

2024 学年度第二学期八年级数学期中质量监测试卷

八年级数学

(测试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 一次函数 $y = -x + 1$ 的图像不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查一次函数的图像, 根据一次函数 $y = kx + b$, 当 $k < 0$, $b > 0$ 时函数经过第一、二、四象限进行判断即可.

【详解】解: 一次函数 $y = -x + 1$ 的图像经过第一、二、四象限, 不经过第三象限.

故选: C

2. 直线 $y = \frac{1}{2}x + m$ 经过点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 且 $x_1 > x_2$, 下列结论正确的是 ()

- A. $y_1 > y_2$ B. $y_1 = y_2$
C. $y_1 < y_2$ D. y_1 、 y_2 的大小不能确定

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查一次函数的性质, 根据在一次函数 $y = kx + b$ 中, 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大进行求解即可.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = \frac{1}{2}x + m$ 中, $k = \frac{1}{2} > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,

$\because x_1 > x_2$,

$\therefore y_1 > y_2$.

故选: A

3. 下列说法正确的是 ()

A. $x^2 + \frac{1}{y} = \sqrt{3}$ 是二元二次方程

B. $x^2 = 0$ 是二项方程

C. $\frac{x}{3} - \frac{1}{x} = 1$ 是分式方程

D. $\frac{x^2 - 1}{x} = \sqrt{2}$ 是无理方程

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查二元二次方程，分式方程，无理方程等概念，根据二元二次方程，分式方程，无理方程等概念逐项判断即可.

【详解】 解：A、 $x^2 + \frac{1}{y} = \sqrt{3}$ 是分式方程，故本选项说法错误；

B、 $x^2 = 0$ 不是二项方程，故本选项说法错误；

C、 $\frac{x}{3} - \frac{1}{x} = 1$ 是分式方程，故本选项说法正确；

D、 $\frac{x^2 - 1}{x} = \sqrt{2}$ 是分式方程，故本选项说法错误.

故选：C

4. 下列方程中，有实数根的是（ ）

A. $\frac{2x}{x-5} = \frac{x+5}{x-5}$

B. $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 0$

C. $\sqrt{x^2 + 2} - 1 = 0$

D. $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】 题考查了分式方程，一元二次方程，无理方程的根问题，熟练掌握知识点是解题的关键. 解各个方程，进行判断即可.

【详解】 解：A 选项： $\frac{2x}{x-5} = \frac{x+5}{x-5}$,

方程两边同乘 $x-5$ ，得 $2x = x+5$,

解得 $x = 5$;

检验： $x = 5$ 时， $x-5 = 0$,

$\therefore x = 5$ 不是该分式方程的解，分式方程无解.

$\therefore$ 该方程没有实数根，不合题意；

B 选项: $\because \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 0$,

$$\therefore \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases},$$

解得: $x=1$.

$\therefore$ 该方程有实数根, 符合题意;

C 选项: $\because \sqrt{x^2+2}-1=0$,

$$\therefore \sqrt{x^2+2}=1,$$

$$\therefore x^2+2=1,$$

$$\therefore x^2=-1,$$

$\therefore$ 该方程没有实数根, 不合题意;

D 选项: $x^4+3x^2+2=0$,

因式分解, 得 $(x^2+1)(x^2+2)=0$,

$$\therefore x^2+1=0 \text{ 或 } x^2+2=0,$$

$$\therefore x^2=-1 \text{ 或 } x^2=-2,$$

$\therefore$ 该方程没有实数根, 不合题意.

故选: B

5. 一个多边形截去一个角后, 得到的新多边形内角和为 540° , 则原多边形边数为 ()

A. 4

B. 6

C. 4 或 6

D. 4 或 5 或 6

【答案】D

【解析】

【分析】根据多边形的内角和公式求出 n , 再根据截去一个角, 则会存在以下三种情况, 多边形边数不变, 增加 1 或减少 1 来解答.

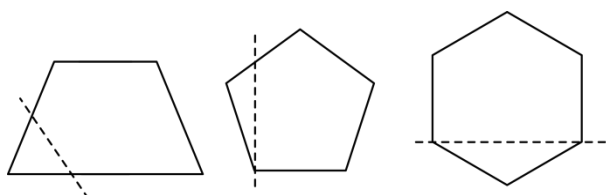
【详解】解: 设新多边形边数为 n ,

$\because$ 新多边形内角和为 540° ,

$$\therefore (n-2) \times 180^\circ = 540^\circ,$$

解得 $n=5$,

若多边形截去一个角, 则会存在以下三种情况, 多边形边数不变, 增加 1 或减少 1, 如下图所示:



∴ 原多边形边数为 4 或 5 或 6,

故选: D.

【点睛】 本题主要考查多边形内角和和边数的关系, 掌握内角和公式是解题的关键.

6. 在四边形 $ABCD$ 中, O 是对角线的交点, 不能判定这个四边形是平行四边形的是 ()

A. $AB \parallel CD, AB = CD$

B. $AD \parallel BC, \angle BAD = \angle BCD$

C. $AB \parallel CD, AO = CO$

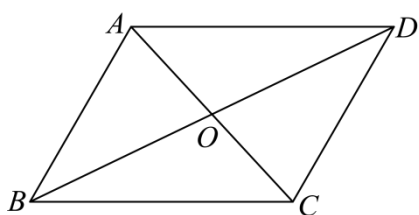
D. $AD \parallel BC, AB = CD$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的判定, 三角形全等的判定与性质, 根据三角形全等的判定与性质以及平行四边形的判定方法逐一判断即可.

【详解】 解: 如图,



A 选项: $\because AB \parallel CD, AB = CD,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 本选项不合题意;

B 选项: $\because AD \parallel BC,$

$\therefore \angle BAD + \angle ABC = 180^\circ,$

$\because \angle BAD = \angle BCD$

$\therefore \angle BCD + \angle ABC = 180^\circ$

$\therefore AB \parallel CD,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 本选项不合题意;

C 选项: $\because AB \parallel CD,$

$\therefore \angle BAO = \angle DCO, \angle ABO = \angle CDO,$

$\therefore AO = CO,$

$$\therefore AOB \cong COD (\text{AAS}),$$

$$\therefore DO = BO,$$

$$\therefore AO = CO,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，本选项不合题意；

D 选项：由 $AD \parallel BC, AB = CD$ 无法证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，本选项符合题意.

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 小题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 一次函数 $y = x - 3$ 的图像在 y 轴上的截距是_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数的性质，即一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象与 y 轴相交于 $(0, b)$ ， b 即为此函数在 y 轴上的截距.

先根据一次函数的解析式判断出 b 的值，再根据一次函数的性质进行解答.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = x - 3$ 中 $b = -3$,

$\therefore$ 此函数图象在 y 轴上的截距是 -3 .

故答案为： -3 .

8. 一次函数 $y = -2x - 1$ 的图像向下平移 2 个单位，所得直线的表达式是_____.

【答案】 $y = -2x - 3$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质，根据平移性质：上加下减，进行作答即可.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = -2x - 1$ 的图像向下平移 2 个单位，

$\therefore$ 所得直线的表达式为 $y = -2x - 1 - 2$ ，即 $y = -2x - 3$.

故答案为： $y = -2x - 3$

9. 方程 $(x-1)\sqrt{x-3} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】 本题考查解无理方程，由方程得到 $x - 1 = 0$ 或 $\sqrt{x - 3} = 0$ ，进而求解即可.

【详解】解： $\because (x-1)\sqrt{x-3}=0$,

$\therefore x-1=0$ 或 $\sqrt{x-3}=0$,

解得 $x_1=1$, $x_2=3$,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, $x-3<0$, $\sqrt{x-3}$ 无意义,

$\therefore$ 该方程的解为 $x=3$.

故答案为: $x=3$.

10. 解方程 $\frac{x^2}{x+1} - \frac{x+1}{3x^2} = 2$, 如果设 $\frac{x^2}{x+1} = y$, 那么得到关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 2y - \frac{1}{3} = 0$

【解析】

【分析】将 $\frac{x^2}{x+1} = y$ 代入原方程可得 $y - \frac{1}{3y} = 2$, 再两边同时乘以 y 可得 $y^2 - \frac{1}{3} = 2y$, 整理即可得到答案.

【详解】解: 设 $\frac{x^2}{x+1} = y$,

则方程 $\frac{x^2}{x+1} - \frac{x+1}{3x^2} = 2$ 可化为: $y - \frac{1}{3y} = 2$,

两边同时乘以 y 可得: $y^2 - \frac{1}{3} = 2y$,

整理得: $y^2 - 2y - \frac{1}{3} = 0$,

$\therefore$ 得到关于 y 的整式方程是: $y^2 - 2y - \frac{1}{3} = 0$,

故答案为: $y^2 - 2y - \frac{1}{3} = 0$.

【点睛】本题考查了换元法解分式方程, 准确进行计算是解题的关键.

11. 如果一个多边形的内角和是外角和的 5 倍, 那么这个多边形的边数是_____.

【答案】 12

【解析】

【分析】本题考查了多边形的内角与外角. 根据多边形的内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 和外角和定理列出方程, 然后求解即可.

【详解】解: 设多边形的边数为 n ,

由题意得, $(n-2) \cdot 180^\circ = 5 \times 360^\circ$,

解得 $n = 12$.

故这个多边形的边数是 12.

故答案为: 12.

12. 若关于 x 方程 $\frac{x-2}{x-3} = \frac{m}{x-3} + 2$ 无解, 则 m 的值是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】把原方程去分母化为整式方程, 求出方程的解得到 x 的值, 由分式方程无解得到分式方程的分母为 0, 求出 x 的值, 两者相等得到关于 m 的方程, 求出方程的解即可得到 m 的值.

【详解】解: 去分母得: $x-2 = m+2(x-3)$,

去括号得: $x-2 = m+2x-6$,

移项得: $x-2x = m-6+2$,

合并同类项得: $-x = m-4$,

系数化为 1 得: $x = 4-m$,

$\because$ 关于 x 方程 $\frac{x-2}{x-3} = \frac{m}{x-3} + 2$ 无解,

$\therefore x-3 = 0$,

$\therefore x = 3$,

$\therefore 4-m = 3$,

解得: $m = 1$,

故答案为: 1.

【点睛】本题考查了解分式方程、分式方程无解, 熟练掌握解分式方程的步骤以及理解分式方程无解的情况是解题的关键.

13. 已知点 A 是直线 $y = -2x + 1$ 在第一象限内的一点, 且它到两坐标轴的距离相等, 那么点 A 的坐标是_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

【解析】

【分析】本题考查直线上的点的坐标特点, 点到坐标轴的距离, 解一元一次方程. 根据点 A 是直线 $y = -2x + 1$

在第一象限内的一点，设 $A(a, -2a+1)$ ，其中 $a > 0$ ， $-2a+1 > 0$ ，根据点 A 到两坐标轴的距离相等列出方程，求解即可.

【详解】解：∵点 A 是直线 $y = -2x+1$ 在第一象限内的一点，

∴设 $A(a, -2a+1)$ ，其中 $a > 0$ ， $-2a+1 > 0$ ，

∵点 A 到两坐标轴的距离相等，

$$\therefore |-2a+1| = |a|,$$

$$\therefore -2a+1 = a,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{3},$$

$$\therefore A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

故答案为： $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

14. 已知点 $B(1,3)$ 是直线 $y = kx+b$ ($k < 0$) 上一点，则 $kx+b > 3$ 的解集是_____.

【答案】 $x < 1$

【解析】

【分析】由 $k < 0$ 可得 y 随 x 的增大而减小，由点 $B(1,3)$ 是直线 $y = kx+b$ ($k < 0$) 上一点结合函数图象的性质即可得到答案.

【详解】解：∵直线 $y = kx+b$ 中 $k < 0$ ，

∴ y 随 x 的增大而减小，

∵点 $B(1,3)$ 是直线 $y = kx+b$ ($k < 0$) 上一点，

∴当 $x < 1$ 时，函数图象在 $y = 3$ 的上方，

∴ $kx+b > 3$ 的解集是： $x < 1$ ，

故答案为： $x < 1$.

【点睛】本题考查了一次函数与一元一次不等式，熟练掌握一次函数的图象与性质是解题的关键.

15. 一项工程若乙单独做要比甲慢 3 天完成，现在甲乙合作 5 天，余下的再由甲单独做 3 天完成，求甲乙单独完成此项工程所需的时间，若设乙单独做需要 x 天，可列方程为_____.

【答案】 $\frac{5+3}{x-3} + \frac{1}{x} = 1$

【解析】

【分析】设乙单独做需要 x 天，则设甲单独做需要 $(x-3)$ 天，根据甲队完成的部分+乙队完成的部分=总工程（单位 1），列出方程即可.

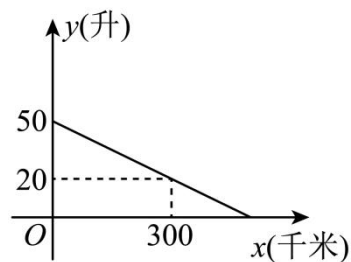
【详解】解：设乙单独做需要 x 天，则设甲单独做需要 $(x-3)$ 天，根据题意，得

$$\frac{5+3}{x-3} + \frac{1}{x} = 1$$

故答案为： $\frac{5+3}{x-3} + \frac{1}{x} = 1$.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出分式方程，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键.

16. 已知汽车装满油之后，油箱里的剩余油量 y (升) 与汽车行驶路程 x (千米) 之间的函数图象如图所示. 为了行驶安全，油箱中的油量不能少于 5 (升)，那么这辆汽车装满油后至多行驶_____ (千米) 后需要再次加油.



【答案】 450

【解析】

【分析】根据函数图象中点的坐标利用待定系数法求出一次函数解析式，再根据一次函数图象上点的坐标特征即可求出剩余油量为 5 升时行驶的路程，此题得解.

【详解】解：设该一次函数解析式为 $y = kx + b$ ，将 $(300, 20)$ ， $(0, 50)$ 代入得

$$\begin{cases} 300k + b = 20 \\ b = 50 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -0.1 \\ b = 50 \end{cases},$$

$\therefore$ 该一次函数解析式为 $y = -0.1x + 50$.

当 $y = -0.1x + 50 = 5$ 时， $x = 450$.

故答案为： 450 .

【点睛】本题考查了一次函数的应用，根据点的坐标利用待定系数法求出一次函数解析式是解题的关键.

17. 已知 $\square ABCD$ 中, $AB=4$, $\angle ABC$ 与 $\angle DCB$ 的角平分线交 AD 边于点 E, F , 且 $EF=3$, 则边 AD 的长为 _____.

【答案】 5 或 11

【解析】

【分析】 由平行四边形的性质和角平分线的定义证出 $\angle ABE = \angle AEB$, 得出 $AE = AB = 4$, 同理: $DF = CD = 4$, 再分两种情况计算即可.

【详解】 $\because BE$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel CB, \quad CD = AB = 4,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CBE$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB,$$

$$\therefore AE = AB = 4,$$

同理: $DF = CD = 4$,

分两种情况:

①如图 1 所示:

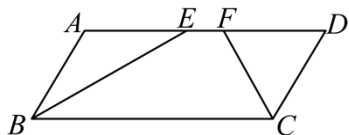


图1

$$\because EF = 3,$$

$$\therefore AD = AE + EF + DF = 4 + 3 + 4 = 11;$$

②如图 2 所示:

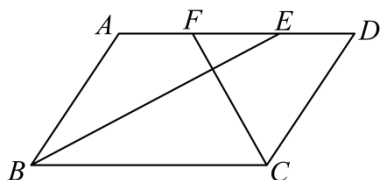


图2

$$\because EF = 4, \quad AE = DF = 4,$$

$$\therefore AF = 1, \quad \therefore AD = AF + DF = 1 + 4 = 5;$$

综上所述: AD 的长为 11 或 5;

故答案为 5 或 11.

【点睛】此题主要考查了角平分线的定义、平行四边形的性质、平行线的性质、等腰三角形的判定等知识；熟练掌握平行四边形的性质，证明三角形是等腰三角形是解决问题的关键.

18. 直线 $y = -2x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点， M 为线段 AB 上一点，将 AOB 绕点 M 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A_1O_1B_1$ ，若点 $O_1(-1, 3)$ ，那么点 M 的坐标为_____.

【答案】(1, 2)

【解析】

【分析】此题考查了一次函数与几何综合，勾股定理，旋转的性质，解题的关键是掌握以上知识点.

设 $M(m, -2m + 4)$ ，根据题意得到 $MO_1^2 = MO^2$ ，然后代入求解即可.

【详解】解：直线 $y = -2x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点， M 为线段 AB 上一点

$\therefore$ 设 $M(m, -2m + 4)$

$\therefore$ 将 AOB 绕点 M 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A_1O_1B_1$,

$\therefore MO_1 = MO$

$\therefore MO_1^2 = MO^2$

$\therefore (m+1)^2 + (-2m+4-3)^2 = m^2 + (-2m+4)^2$

解得 $m = 1$

$\therefore M(1, 2)$.

故答案为：(1, 2).

三、计算题 (本大题共 4 小题，每题 6 分，满分 24 分)

19. 解关于 x 的方程： $bx^2 = x^2 + 1$ ($b \neq 1$)

【答案】当 $b > 1$ 时， $x = \pm \frac{1}{b-1} \sqrt{b-1}$ ；当 $b < 1$ 时，方程无实数根

【解析】

【分析】利用直接开平方法求解可得.

【详解】解：移项整理得： $(b-1)x^2 = 1$.

$\therefore b \neq 1$ ，即 $b-1 \neq 0$,

$\therefore x^2 = \frac{1}{b-1}$,

当 $b > 1$ 时, $x = \pm \frac{1}{b-1} \sqrt{b-1}$;

当 $b < 1$ 时, 方程无实数根.

【点睛】 本题主要考查解一元二次方程的能力, 熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法: 直接开平方法、因式分解法、公式法、配方法, 结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键.

20. 解方程: $\frac{6x}{x^2-9} + \frac{3}{3-x} = 1 - \frac{1}{x+3}$.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到分式方程的解.

【详解】 解: $\frac{6x}{x^2-9} + \frac{3}{3-x} = 1 - \frac{1}{x+3}$

去分母得: $6x - 3(x+3) = x^2 - 9 - (x-3)$,

整理得: $x^2 - 4x + 3 = 0$,

即 $(x-1)(x-3) = 0$,

解得: $x = 1$ 或 $x = 3$,

当 $x = 1$ 时, $(x+3)(x-3) \neq 0$,

当 $x = 3$ 时, $(x+3)(x-3) = 0$,

$\therefore x = 3$ 是增根, 分式方程的解为 $x = 1$.

【点睛】 此题考查了解分式方程, 利用了转化的思想, 解分式方程注意要检验.

21. 解方程: $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$.

【答案】 $x = 20$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程, 掌握解无理方程的技巧和解一元二次方程是解题的关键.

根据方程的特点可以构造平方差公式, 进而转化为一元二次方程, 解一元二次方程即可, 最后根据无理方程的特点, 要进行检验.

【详解】 解: $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$ ①

设 $\sqrt{2x-4} + \sqrt{x+5} = k$ ②,

① $\times$ ② 得: $2x - 4 - x - 5 = k$,

解得: $x = k + 9$,

$$\therefore k = x - 9$$

$$\therefore \sqrt{2x-4} + \sqrt{x+5} = x-9 \text{ ③},$$

$$\text{①+③得: } 2\sqrt{2x-4} = x-8,$$

$$\text{两边同时平方, 得: } 4(2x-4) = (x-8)^2,$$

$$\text{整理得: } x^2 - 24x + 80 = 0$$

$$\text{解得: } x_1 = 20, x_2 = 4,$$

$$\text{检验, 当 } x = 20 \text{ 时, } \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1,$$

$\therefore x = 20$ 是原方程的解,

$$\text{当 } x = 4 \text{ 时, } \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = -1, \text{ 不符合题意, 舍去,}$$

$\therefore$ 原方程的解为 $x = 20$.

$$22. \text{ 解方程组: } \begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\text{【答案】} \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组, 正确的计算是解题的关键.

将方程组因式分解后, 由②得 $x + y = \pm 3$, 分别代入①, 解关于 x, y 的二元一次方程组, 即可求解.

$$\text{【详解】 解: } \begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\text{方程组可变形为 } \begin{cases} (x+y)(x-y) = 12 \text{ ①} \\ (x+y)^2 = 9 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{由②, 得 } x + y = \pm 3,$$

$$\text{把 } x + y = 3 \text{ 代入①, 得 } 3(x - y) = 12, \text{ 即 } x - y = 4,$$

$$\text{解方程组} \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=4 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

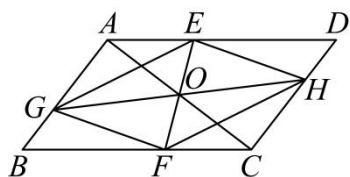
把 $x+y=-3$ 代入①, 得 $-3(x-y)=12$, 即 $x-y=-4$,

$$\text{解方程组} \begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=-4 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x=-\frac{7}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\therefore \text{方程组的解为} \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-\frac{7}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

四、解答题 (本大题共 4 小题, 第 23 题 7 分, 第 24 题 8 分, 第 25 题 9 分, 第 26 题 10 分, 满分 34 分)

23. 已知 $\square ABCD$, 点 O 为对角线 AC 的中点, 过点 O 分别作直线 EF , GH , 直线 EF 交边 AD 、 BC 于点 E 、 F , 直线 GH 交边 AB 、 CD 于点 G 、 H . 求证: 四边形 $EHFG$ 为平行四边形.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 此题考查了平行四边形的性质和判定, 全等三角形的性质和判定, 平行线的性质, 解题的关键是掌握以上知识点.

由平行四边形得到 $OA=OC$, $AD \parallel BC$, $\angle DAO = \angle BCO$, 证明出 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA), 得到 $OE=OF$, 同理得到 $OG=OH$, 即可证明四边形 $EHFG$ 为平行四边形.

【详解】 $\because \square ABCD$, 点 O 为对角线 AC 的中点,

$$\therefore OA=OC, \quad AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle DAO = \angle BCO$$

$$\text{又} \because \angle AOE = \angle COF$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF \text{ (ASA)}$$

$$\therefore OE = OF$$

$\therefore$ 同理可证, $\triangle AOG \cong \triangle COH$

$$\therefore OG = OH$$

$\therefore$ 四边形 $EHFG$ 为平行四边形.

24. 小杰和小丽分别从相距 24km 的 A 、 B 两地同时同向出发, 小杰经过 B 地后再走 2 小时追上小丽, 小杰走的总路程相当于小丽走 8 小时的路程, 求小杰和小丽的速度分别是多少?

【答案】 小杰和小丽的速度分别是 12km/h , 6km/h

【解析】

【分析】 此题考查了分式方程的应用, 解一元二次方程, 解题的关键是根据题意列出方程组.

设小杰和小丽的速度分别是 $x\text{km/h}$, $y\text{km/h}$, 根据题意列出方程组求解即可.

【详解】 解: 设小杰和小丽的速度分别是 $x\text{km/h}$, $y\text{km/h}$

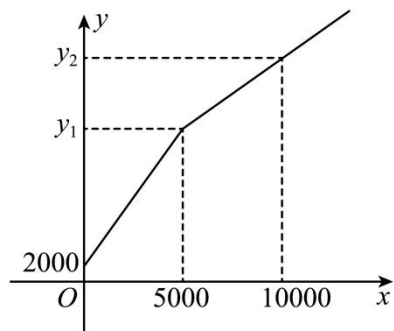
$$\text{根据题意得, } \begin{cases} 2x + 24 = 8y \\ \frac{8y}{x} = \frac{8y - 24}{y} \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = 2 \end{cases} \text{ (舍去), } \begin{cases} x_2 = 12 \\ y_2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{经检验, } \begin{cases} x_2 = 12 \\ y_2 = 6 \end{cases} \text{ 是原方程的解}$$

$\therefore$ 小杰和小丽的速度分别是 12km/h , 6km/h .

25. 某公司开发了一款人工智能客户支持系统. 该系统总的运行成本与服务的客户数量之间存在函数关系. 已知: 系统维护有固定成本 (即系统没有客户咨询, 仍需要支付的成本); 另外每服务一个客户, 需要一定的运行成本; 且当服务人数超过 5000 人时, 超过部分每服务一个客户的运行成本降低 2 元, 假设系统总的运行成本为 y 元, 客户的数量为 x 人, 请结合函数图像, 回答下列问题:



(1) 系统维护的固定成本是_____元.

(2) 若当客户人数为 5000 人时, 总的运行成本为 y_1 元, 若当客户人数为 10000 人时, 总的运行成本为 y_2 元, 且 $y_1 = \frac{8}{13}y_2$.

①当客户人数不超过 5000 人时, 求每服务一个客户需要的运行成本.

②如果总的运行成本不少于 35000 元, 求该公司至少服务客户多少人?

【答案】 (1) 2000

(2) ①6 元; ②5750 人

【解析】

【分析】 本题考查一次函数解决实际问题, 读懂题意是解题的关键.

(1) 由图像与 y 轴的交点的坐标即可解答;

(2) ①当客户人数不超过 5000 人时, 设每服务一个客户需要的运行成本 n 元, 得到 $y_1 = 5000n + 2000$, $y_2 = 10000n - 8000$, 根据 $y_1 = \frac{8}{13}y_2$ 得到方程, 求解即可;

②先求出当 $x \leq 5000$ 时, $y = 6x + 2000$; 当 $x > 5000$ 时, $y = 4x + 12000$. 判断当 $y \geq 35000$ 时, $x > 5000$, 因此得到 $4x + 12000 \geq 35000$, 求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由图像可得, 当 $x = 0$ 时, $y = 2000$,

$\therefore$ 系统维护的固定成本是 2000 元.

故答案为: 2000;

【小问 2 详解】

解: ①当客户人数不超过 5000 人时, 设每服务一个客户需要的运行成本 n 元, 则当服务人数超过 5000 人时, 超过部分每服务一个客户的运行成本为 $(n - 2)$ 元,

$$\therefore y_1 = 5000n + 2000,$$

$$y_2 = y_1 + 5000(n - 2) = 5000n + 2000 + 5000(n - 2) = 10000n - 8000,$$

$$\therefore y_1 = \frac{8}{13}y_2,$$

$$\therefore 5000n + 2000 = \frac{8}{13}(10000n - 8000),$$

解得: $n = 6$,

$\therefore$ 当客户人数不超过 5000 人时, 每服务一个客户需要的运行成本为 6 元.

②由①可知: 当客户人数不超过 5000 人时, 每服务一个客户需要的运行成本为 6 元; 当服务人数超过 5000

人时, 超过部分每服务一个客户的运行成本为 4 元.

$$\therefore \text{当 } x \leq 5000 \text{ 时, } y = 6x + 2000;$$

$$\text{当 } x > 5000 \text{ 时, } y = 6 \times 5000 + 2000 + 4(x - 5000) = 4x + 12000.$$

$$\therefore \text{当 } x = 5000 \text{ 时, } y = 6 \times 5000 + 2000 = 32000,$$

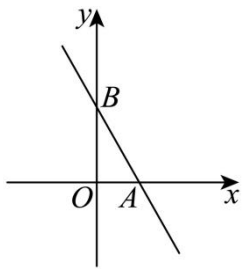
$$\therefore \text{当 } y \geq 35000 \text{ 时, } x > 5000,$$

$$\therefore 4x + 12000 \geq 35000,$$

解得 $x \geq 5750$.

$\therefore$ 该公司至少服务客户 5750 人.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点, 点 A 关于点 B 的对称点为点 C , 四边形 $OACD$ 是平行四边形.



(1) 求点 C 、点 D 的坐标.

(2) 过线段 OD 的中点作直线 l , 直线 l 把平行四边形 $OACD$ 分成面积为 $3:5$ 的两部分, 求直线 l 的解析式:

(3) 在 (2) 的条件下, 直线 l 与 y 轴交于点 M (当点 M 在点 B 的下方), 点 Q 在直线 CD 上, 且 $\angle MQC = \angle OAB$, 请直接写出点 Q 的坐标.

【答案】 (1) $C(-6, 16)$, $D(-12, 16)$

$$(2) y = \frac{4}{9}x + \frac{32}{3} \text{ 或 } y = -\frac{4}{15}x + \frac{32}{5}$$

$$(3) \text{点 } Q \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{36}{5}, 16\right) \text{ 或 } \left(\frac{36}{5}, 16\right)$$

【解析】

【分析】 (1) 首先求出 $B(0, 8)$, $A(6, 0)$, 然后根据中心对称的性质求出 $C(-6, 16)$, 然后根据平行四边形的性质求出 $D(-12, 16)$;

(2) 如图所示, 点 E 为 OD 的中点, 连接 EC , EA , 首先得出 $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle AOE}$, 然后分两种情况讨论, 分别根据题意求出点 F 和点 G 的坐标, 然后利用待定系数法求解即可;

(3) 首先求出 $M\left(0, \frac{32}{5}\right)$, 然后分两种情况讨论, 当点 Q 在 y 轴左边时, 求出 $QM \parallel AC$, 得到 QM 所在直线表达式为 $y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{5}$, 然后求出 $Q\left(-\frac{36}{5}, 16\right)$; 当点 Q 在 y 轴右边时, 作点 Q 关于 y 轴的对称点 Q' , 根据对称性求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = 8$

$\therefore B(0, 8)$;

当 $y = 0$ 时, $0 = -\frac{4}{3}x + 8$

解得 $x = 6$

$\therefore A(6, 0)$

$\because$ 点 A 关于点 B 的对称点为点 C ,

$\therefore C(-6, 16)$

$\because$ 四边形 $OACD$ 是平行四边形

$\therefore CD = OA = 6$, $CD \parallel OA$

$\therefore$ 点 D 的横坐标为 $-6 - 6 = -12$, 纵坐标为 16

$\therefore D(-12, 16)$;

【小问 2 详解】

解: 如图所示, 点 E 为 OD 的中点, 连接 EC , EA ,

$\because$ 四边形 $OACD$ 是平行四边形

$\therefore OD \parallel AC$

$\because$ 点 E 为 OD 的中点

$\therefore E(-6, 8)$

$\therefore S_{\triangle CDE} = S_{\triangle AOE}$

$\therefore$ 直线 l 把平行四边形 $OACD$ 分成面积为 $3:5$ 的两部分，如图 l_1 交 AC 于点 F

$\therefore$ 当 $S_{\text{四边形}DEFC} : S_{\text{四边形OEFA}} = 3:5$ 时，

$$\therefore S_{\triangle CEF} : S_{\triangle AEF} = 3:5$$

$$\therefore CF : AF = 3:5$$

$$\therefore C(-6,16), A(6,0)$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 的纵坐标为 } 16 \times \frac{5}{5+3} = 10$$

$$\therefore \text{将 } y=10 \text{ 代入 } y = -\frac{4}{3}x + 8 \text{ 得, } 10 = -\frac{4}{3}x + 8$$

$$\text{解得 } x = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore F\left(-\frac{3}{2}, 10\right)$$

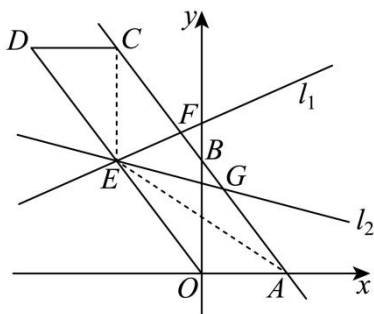
设 l_1 表达式为 $y = kx + b$

$$\text{根据题意得, } \begin{cases} -\frac{3}{2}k + b = 10 \\ -6k + b = 8 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = \frac{4}{9} \\ b = \frac{32}{3} \end{cases}$$

$$\therefore l_1 \text{ 的表达式为 } y = \frac{4}{9}x + \frac{32}{3};$$

$\therefore$ 当 $S_{\text{四边形DEGC}} : S_{\text{四边形OEGA}} = 5:3$ 时，如图 l_2 交 AC 于点 G



$$S_{\triangle CEG} : S_{\triangle AEG} = 5:3$$

$$\therefore CG : AG = 5:3$$

$$\therefore C(-6, 16), A(6, 0)$$

$$\therefore \text{点 } G \text{ 的纵坐标为 } 16 \times \frac{3}{5+3} = 6$$

$$\therefore \text{将 } y=6 \text{ 代入 } y=-\frac{4}{3}x+8 \text{ 得, } 6=-\frac{4}{3}x+8$$

$$\text{解得 } x=\frac{3}{2}$$

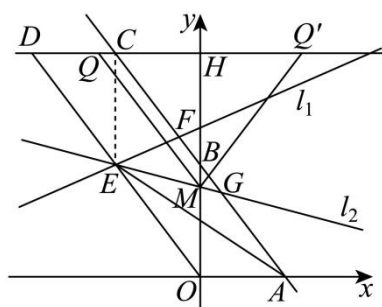
$$\therefore G\left(\frac{3}{2}, 6\right)$$

$$\text{同理利用待定系数法求出 } l_2 \text{ 表达式为 } y=-\frac{4}{15}x+\frac{32}{5}$$

$$\text{综上所述, 直线 } l \text{ 的解析式为 } y=\frac{4}{9}x+\frac{48}{2} \text{ 或 } y=-\frac{4}{15}x+\frac{32}{5};$$

【小问 3 详解】

解: 如图所示,



$\therefore$ 直线 l 与 y 轴交于点 M (当点 M 在点 B 的下方),

$\therefore$ 点 M 为直线 l_2 与 y 轴的交点

$$\therefore \text{当 } x=0 \text{ 时, } y=-\frac{4}{15}x+\frac{32}{5}=\frac{32}{5}$$

$$\therefore M\left(0, \frac{32}{5}\right)$$

当点 Q 在 y 轴左边时,

$$\therefore \angle MQC = \angle OAB, \angle OAB = \angle HCB$$

$$\therefore \angle MQC = \angle HCB$$

$$\therefore QM \parallel AC$$

$$\therefore QM \text{ 所在直线表达式为 } y=-\frac{4}{3}x+\frac{32}{5}$$

$$\therefore \text{将 } y=16 \text{ 代入 } y=-\frac{4}{3}x+\frac{32}{5} \text{ 得, } 16=-\frac{4}{3}x+\frac{32}{5}$$

$$\text{解得 } x=-\frac{36}{5}$$

$$\therefore Q\left(-\frac{36}{5}, 16\right);$$

当点 Q 在 y 轴右边时, 作点 Q 关于 y 轴的对称点 Q'

$$\therefore MQ = MQ'$$

$$\therefore \angle MQC = \angle MQ'C$$

$$\therefore Q'\left(\frac{36}{5}, 16\right)$$

综上所述, 点 Q 的坐标为 $\left(-\frac{36}{5}, 16\right)$ 或 $\left(\frac{36}{5}, 16\right)$.

【点睛】 此题考查了一次函数和几何综合, 等边对等角, 平行四边形的性质, 平行线的性质, 待定系数法求一次函数解析式等知识, 解题的关键是掌握以上知识点.