x+1} = y$ ，那么原方程化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $2y^2 + y - 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查用换元法解分式方程的能力，可根据方程特点设 $\frac{x^2}{x+1} = y$ ，将原方程化简为关于 y 的方程.

【详解】 解： 设 $\frac{x^2}{x+1} = y$ ，则原方程可化为： $2y - \frac{1}{y} + 1 = 0$ ；

两边同乘以 y 可得 $2y^2 + y - 1 = 0$ ，

故答案为 $2y^2 + y - 1 = 0$.

【点睛】 本题主要考查换元法解分式方程，用换元法解一些复杂的分式方程是比较简单的一种方法，根据方程特点设出相应未知数，解方程能够使问题简单化，属于基础题.

12. 已知 $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ ，如果 $f(a) = 4$ ，则实数 a 的值是_____.

【答案】 12

【解析】

【分析】 根据新定义的关系式，利用条件列方程 $\frac{1}{2}a - 2 = 4$ ，解方程即可.

【详解】解： $\because f(x) = \frac{1}{2}x - 2, f(a) = 4,$

$$\therefore \frac{1}{2}a - 2 = 4,$$

移项得： $\frac{1}{2}a = 6,$

系数化 1 得： $a = 12,$

故答案为：12.

【点睛】本题考查新定义函数关系，根据等量关系列方程，掌握新定义函数关系，根据等量关系列方程是解题关键.

13. 若一个多边形有 9 条对角线，那么这个多边形是_____边形.

【答案】六

【解析】

【分析】根据 n 边形共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线列出方程，解方程即可.

【详解】设多边形有 n 条边，

则 $\frac{n(n-3)}{2} = 9,$

解得 $n_1 = 6, n_2 = -3$ (舍去),

即这个多边形的边数为 6.

故答案为六.

【点睛】本题考查了多边形的对角线，这类根据多边形的对角线，求边数的问题一般都可以化为求一元二次方程的解的问题，求解中舍去不符合条件的解即可.

14. 已知平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle A + \angle C = 140^\circ$ ，则 $\angle B$ 的度数是_____.

【答案】110°

【解析】

【分析】由平行四边形的性质可得 $\angle A = \angle C$ ， $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，即可求 $\angle B$ 的度数.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \angle A = \angle C, \angle A + \angle B = 180^\circ, \text{ 且 } \angle A + \angle C = 140^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 110^\circ,$$

故答案为： 110° .

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，掌握平行四边形的性质是本题的关键.

15. 联欢会上, 每位同学向其他同学赠送 1 件礼物, 结果共有互赠礼物 870 件, 求参加联欢会的同学人数, 设参加联欢会的同学有 x 人, 那么可列出方程_____.

【答案】 $x(x-1)=870$

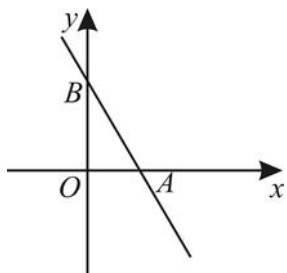
【解析】

【分析】 本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程, 设参加联欢会的同学有 x 人, 则每人送出 $(x-1)$ 件礼物, 根据共送礼物 870 件可列出方程.

【详解】 解: 设参加联欢会的同学有 x 人, 则每人送出 $(x-1)$ 件礼物,
由题意得, $x(x-1)=870$.

故答案为: $x(x-1)=870$.

16. 如图, 已知直线 $y=-2x+4$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 把直线 AB 绕点 A 旋转 90° , 则直线 AB 旋转后的表达式为_____.



【答案】 $y=\frac{1}{2}x-1$

【解析】

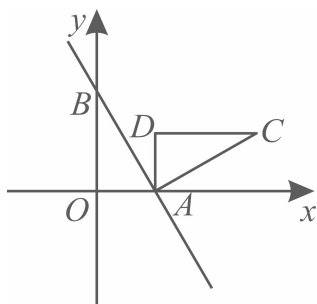
【分析】 本题主要考查旋转的性质, 待定系数法求解析式的综合, 掌握以上知识的综合运用, 图形结合是解题的关键.

根据直线与坐标轴有交点, 分别计算出点 A, B 的坐标, 可求出 OA, OB 的长, 由题意可得 AOB 绕点 A 旋转 90° 得到 $\triangle ADC$. 根据旋转的性质, 分类讨论, 顺时针旋转和逆时针旋转, 分别求出点 C 的坐标, 再根据待定系数法求解析式即可求解.

【详解】 解: 直线 $y=-2x+4$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B ,
令 $x=0$, 则 $y=4$, 令 $y=0$, 则 $x=2$,
 $\therefore A(2,0), B(0,4)$,
则 $OA=2, OB=4$,
 $\therefore$ 直线 AB 绕点 A 旋转 90° ,

$\therefore \triangle AOB$ 绕点 A 旋转 90° 得到 $\triangle ADC$.

① $\triangle AOB$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得 $\triangle ADC$, $\angle ADC = \angle AOB = 90^\circ$, 如图所示,



$\therefore DA \perp OA$, $\triangle AOB \cong \triangle ADC$,

$\therefore DC = OB = 4$, $AD = AO = 2$,

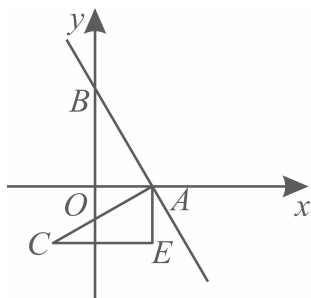
$\therefore C(6, 2)$,

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$, 把 $A(2, 0), C(6, 2)$ 代入得,

$$\begin{cases} 2k + b = 0 \\ 6k + b = 2 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 1$;

② $\triangle AOB$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得 $\triangle AEC$, $\angle AEC = \angle AOB = 90^\circ$, 如图所示,



$\therefore EA \perp OA$, $\triangle AOB \cong \triangle AEC$,

$\therefore EC = OB = 4$, $AE = AO = 2$,

$\therefore C(-2, 2)$,

设直线 AC 的解析式为 $y = k_1x + b_1 (k_1 \neq 0)$, 把 $A(2, 0), C(-2, -2)$ 代入得,

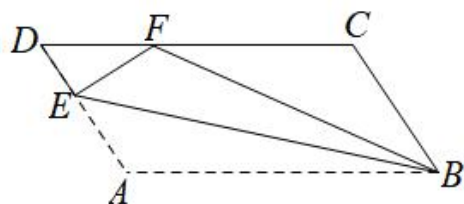
$$\begin{cases} 2k + b = 0 \\ -2k + b = -2 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 1$;

综上所述, 直线 BC 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 1$.

【点睛】 本题主要考查旋转的性质, 待定系数法求解析式的综合, 掌握以上知识的综合运用, 图形结合是解题的关键.

17. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, 以 BE 为折痕, 将 $\triangle ABE$ 向上翻折, 点 A 正好落在 CD 上的点 F 处. 若 $\triangle FDE$ 的周长为 5, $\triangle FCB$ 的周长为 17, 则 FC 的长为_____.



【答案】 6

【解析】

【分析】 根据翻折变换的性质、平行四边形的性质证明 $AB + BC = 11$, 此为解题的关键性结论; 运用 $\triangle FCB$ 的周长为 17, 求出 FC 的长, 即可解决问题.

【详解】 解: 如图, $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AD = BC, AB = DC$;

由题意得: $AE = FE, AB = BF$;

$\because \triangle FDE$ 的周长为 5, $\triangle FCB$ 的周长为 17,

$\therefore DE + DF + EF = 5, CF + BC + BF = 17,$

$\therefore (DE + EA) + (DF + CF) + BC + AB = 22,$

即 $2(AB + BC) = 22,$

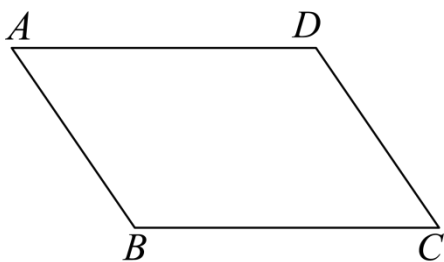
$\therefore AB + BC = 11,$ 即 $BF + BC = 11$;

$\therefore FC = 17 - 11 = 6,$

故答案为: 6.

【点睛】 该题主要考查了翻折变换的性质、平行四边形的性质等几何知识点及其应用问题, 解题的方法是准确找出图形中隐含的等量关系; 解题的关键是灵活运用翻折变换的性质、平行四边形的性质等几何知识点来分析、判断、解答.

18. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 10, BC = 15$, 面积为 120, 点 P 是边 AD 上一点, 连接 PB , 将线段 PB 绕着点 P 旋转 90° 得到线段 PQ , 如果点 Q 恰好落在直线 AD 上, 那么线段 AQ 的长为_____.



【答案】 2 或 14

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质，旋转的性质，勾股定理，注意分类讨论；由题意得 $BP \perp AD$ ；分顺时针旋转与逆时针旋转两种情况，利用旋转性质及勾股定理即可求解．根据题意确定 $BP \perp AD$ 是解题的关键．

【详解】 解： $\because$ 线段 PB 绕着点 P 旋转 90° 得到线段 PQ ，点 Q 恰好落在直线 AD 上，

$$\therefore BP \perp AD,$$

$$\because BC \cdot BP = 120,$$

$$\therefore BP = 120 \div BC = 8,$$

$$\text{由勾股定理得: } AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = 6;$$

当线段 PB 绕着点 P 顺时针旋转 90° 时，如图，

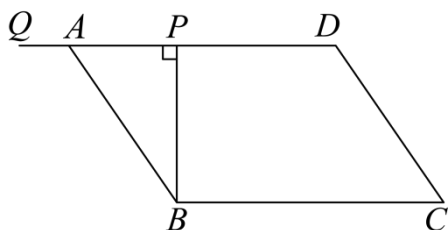
$$\therefore PQ = BP = 8,$$

$$\therefore AQ = PQ - AP = 2;$$

当线段 PB 绕着点 P 逆时针旋转 90° 时，

则 PQ 在点 P 的右侧，

$$\therefore AQ = AP + PQ = 6 + 8 = 14;$$



综上， AQ 的长为 2 或 14；

故答案为：2 或 14．

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 解方程: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$

【答案】 $x = -5$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程和解一元二次方程，解题的关键是熟练掌握解分式方程和解一元二次方程的方法和步骤. 先去分母，将分式方程化为整式方程，再进行求解即可.

【详解】 解: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2},$

$$(x+2)^2 - 16 = x - 2,$$

$$x^2 + 4x + 4 - 16 = x - 2,$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0,$$

$$(x+5)(x-2) = 0,$$

$$x+5=0, x-2=0,$$

$$x_1 = -5, x_2 = 2,$$

检验，当 $x = -5$ 时， $x^2 - 4 \neq 0$ ，

$\therefore x = -5$ 是原方程的解，

当 $x = 2$ 时， $x^2 - 4 = 0$ ，

$\therefore x = 2$ 不是原方程的解.

20. 解方程组: $\begin{cases} x+y=6, \\ x^2-3xy+2y^2=0. \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=2; \end{cases} \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=3. \end{cases}$

【解析】

【分析】 先对 $x^2-3xy+2y^2=0$ 分解因式转化为两个一元一次方程，然后联立①，组成两个二元一次方程组，解之即可.

【详解】 将方程 $x^2-3xy+2y^2=0$ 的左边因式分解，得 $x-2y=0$ 或 $x-y=0$.

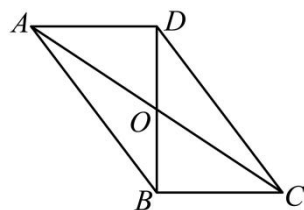
原方程组可以化为 $\begin{cases} x+y=6, \\ x-2y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=6, \\ x-y=0. \end{cases}$

解这两个方程组得 $\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=3. \end{cases}$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=3. \end{cases}$

【点睛】 本题考查了高次方程组，将高次方程化为一次方程是解题的关键.

21. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AB=10$ ， $AD=6$ ， $\angle DBC=90^\circ$.



(1) 求 DO 的长；

(2) 求 $\triangle DOC$ 的面积.

【答案】 (1) 4

(2) 12

【解析】

【分析】 此题考查了平行四边形的性质、勾股定理等知识，熟练掌握平行四边形的性质是关键.

(1) 根据平行四边形的性质和勾股定理得到 $BD=8$ ，即可得到 DO 的长；

(2) 根据平行四边形的性质得到 $BC=AD=6$ ，利用三角形的面积公式进行计算即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OB=OD, AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DBC=90^\circ$,

$\therefore \angle ADB=90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中，

$\therefore AB=10, AD=6$,

$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=8$,

$\therefore OD=\frac{1}{2}BD=4$.

【小问 2 详解】

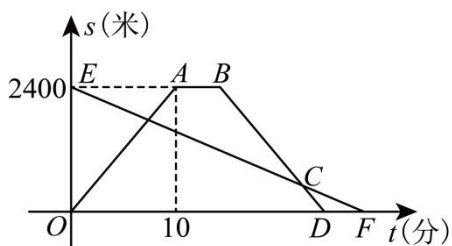
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore BC = AD = 6,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DOC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} OD \cdot BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$$

22. 小明租用共享单车从家出发, 匀速骑行到相距 2400 米的邮局办事. 小明出发的同时, 他的爸爸以每分钟 96 米的速度从邮局沿同一条道路步行回家, 小明在邮局停留了 2 分钟后沿原路按原速返回. 设他们出发后经过 t (分) 时, 小明与家之间的距离为 s_1 (米), 小明爸爸与家之间的距离为 s_2 (米), 图中折线 $OABD$ 、线段 EF 分别表示 s_1 、 s_2 与 t 之间的函数关系的图像.



(1) 当 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 分钟时, 小明爸爸正好回到家;

(2) s_2 与 t 之间的函数表达式为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 当 $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 分钟时, 小明和爸爸第一次相遇. (第 (3) 需要写出过程)

【答案】 (1) 25

(2) $s_2 = 2400 - 96t$

(3) $\frac{50}{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用, 解题的关键是数形结合.

(1) 根据时间 = 路程 $\div$ 速度, 即可求解;

(2) 根据小明爸爸与家之间的距离 = 总路程 - 已行驶的路程, 即可求解;

(3) 求出当 $0 \leq t \leq 10$ 时, $s_1 = 240t$, 联立
$$\begin{cases} s_1 = 240t \\ s_2 = 2400 - 96t \end{cases}$$
, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 家和邮局之间的距离为 2400 米, 小明爸爸的步行速度为每分钟 96 米,

$\therefore$ 小明爸爸从邮局到家的时间为: $2400 \div 96 = 25$ (分钟),

即当 $t = 25$ 分钟时, 小明爸爸正好回到家,

故答案为：25；

【小问2详解】

s_2 与 t 之间的函数表达式为 $s_2 = 2400 - 96t$ ，

故答案为： $s_2 = 2400 - 96t$ ；

【小问3详解】

当 $0 \leq t \leq 10$ 时， $s_1 = kt$ ，将 $(10, 2400)$ 代入得：

$$10k = 2400,$$

解得： $k = 240$ ，

$\therefore$ 当 $0 \leq t \leq 10$ 时， $s_1 = 240t$ ，

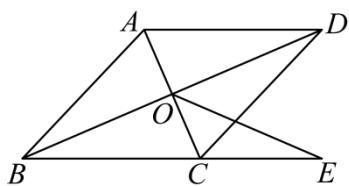
$$\text{联立} \begin{cases} s_1 = 240t \\ s_2 = 2400 - 96t \end{cases},$$

$$\text{解得： } t = \frac{50}{7},$$

即当 $t = \frac{50}{7}$ 分钟时，小明和爸爸第一次相遇，

故答案为： $\frac{50}{7}$ 。

23. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD = BC$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， E 在边 BC 的延长线上，且 $OE = OB$ ， $\angle ADB = \angle OEB$ 。



(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

(2) 连接 DE ，求证： $DE \perp BE$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形的判定，平行四边形的性质，熟记定理是解题的关键。

(1) 证明 $\angle ADB = \angle OBC$ ，推出 $AD \parallel BC$ ，利用对边平行且相等的四边形是平行四边形即可证明结论成立；

(2) 由平行四边形的性质得到 $BO = OD$ ，由等量代换推出 $OE = OD$ ，根据三角形内角和定理即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because OE = OB$,

$$\therefore \angle OBE = \angle OEB,$$

$$\because \angle ADB = \angle OEB,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle OBC,$$

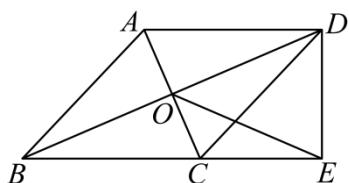
$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\because AD = BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,



$$\therefore BO = OD,$$

$$\because OE = OB,$$

$$\therefore OE = OD,$$

$$\therefore \angle OBE = \angle OEB, \angle OED = \angle ODE,$$

$$\because \angle OBE + \angle OEB + \angle OED + \angle ODE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BEO + \angle DEO = \angle BED = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \perp BE.$$

24. 在直角坐标平面中, 任意线段的中点坐标可以用这条线段的两个端点的坐标来表示, 若平面内点

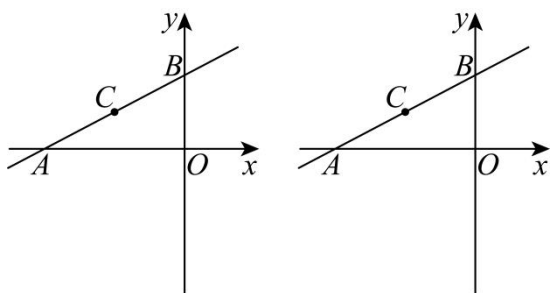
$M(x_1, y_1)$, 点 $N(x_2, y_2)$, 则线段 MN 的中点坐标可以表示为 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, 如图, 直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$

与 x 轴交于 A 点, 与 y 轴交于 B 点, 点 C 是线段 AB 的中点.

(1) 求点 C 的坐标

(2) 点 D 在 y 轴上, 且 $CD \perp AB$, 求直线 CD 的表达式.

(3) 在平面直角坐标系内, 直线 AB 下方是否存在一点 E , 使得 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, 若存在, 请直接写出点 E 的坐标, 不存在, 请说明理由.



(备用图)

【答案】(1) $C(-2, 1)$; (2) $y = -2x - 3$; (3) $(-2, -4)$ 或 $(2, -2)$ 或 $(-1, -1)$

【解析】

【分析】(1) 求出直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 与 x 轴、 y 轴的交点 A 、 B 的坐标，利用题中线段的中点坐标公式建立方程求解即可；

(2) 根据点 A 、 B 的坐标可得 OA 、 OB 的长，根据勾股定理求出 AB ，可得出 BC ，证明 $\triangle DBC \sim \triangle ABO$ ，根据相似三角形的性质可得 BD 的长，可得出点 D 的坐标，然后利用待定系数法求解即可；

(3) 分别过点 A ，点 B 作 AB 的垂线，在直线 AB 下方截取 $AE_1 = AB$ ， $BE_2 = AB$ ，连接 BE_1 ， AE_2 交于 E_3 ，则 $\triangle ABE_1$ 、 $\triangle ABE_2$ 、 $\triangle ABE_3$ 是等腰直角三角形，过点 E_1 ， E_2 作 $E_1M \perp x$ 轴于 M ， $E_2N \perp y$ 轴于 N ，根据全等三角形的判定和性质求得 E_1M 、 AM 的长，即可得点 E_1 的坐标，同理可得点 E_2 的坐标，根据线段的中点坐标公式可得点 E_3 的坐标。

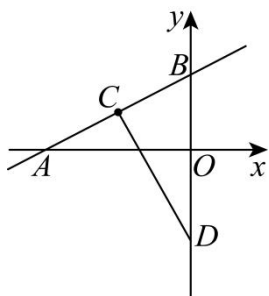
【详解】解：(1) $\because$ 直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 与 x 轴交于 A 点，与 y 轴交于 B 点，

$$\therefore A(-4, 0), B(0, 2),$$

$$\therefore C\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right),$$

$$\therefore C(-2, 1);$$

(2) 如图，



$$\therefore A(-4, 0), B(0, 2),$$

$$\therefore OA = 4, OB = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OAB \text{ 中, } AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2\sqrt{5},$$

$\because$ 点 C 是线段 AB 的中点,

$$\therefore BC = \sqrt{5},$$

$\because CD \perp AB,$

$$\therefore \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle AOB = 90^\circ,$$

$\because \angle DBC = \angle ABO,$

$$\therefore \triangle DBC \sim \triangle ABO,$$

$$\therefore \frac{BD}{BA} = \frac{BC}{BO}, \text{ 即 } \frac{BD}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore BD = 5,$$

$\because OB = 2,$

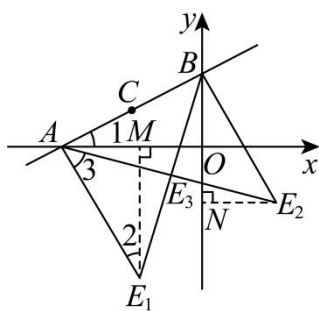
$$\therefore OD = 3,$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(0, -3),$

设直线 CD 的表达式为 $y = kx - 3,$ 将 $C(-2, 1)$ 代入得: $-2k - 3 = 1,$ 解得: $k = -2,$

$\therefore$ 直线 CD 的表达式为 $y = -2x - 3;$

(3) 分别过点 $A,$ 点 B 作 AB 的垂线, 在直线 AB 下方截取 $AE_1 = AB, BE_2 = AB,$ 连接 BE_1, AE_2 交于 $E_3,$



$\because AE_1 \perp AB, BE_2 \perp AB, AE_1 = AB, BE_2 = AB,$

$\therefore \triangle ABE_1, \triangle ABE_2$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle ABE_1 = \angle BAE_2 = 45^\circ,$$

$$\therefore AE_3 = BE_3, \angle AE_3B = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABE_3$ 是等腰直角三角形,

过点 E_1, E_2 作 $E_1M \perp x$ 轴于 $M, E_2N \perp y$ 轴于 N ,

$\because \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ, \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$

$\therefore \angle 1 = \angle 2,$

$\because AE_1 = AB, \angle AME_1 = \angle AOB = 90^\circ,$

$\therefore \triangle AME_1 \cong \triangle BOA (AAS),$

$\therefore ME_1 = OA = 4, AM = OB = 2,$

$\therefore OM = 2,$

$\therefore$ 点 E_1 的坐标 $(-2, -4),$

同理点 E_2 的坐标 $(2, -2),$

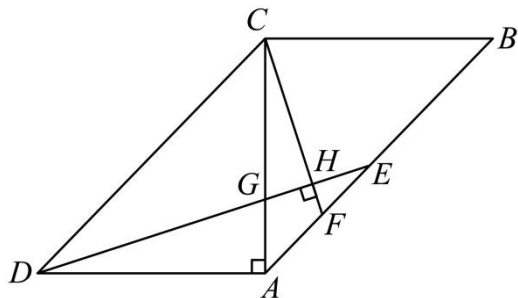
$\because A(-4, 0),$

$\therefore$ 点 E_3 的坐标 $(\frac{-4+2}{2}, \frac{-2+0}{2}),$ 即 $E_3(-1, -1),$

综上, 点 E 的坐标为 $(-2, -4)$ 或 $(2, -2)$ 或 $(-1, -1).$

【点睛】 本题为一次函数的综合应用, 涉及全等三角形的判定与性质、等腰直角三角形的判断和性质、相似三角形的判断和性质、分类讨论及数形结合的思想. 本题第三问注意考虑问题要全面, 做到不重不漏. 本题考查知识点较多, 综合性较强, 难度较大.

25. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AD \perp AC, AD = AC, E$ 为射线 BA 上一点, 直线 DE 与直线 AC 交于点 $G,$ $CH \perp DE$ 于 H, CH 的延长线与直线 AB 交于点 $F.$



(1) 当 E 在线段 AB 上时,

①若 $\angle CDE = 30^\circ, CG = 2,$ 求 $\square ABCD$ 的面积;

②求证: $DG = CF + FG;$

(2) 若 $HG=HF$, $FG=\sqrt{2}$, 求 DG 的长.

【答案】 (1) ① $4+2\sqrt{3}$; ② 见解析

(2) 2 或 $2+2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) ①过点 G 作 $GP \perp CD$ ，垂足为 P ，证明 $\triangle GCP$ 是等腰直角三角形，求出 $GP = CP = \sqrt{2}$ ，再根据含 30° 角的直角三角形的特征，求出 $DG = 2\sqrt{2}$ ，利用勾股定理求出 $DP = \sqrt{6}$ ，进而得到 $CD = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ，利用勾股定理即可求出 $AC = AD = 1 + \sqrt{3}$ ，即可得到 $\square ABCD$ 的面积；②如图，延长 CF 交 DA 的延长线于 T ，连接 FG ，利用全等三角形的性质证明 $DG = CT, FG = FT$ 即可；

(2) 根据题意可求 $GH = HF = 1$ ，当点 E 在线段 AB 上时，根据 $AD \perp AC$ ， $CH \perp DE$ ， $HG = HF$ ， $AD = AC$ ，可得 $\angle CFG = \angle EGF = \angle DCA = 45^\circ$ ，进而得到 $\angle DCA + \angle ACF = \angle CFG + \angle ACF$ ，即 $\angle DCT = \angle AGF$ ，同理 (1) ② 可证 $\angle ATC = \angle AGF$ ， $DG = CF + GF = CF + FT$ ，进而得到 $\angle ATC = \angle DCT$ ，推出 $\triangle CDT$ 是等腰三角形，根据等腰三角形三线合一，得到 $CH = HT = 1 + \sqrt{2}$ ，即可求出 $DG = CT = 2 + 2\sqrt{2}$ ；当点 E 在射线 BA 上时，同理证明 $\triangle CDG$ 是等腰三角形，即可解答。

【小问 1 详解】

①解: 过点 G 作 $GP \perp CD$, 垂足为 P ,

$$\because CG = 2,$$

$$\therefore \sqrt{CP^2 + PG^2} = CG,$$

$$\therefore GP = CP = \sqrt{2},$$

$$\because \angle CDE = 30^\circ,$$

$$\therefore DG = 2PG = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore DP = \sqrt{DG^2 - GP^2} = \sqrt{6},$$

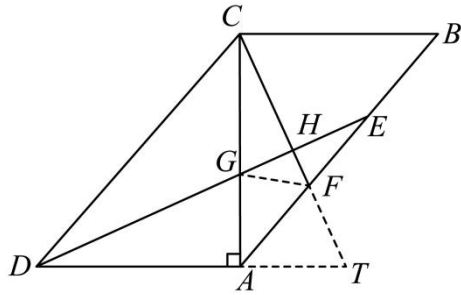
$$\therefore CD = \sqrt{6} + \sqrt{2},$$

$$\because \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{2}AD = CD = \sqrt{2} + \sqrt{6},$$

$$\therefore AC = AD = 1 + \sqrt{3},$$

$$\therefore \square ABCD \text{ 的面积为: } AC \cdot AD = (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3};$$

②如图 1 中, 延长 CF 交 DA 的延长线于 T , 连接 FG ,



$$\because CH \perp DE,$$

$$\therefore \angle CHD = 90^\circ,$$

$$\because \angle CHG = \angle DAG = 90^\circ, \angle CGH = \angle AGD,$$

$$\therefore \angle GCH = \angle GDA,$$

$$\because \angle DAG = \angle CAT = 90^\circ, AD = AC,$$

$$\therefore \triangle DAG \cong \triangle CAT (\text{ASA}),$$

$$\therefore DG = CT, AG = AT,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC,$$

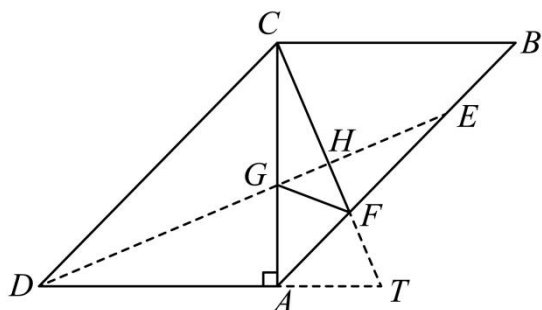
$$\therefore \angle ACB = \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\because AD = AC$$

$$\begin{aligned}
&\therefore AC = BC, \\
&\therefore \angle CAB = 45^\circ, \\
&\because \angle CAT = 90^\circ, \\
&\therefore \angle GAF = \angle TAF = 45^\circ, \\
&\because AF = AF, \\
&\therefore \triangle GAF \cong \triangle TAF (\text{SAS}), \\
&\therefore GF = TF, \\
&\therefore DG = CT = CF + TF = CF + FG;
\end{aligned}$$

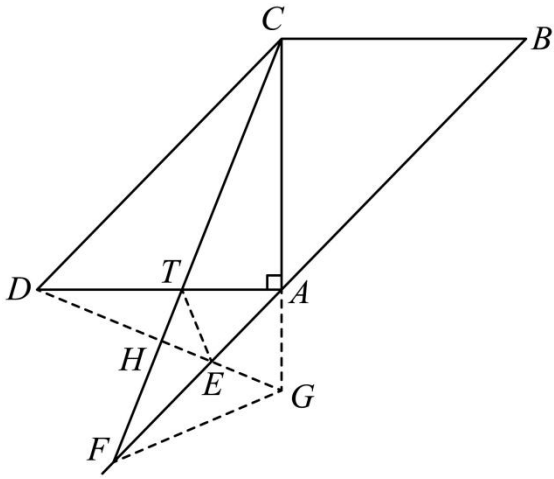
【小问 2 详解】

解：当点 E 在线段 AB 上时，



$$\begin{aligned}
&\because HG = HF, \quad FG = \sqrt{2}, \quad CH \perp DE, \\
&\therefore GH = HF = 1, \\
&\because AD \perp AC, \quad AD = AC, \\
&\therefore \angle CFG = \angle EGF = \angle DCA = 45^\circ, \\
&\therefore \angle DCA + \angle ACF = \angle CFG + \angle ACF, \text{ 即 } \angle DCT = \angle AGF, \\
&\text{同理 (1) ②得 } \angle ATC = \angle AGF, \quad FG = FT = \sqrt{2}, \quad DG = CF + GF = CF + FT, \\
&\therefore \angle ATC = \angle DCT, \\
&\therefore \triangle CDT \text{ 是等腰三角形,} \\
&\therefore CH = HT = 1 + \sqrt{2}, \\
&\therefore DG = CT = 2 + 2\sqrt{2};
\end{aligned}$$

当点 E 在射线 BA 上时，



同理得： $\triangle ACT \cong \triangle ADG$,

$$\therefore \angle ATC = \angle AGE, AT = AG,$$

$$\because \angle CAB = 180^\circ - \angle ADC - \angle DAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 45^\circ,$$

$$\because AF = AF,$$

$$\therefore \triangle ATF \cong \triangle AGF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle AFT = \angle AFG,$$

$$\because \angle AED = \angle GEF, \angle DAE = \angle HGF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle ADE = \angle AFT,$$

$$\because CD \parallel BF,$$

$$\therefore \angle AFT = \angle DCT,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DCT,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle ATC = \angle ADC + \angle DCT = \angle ADC + \angle ADE = \angle CDG,$$

$$\therefore \triangle CDG \text{ 是等腰三角形},$$

$$\because CF \perp DG,$$

$$\therefore DH = HG = 1,$$

$$\therefore DG = DH + HG = 2;$$

综上， DG 长为 2 或 $2 + 2\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质，勾股定理，全等三角形的性质与判定，直角三角形的特征，等腰三角形的判定与性质，正确的添加辅助线，构造全等三角形是解题的关键.