

2024 学年第二学期八年级数学学科第二阶段质量调研试卷

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 若一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、四象限, 则 ()

- A. $k > 0, b > 0$ B. $k > 0, b < 0$ C. $k < 0, b < 0$ D. $k < 0, b > 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象与系数的关系, 牢记 “ $k < 0, b > 0 \Leftrightarrow y = kx + b$ 的图象在一、二、四象限” 是解题的关键.

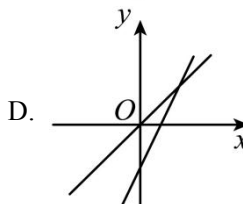
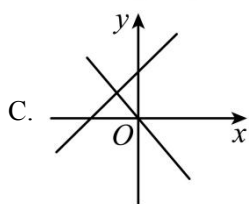
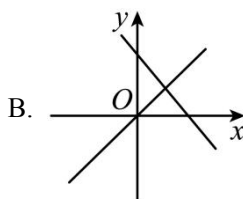
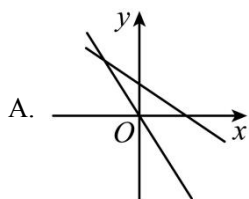
根据一次函数图象和性质进行判断即可.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、四象限,

$\therefore k < 0, b > 0$.

故选: D.

2. 表示一次函数 $y = mx + n$ 与正比例函数 $y = mnx$ (m, n 是常数且 $mn \neq 0$) 图象是 ()



【答案】A

【解析】

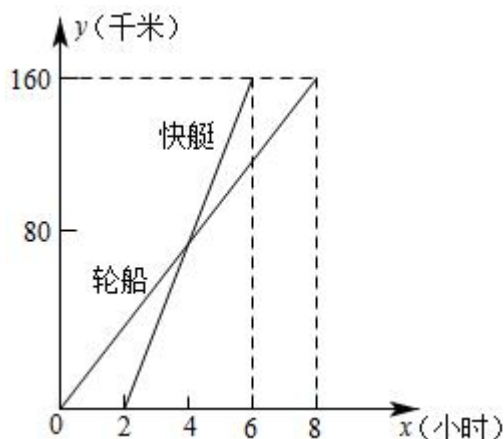
【分析】本题考查一次函数和正比例函数的图象. 根据函数的图象经过的象限得到 m, n, mn 的取值范围, 逐一判断即得.

【详解】图中 $y = mnx$ 的图象过原点, 另一条直线是 $y = mx + n$ 的图象,

- A. 由函数 $y = mx + n$ 的图象可得 $m < 0, n > 0$, 由函数 $y = mnx$ 的图象可得 $mn < 0$, A 正确;
B. 由函数 $y = mx + n$ 的图象可得 $m < 0, n > 0$, 由函数 $y = mnx$ 的图象可得 $mn > 0$, 产生矛盾, B 错误;
C. 由函数 $y = mx + n$ 的图象可得 $m > 0, n > 0$, 由函数 $y = mnx$ 的图象可得 $mn < 0$, 产生矛盾, C 错误;

D. 由函数 $y = mx + n$ 的图象可得 $m > 0$, $n < 0$, 由函数 $y = mn x$ 的图象可得 $mn > 0$, 产生矛盾, D 错误.
 故选: A.

3. 一艘轮船和一艘快艇沿相同路线从甲港出发到乙港, 行驶过程随时间变化的图象如图所示, 下列结论错误的是 ()



- A. 轮船的速度为 20 千米/小时
 B. 快艇的速度为 $\frac{80}{3}$ 千米/小时
 C. 轮船比快艇先出发 2 小时
 D. 快艇比轮船早到 2 小时

【答案】B

【解析】

【分析】先计算轮船和快艇的速度, 再结合图象, 逐一判断.

【详解】解: 轮船的速度为: $160 \div 8 = 20$ 千米/小时,

快艇的速度为: $160 \div (6 - 2) = 40$ 千米/小时,

故 A 正确, B 错误; 由函数图象可知, C、D 正确.

故选: B.

【点睛】本题主要考查了函数图象的读图能力和函数与实际问题结合的应用, 解题的关键是要能根据函数图象的性质和图象上的数据分析得出函数表示的实际意义, 再结合实际意义得到正确的结论.

4. 顺次联结四边形 $ABCD$ 各边中点所形成的四边形是矩形, 那么四边形 $ABCD$ 是 ()

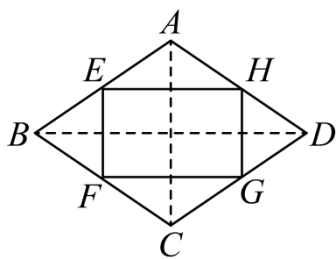
- A. 平行四边形
 B. 矩形
 C. 菱形
 D. 等腰梯形

【答案】C

【解析】

【分析】根据矩形的性质可知每个角都是直角, 说明每组邻边互相垂直, 进而可判断出四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直, 由此结合选项即可得出正确答案.

【详解】如图,



$\because$ 四边形 EFGH 是矩形,

$\therefore \angle FEH = 90^\circ$,

$\therefore FE \perp EH$.

$\because$ 点 E, F, H 分别为 AB, BC, AD 中点,

$\therefore EF \parallel AC, EH \parallel BD$,

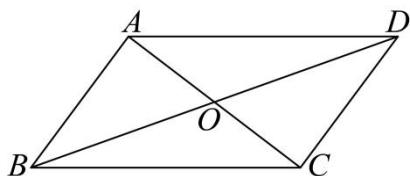
$\therefore AC \perp BD$,

而四个选项中只有菱形的对角线互相垂直,

故选: C.

【点睛】 本题主要考查矩形, 菱形的性质, 三角形中位线的性质, 掌握矩形和菱形的性质是解题的关键.

5. 如图, 在四边形 ABCD 中, 对角线 AC 和 BD 相交于点 O. 下列条件不能判断四边形 ABCD 是平行四边形的是 ()



A. $AB = DC, AD = BC$;

B. $AB \parallel DC, AD = BC$;

C. $AB \parallel DC, \angle BAD = \angle BCD$;

D. $OA = OC, OB = OD$;

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的判定方法, 熟练掌握平行四边形的判定方法是解题的关键. 由平行四边形的判定方法分别对各个选项进行判断即可.

【详解】 解: A、 $\because AB = DC, AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形, 故选项 A 不符合题意;

B、 $\because AB \parallel DC, AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 ABCD 不一定是平行四边形, 也可能是等腰梯形, 故选项 B 符合题意,

C、 $\because AB \parallel DC$,

$$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

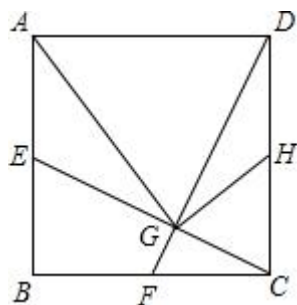
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故选项 C 不符合题意;

D、 $\because OA = OC, OB = OD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故选项 D 不符合题意;

故选: B.

6. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 的中点, CE 、 DF 交于 G , 连接 AG 、 HG . 下列结论: ① $CE \perp DF$; ② $AG = AD$; ③ $\angle CHG = \angle DAG$; ④ $HG = \frac{1}{2}AD$, 其中正确的有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 D

【解析】

【分析】 连接 AH , 由四边形 $ABCD$ 是正方形与点 E 、 F 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 的中点, 易证得 $\triangle BCE \cong \triangle CDF$ 与 $\triangle ADH \cong \triangle DCF$, 根据全等三角形的性质, 易证得 $CE \perp DF$ 与 $AH \perp DF$, 根据垂直平分线的性质, 即可证得 $AG = AD$, 由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 即可证得

$HG = \frac{1}{2}AD$, 根据等腰三角形的性质, 即可得 $\angle CHG = \angle DAG$, 则问题得解.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC = CD = AD, \angle B = \angle BCD = 90^\circ,$$

$\because$ 点 E 、 F 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 的中点,

$$\therefore BE = CF,$$

在 $\triangle BCE$ 与 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} BE = CF \\ \angle B = \angle DCF, \\ BC = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CDF$ (SAS),

$\therefore \angle ECB = \angle CDF$,

$\because \angle BCE + \angle ECD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ECD + \angle CDF = 90^\circ$,

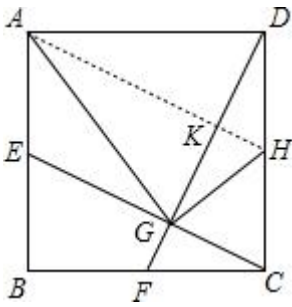
$\therefore \angle CGD = 90^\circ$,

$\therefore CE \perp DF$, 故①正确;

在 $Rt\triangle CGD$ 中, H 是 CD 边的中点,

$\therefore HG = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AD$, 故④正确;

如图, 连接 AH ,



同理可得: $AH \perp DF$,

$\because HG = HD = \frac{1}{2}CD$,

$\therefore DK = GK$,

$\therefore AH$ 垂直平分 DG ,

$\therefore AG = AD$, 故②正确;

$\therefore \angle DAG = 2\angle DAH$,

同理: $\triangle ADH \cong \triangle DCF$,

$\therefore \angle DAH = \angle CDF$,

$\because GH = DH$,

$\therefore \angle HDG = \angle HGD$,

$\therefore \angle GHC = \angle HDG + \angle HGD = 2\angle CDF$,

$\therefore \angle CHG = \angle DAG$, 故③正确.

故选: D.

【点睛】此题考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质以及垂直平分线的性质等知识. 此题综合性很强，难度较大，解题的关键是注意数形结合思想的应用.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分)

7. 当 m _____ 时，函数 $y = (m - 3)x + m + 2$ 是一次函数.

【答案】 $\neq 3$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的定义，正确理解一次函数的定义是解题的关键.

根据函数 $y = (m - 3)x + m + 2$ 是一次函数，则 $m - 3 \neq 0$ ，然后求解即可.

【详解】解： $\because$ 函数 $y = (m - 3)x + m + 2$ 是一次函数，

$$\therefore m - 3 \neq 0,$$

$$\therefore m \neq 3,$$

故答案为： $\neq 3$.

8. 直线 $y = -2(x + 3)$ 的截距是_____.

【答案】 -6

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征，截距的定义，牢记直线上任意一点的坐标都满足函数关系式 $y = kx + b$ 是解题的关键. 代入 $x = 0$ 求出 y 值，此题得解.

【详解】解：当 $x = 0$ 时， $y = -2 \times (0 + 3) = -6$ ，

$$\therefore \text{直线 } y = -2(x + 3) \text{ 的截距是 } -6.$$

故答案为： -6 .

9. 已知一次函数 $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ ，如果 $f(a) = 3$ ，那么实数 a 的值为_____.

【答案】 8

【解析】

【分析】把 $x = a$ 代入 $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ 求解.

【详解】解：把 $x = a$ 代入 $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ 得 $f(a) = \frac{1}{2}a - 1 = 3$ ，

解得 $a=8$.

故答案为: 8.

【点睛】 本题考查一次函数的性质, 解题关键是熟练掌握一次函数的性质, 理解 $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ 即为

$$y = \frac{1}{2}x - 1.$$

10. 已知一次函数 $y = (m+1)x - 2$ 图像过点 $A(-1, -4)$, 那么当 x 的值增大时, 函数 y 的值随之_____. (填“增大”或填“减小”)

【答案】 增大

【解析】

【分析】 把点 A 的坐标代入函数解析式求得 m 的值, 然后结合 $(m+1)$ 的符号确定该函数图象的增减性, 由函数图象的增减性解答.

【详解】 解: 把 $A(-1, -4)$ 代入得 $-4 = -(m+1) - 2$,

解得: $m = 1$,

$\therefore$ 一次函数解析式为 $y = 2x - 2$,

即 x 的值增大时, 函数 y 的值随之增大,

故答案为: 增大.

11. 如果直线 $y = kx + b (k > 0)$ 是由正比例函数 $y = kx$ 的图像向左平移 1 个单位得到, 那么不等式 $kx + b > 0$ 的解集是_____.

【答案】 $x > -1$

【解析】

【分析】 直接利用一次函数平移规律得出图像平移后与 x 轴交点, 进而得出答案.

【详解】 解: $\because$ 直线 $y = kx + b (k > 0)$ 是由正比例函数 $y = kx$ 的图像向左平移 1 个单位得到,

$\therefore y = kx + b$ 经过 $(-1, 0)$,

$\therefore$ 不等式 $kx + b > 0$ 的解集是: $x > -1$.

故答案为: $x > -1$.

【点睛】 此题主要考查了一次函数的几何变换以及一次函数与一元一次方程的应用不等式, 正确得出图像与 x 轴交点是解题关键.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A - \angle B = 20^\circ$, 那么 $\angle C =$ ____度.

【答案】 100

【解析】

【分析】 根据平行四边形对角相等，邻角互补即可求解.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ, \quad \angle C = \angle A,$$

$$\therefore \angle A - \angle B = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 100^\circ, \quad \angle B = 80^\circ.$$

$$\therefore \angle C = \angle A = 100^\circ.$$

故答案为：100.

【点睛】 本题考查平行四边形的性质，熟练掌握平行四边形对角相等，邻角互补是解题的关键.

13. 如果一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，那么这个多边形是_____边形.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的内角与外角. 根据多边形的内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 和外角和定理列出方程，然后求解即可.

【详解】 解： 设多边形的边数为 n ,

$$\text{由题意得, } (n-2) \cdot 180^\circ = 2 \times 360^\circ,$$

$$\text{解得 } n = 6.$$

故这个多边形的边数是 6.

故答案为：6.

14. 已知菱形的边长为 6cm，一个内角为 30° ，那么该菱形的面积为_____ cm^2 .

【答案】 18

【解析】

【分析】 本题主要考查了菱形的性质，含 30° 角的直角三角形性质，勾股定理，解题的关键是熟练运用菱形的性质. 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M，根据题意可知 $\angle ABC = 30^\circ$ ，得到 $AM = \frac{1}{2} AB = 3\text{cm}$ ，再根据菱形的面积公式即可求出答案.

【详解】 解： 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M，

$\because$ 菱形的边长为 6cm，

$$\therefore AB = BC = 6\text{cm},$$

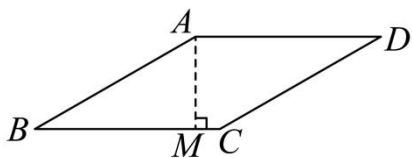
∵ 有一个内角是 30° ,

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

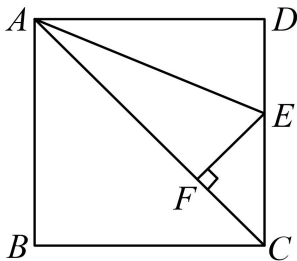
$$\therefore AM = \frac{1}{2} AB = 3\text{cm},$$

$$\therefore \text{此菱形的面积为: } BC \cdot AM = 6 \times 3 = 18\text{cm}^2.$$

故答案为: 18.



15. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 在边 DC 上, AE 平分 $\angle DAC$, $EF \perp AC$, 点 F 为垂足, 那么 $FC = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 $\sqrt{2} - 1$

【解析】

【分析】 根据正方形的性质和已知条件可求得 AF , AC 的长, 从而不难得到 FC 的长.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC = AD = CD = 1, \quad \angle D = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle DAC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle FAE.$$

$$\because EF \perp AC \text{ 交于 } F,$$

$$\therefore \angle AFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle D.$$

$$\because AE = AE,$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle FAE,$$

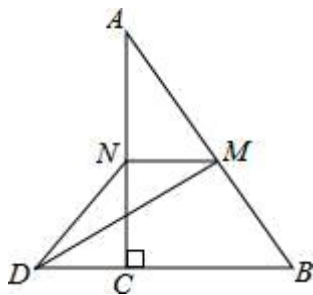
$$\therefore AF = AD = 1,$$

$$\therefore FC = AC - AF = \sqrt{2} - 1,$$

故答案为 $\sqrt{2} - 1$;

【点睛】 本题主要考查了正方形的性质、勾股定理、角平分线的性质、以及全等三角形的判定与性质；熟练掌握正方形的性质，求出 $AF=AD$ 是解决问题的关键.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， M 、 N 分别是 AB 、 AC 的中点，延长 BC 至点 D ，使 $BC = 2CD$ ，连接 DM 、 DN 、 MN . 若 $AB = 6$ ，则 $DN =$ ____.

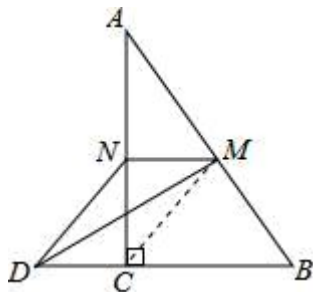


【答案】 3

【解析】

【分析】 连接 CM ，根据直角三角形的性质求出 CM ，证明四边形 $DCMN$ 是平行四边形，根据平行四边形的性质解答.

【详解】 解：连接 CM ，



$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， M 是 AB 的中点，

$$\therefore CM = \frac{1}{2} AB = 3,$$

$\because M$ 、 N 分别是 AB 、 AC 的中点，

$$\therefore MN = \frac{1}{2} BC, \quad MN \parallel BC,$$

$$\because BC = 2CD,$$

$$\therefore MN = CD, \quad \text{又 } MN \parallel BC,$$

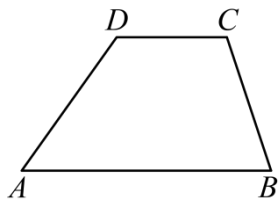
$\therefore$ 四边形 $DCMN$ 是平行四边形，

$$\therefore DN = CM = 3,$$

故答案为 3.

【点睛】 本题考查的是三角形中位线定理、直角三角形的性质，掌握三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半是解题的关键.

17. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， 且 $BC + CD = AB$ ， 设 $\angle A = x^\circ$ ， $\angle B = y^\circ$ ， 那么 y 关于 x 的函数关系式是_____.



【答案】 $y = 180 - 2x$

【解析】

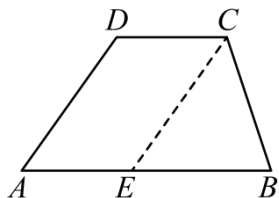
【分析】 本题考查平行四边形的判定及性质，函数的关系式，等边对等角，在 AB 上截取 $AE = CD$ ，可知四边形 $ADCE$ 是平行四边形，得 $AD \parallel CE$ ，则 $\angle A = \angle BEC = x^\circ$ ，再结合 $BC + CD = AB$ ，可得 $BC = BE$ ，进而可知 $\angle BCE = \angle BEC = x^\circ$ ，再根据三角形内角和定理即可求解.

【详解】 解：在 AB 上截取 $AE = CD$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel CE$ ，则 $\angle A = \angle BEC = x^\circ$ ，



$\because BC + CD = AB$ ， $AE + BE = AB$ ，

$\therefore BC = BE$ ，

$\therefore \angle BCE = \angle BEC = x^\circ$ ，

由三角形内角和定理可得： $\angle BEC + \angle BCE + \angle B = 180^\circ$ ，

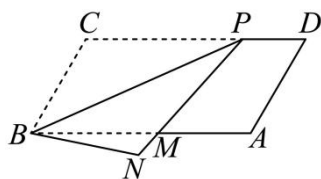
即： $x + x + y = 180$ ，

$\therefore y = 180 - 2x$ ，

故答案为： $y = 180 - 2x$.

18. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB = 2AD = 4$ ， $\angle D = 60^\circ$ ，点 P 是边 CD 上一点，连接 PB ，沿 PB 折叠 $\triangle BCP$ ，使点 C 落在点 N 处，其中 $CP \geq 2$ ，设 PN 与 AB 相交于点 M ，若 $\triangle BMP$ 的面积为 x ，则 x 的取值范围是

_____.



【答案】 $\sqrt{3} \leq x \leq \frac{7\sqrt{3}}{5}$

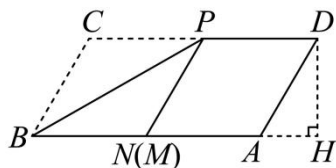
【解析】

【分析】此题考查了折叠的性质，勾股定理，平行四边形的性质，熟练掌握各知识点并综合应用是解题的关键. 当点 N ， M 重合时， $CP=2$ ， $\triangle BMP$ 的面积最小，过点 D 作 $DH \perp AB$ 交 BA 的延长线于点 H ，利用 30° 角的性质及勾股定理求出 $AH = \frac{1}{2}AD = 1$ ， $DH = \sqrt{3}$ ，得到 $S_{\triangle BMP} = \frac{1}{2}BM \cdot DH = \sqrt{3}$ ；当点 P 与点 D 重合时， $CP=CD=4$ ，此时 $\triangle BMP$ 的面积最大，过点 D 作 $DH \perp AB$ 交 BA 的延长线于点 H ，过点 M 作 $MG \perp BN$ 交 BN 的延长线于点 G ，根据折叠的性质和平行四边形的性质可推出 $BM=DM$ ， $\angle NMG = 30^\circ$ ，设 $BM=DM=a$ ，则 $NM=4-a$ ， $NG = \frac{1}{2}NM = 2 - \frac{1}{2}a$ ，推出 $MG^2 = NM^2 - NG^2 = 3\left(2 - \frac{1}{2}a\right)^2$ ，根据 $BG^2 + MG^2 = BM^2$ 列方程求出 a ，即可求出得到 BM ，最后根据三角形的面积公式可求出 $\triangle BMP$ 面积的最大值，进而可得 x 的取值范围.

【详解】解：当点 N ， M 重合时， $CP=2$ ，

$\therefore$ 此时 $\triangle BMP$ 的面积最小，

过点 D 作 $DH \perp AB$ 交 BA 的延长线于点 H ，



$\because$ 在 $\square ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle DAH = \angle ADC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle ADH = 90^\circ - \angle DAH = 30^\circ$ ，

$\therefore AH = \frac{1}{2}AD = 1$ ，

$\therefore DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ，

由折叠可得： $BN=BC=BM=2$ ，

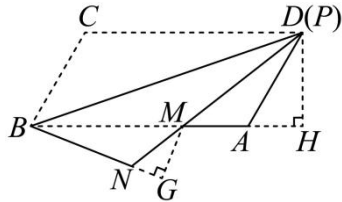
$$\therefore S_{\triangle BMP} = \frac{1}{2} BM \cdot DH = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$\therefore x$ 的最小值为 $\sqrt{3}$;

当点 P 与点 D 重合时, $CP = CD = 4$,

$\therefore$ 此时 $\triangle BMP$ 的面积最大,

过点 D 作 $DH \perp AB$ 交 BA 的延长线于点 H , 过点 M 作 $MG \perp BN$ 交 BN 的延长线于点 G ,



$\because$ 在 $\square ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ADC = 60^\circ$,

$\therefore \angle BDC = \angle ABD$, $\angle C = 180^\circ - \angle ADC = 120^\circ$,

由折叠可得: $\angle BDC = \angle BDN$, $\angle BNM = \angle C = 120^\circ$, $DN = CD = 4$, $BN = BC = 2$,

$\therefore \angle ABD = \angle BDN$, $\angle MNG = 180^\circ - \angle BND = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

$\therefore BM = DM$, $\angle NMG = 90^\circ - \angle MNG = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

设 $BM = DM = a$, 则 $NM = DN - DM = 4 - a$,

$$\therefore NG = \frac{1}{2} NM = 2 - \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore BG = BN + NG = 2 + 2 - \frac{1}{2}a = 4 - \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore MG^2 = NM^2 - NG^2 = (4 - a)^2 - \left(2 - \frac{1}{2}a\right)^2 = 3\left(2 - \frac{1}{2}a\right)^2,$$

$$\because BG^2 + MG^2 = BM^2,$$

$$\therefore \left(4 - \frac{1}{2}a\right)^2 + 3\left(2 - \frac{1}{2}a\right)^2 = a^2,$$

$$\text{解得: } a = \frac{14}{5}, \text{ 即 } BM = \frac{14}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle BMP} = \frac{1}{2} BM \cdot DH = \frac{1}{2} \times \frac{14}{5} \times \sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{5}, \text{ 即 } x = \frac{7\sqrt{3}}{5};$$

$$\therefore x \text{ 取值范围是 } \sqrt{3} \leq x \leq \frac{7\sqrt{3}}{5},$$

$$\text{故答案为: } \sqrt{3} \leq x \leq \frac{7\sqrt{3}}{5}.$$

三、简答题（本题共4小题，第19题5分，第20题5分，第21题7分，第22题8分，共25分）

19. 已知一次函数 $y = (2-3m)x + m + 3$ ($m \neq \frac{2}{3}$)，函数值 y 随自变量 x 值的增大而减小.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中，这个函数的图像与 x 轴的交点 M 位于 x 轴的正半轴还是负半轴？请简述理由.

【答案】(1) $m > \frac{3}{2}$

(2) 这个函数的图像与 x 轴的交点 M 位于 x 轴的正半轴，理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象与系数的关系. 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，当 $k > 0$ 时，函数值 y 随自变量 x 值的增大而增大；当 $k < 0$ 时，函数值 y 随自变量 x 值的增大而减小.

(1) 由一次函数图象与系数的关系得到 $2-3m < 0$ ，由此求得 m 的取值范围；

(2) 令 $y = 0$ ，得到 $(2-3m)x + m + 3 = 0$ ，结合 m 的取值范围求得 x 的符号，即可求解.

【小问1详解】

解： $\because$ 一次函数 $y = (2-3m)x + m + 3$ ($m \neq \frac{2}{3}$)，函数值 y 随自变量 x 值的增大而减小，

$$\therefore 2-3m < 0,$$

$$\text{解得: } m > \frac{3}{2};$$

【小问2详解】

这个函数的图像与 x 轴的交点 M 位于 x 轴的正半轴，理由如下：

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } (2-3m)x + m + 3 = 0,$$

$$\text{整理得: } x = \frac{-(m+3)}{2-3m},$$

$$\because m > \frac{3}{2},$$

$$\therefore -(m+3) < 0,$$

$$\because 2-3m < 0,$$

$$\therefore x = \frac{-(m+3)}{2-3m} > 0,$$

$\therefore$ 这个函数的图像与 x 轴的交点 M 位于 x 轴的正半轴.

20. 在平面直角坐标系中, 直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 向上平移 2 个单位后与直线 $y = x$ 重合, 且直线

$y = kx + b (k \neq 0)$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B .

(1) 写出点 A 的坐标, 求直线 AB 的表达式;

(2) 直线 $y = 3x - 4$ 与直线 AB 交于点 C , 与 x 轴交于点 D , 求 $\triangle ACD$ 的面积.

【答案】 (1) $A(2, 0)$; $y = x - 2$

(2) $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图象的平移问题, 一次函数与几何综合, 正确求出直线 AB 解析式是解题的关键.

(1) 根据“上加下减, 左减右加”的平移规律即可求出直线 AB 解析式, 进而可求出点 A 坐标;

(2) 联立两函数解析式求出点 C 坐标, 再求出点 D 坐标, 最后利用三角形面积计算公式求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 向上平移 2 个单位后与直线 $y = x$ 重合,

$$\therefore y = kx + b + 2 = x,$$

$$\therefore k = 1, b = -2,$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = x - 2,$$

在 $y = x - 2$ 中, 当 $y = x - 2 = 0$ 时, $x = 2$,

$$\therefore A(2, 0);$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 联立 } \begin{cases} y = x - 2 \\ y = 3x - 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases},$$

$$\therefore C(1, -1),$$

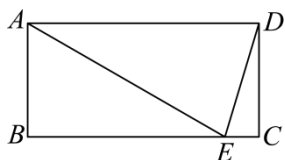
在 $y = 3x - 4$ 中, 当 $y = 3x - 4 = 0$ 时, $x = \frac{4}{3}$,

$$\therefore D\left(\frac{4}{3}, 0\right),$$

$$\therefore AD = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AD \cdot |y_C| = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{1}{3}.$$

21. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, 边 BC 上有一点 E , 连接 AE , DE , $AE = AD$.



(1) 求 EC 的长;

(2) 求 $\angle CDE$ 的度数.

【答案】 (1) $(8 - 4\sqrt{3})\text{cm}$;

(2) 15° .

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 熟练掌握矩形的性质是解题的关键.

(1) 根据矩形的性质得到 $AD = BC$, $\angle B = 90^\circ$, 根据勾股定理即可得到结论;

(2) 根据直角三角形的性质得到 $\angle AEB = 30^\circ$, 根据等腰三角形的性质得到 $\angle ADE = \angle AED$, 根据平行线的性质得到 $\angle ADE = \angle DEC$, 求得 $\angle AED = \angle DEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AEB) = 75^\circ$, 根据三角形的内角和定理即可得到结论.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD = BC = 8\text{cm}, \angle B = 90^\circ.$$

$$\because AE = AD,$$

$$\therefore AE = 8\text{cm},$$

$$\therefore BE = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$$\therefore CE = BC - BE = (8 - 4\sqrt{3})\text{cm};$$

【小问 2 详解】

解: $\because \angle B = 90^\circ$, $AB = 4\text{cm}$, $AE = 8\text{cm}$,

$$\therefore \angle AEB = 30^\circ.$$

$$\because AD = AE,$$

$\therefore \angle ADE = \angle AED.$

$\therefore AD \parallel BC,$

$\therefore \angle ADE = \angle DEC,$

$\therefore \angle AED = \angle DEC = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle AEB) = 75^\circ.$

$\therefore \angle C = 90^\circ,$

$\therefore \angle CDE = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$

22. 根据以下素材，探索完成任务：

如何制定订餐方案？			
素材 1	某班级组织春日研学活动，需提前为同学们订购午餐，现有 A 、 B 两种套餐可供选择，套餐信息及团购优惠方案如下所示：		
	套餐类别	套餐单价	团体订购优惠方案
	A：米饭套餐	30 元	方案一： A 套餐满 20 份及以上打 9 折；
	B：面食套餐	25 元	方案二： B 套餐满 12 份及以上打 8 折； 方案三： 总费用满 850 元立减 110 元.
	温馨提示： 方案三不可与方案一、方案二叠加使用.		
素材 2	该班级共 31 位同学，每人都从 A 、 B 两种套餐中选择一种，一人一份订餐，拒绝浪费. 经统计，有 20 人已经确定 A 或 B 套餐，其余 11 人两种套餐皆可. 若已经确定套餐的 20 人先下单，三种团购优惠条件均不满足，费用合计为 565 元.		
问题解决			
任务 1	计算选择人数	已经确定套餐的 20 人中，分别有多少人选择 A 套餐和 B 套餐？	
任务 2	分析变量关系	设两种套餐皆可的同学中有 m 人选择 A 套餐，该班订餐总费用为 w 元，当全班选择 A 套餐人数不少于 20 人时，请求出 w 与 m 之间的函数关系式.	
任务 3	制定最优方案	要使得该班订餐总费用最低，则 A 、 B 套餐应各订多少份？并求出最低总费用.	

【答案】任务 1: 选择 A 套餐的有 13 人, 选择 B 套餐的有 7 人; 任务 2: $w = 2m + 801$; 任务 3: 当订购 A 套餐 15 份, 订购 B 套餐为 16 份时, 该班订餐总费用最低, 订餐总费用最低为 740 元

【解析】

【分析】任务 1: 根据题意可设这 20 人中选择 A 套餐的有 x 人, $x < 20$, 则选则 B 套餐的有 $(20 - x)$ 人, $(20 - x) < 12$, 根据“费用合计为 565 元”列出方程 $30x + 25(20 - x) = 565$, 解方程即可得到答案;

任务 2: 由当全班选择 A 套餐人数不少于 20 人时, 即 $13 + m \geq 20$, 得到 $m \geq 7$, 从而得到选择 B 套餐人数为 $18 - m \leq 11$, 根据 A 套餐、B 套餐的优惠方式即可算出总共花费了多少钱;

任务 3: 分三种情况: ①当 $m \geq 7$ 时, ②当 $0 \leq m < 7$ 时, ③选择优惠方案三, 分别计算出所花费的费用, 进行比较即可得到答案.

【详解】解: 任务 1: $\because$ 20 人先下单, 三种团购优惠方案的条件均不满足,

$\therefore$ 设这 20 人中选择 A 套餐的有 x 人, $x < 20$,

则选则 B 套餐的有 $(20 - x)$ 人, $(20 - x) < 12$,

$$\therefore 30x + 25(20 - x) = 565,$$

$$\therefore x = 13,$$

$$\therefore 20 - x = 7,$$

答: 选择 A 套餐的有 13 人, 选择 B 套餐的有 7 人;

任务 2: $\because$ 两种套餐皆可的 11 人中有 m 人选择 A 套餐,

$\therefore$ 当全班选择 A 套餐人数不少于 20 人时,

$$\text{即 } 13 + m \geq 20,$$

$$\therefore m \geq 7,$$

$\therefore$ 选择 B 套餐人数为 $18 - m \leq 11$, 不满足优惠方案二的条件,

$$\therefore \text{订餐总费用为 } w = 30 \times 0.9 \times (13 + m) + 25 \times (18 - m) = 2m + 801;$$

任务 3: $\because$ 两种套餐皆可的 11 人中有 m 人选择 A 套餐,

①当 $m \geq 7$ 时, 由 (2) 可知, 订餐总费用为 $w = 2m + 801$,

$$\because k = 2 > 0,$$

$\therefore w$ 随着 m 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $m = 7$ 时, 订餐总费用最小为 $w = 2 \times 7 + 801 = 815$ (元);

②当 $0 \leq m < 7$ 时, $13 + m < 20$, $18 - m > 11$,

$\therefore$ 订餐总费用为 $w = 30 \times (13 + m) + 25 \times 0.8 \times (18 - m) = 10m + 750$,

$\because k = 10 > 0$,

$\therefore w$ 随着 m 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $m = 0$ 时, 订餐总费用最小为 $w = 750$ (元);

③若选择优惠方案三, 订餐总费用为 $w = 30 \times (13 + m) + 25 \times (18 - m) = 5m + 840$,

$\because$ 总费用满 850 元立减 110 元,

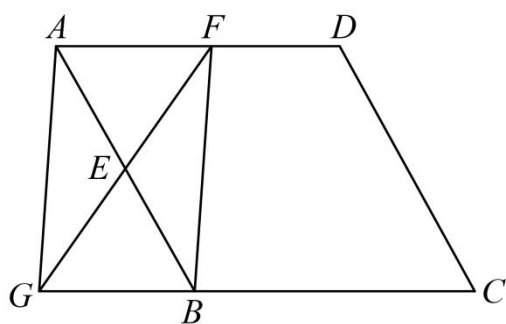
$\therefore$ 当 $m = 2$ 时, 订餐总费用最小为 $5 \times 2 + 840 - 110 = 740$ (元);

综上所述, 当订购 A 套餐 15 份, 订购 B 套餐为 16 份时, 订餐总费用最低为 740 元.

【点睛】 本题主要考查了一元一次方程的实际应用, 一次函数的实际应用, 读懂题意, 正确列出一元一次方程、一次函数, 熟练掌握一次函数的性质, 是解题的关键.

四、解答题 (本题共 3 小题, 第 23 题 8 分, 第 24 题 9 分, 第 25 题 10 分, 共 27 分)

23. 如图, 已知平行四边形 $ABCD$, E 是边 AB 的中点, 点 F 在边 AD 上, 连接 FE 并延长交 CB 的延长线于点 G , 连接 BF 、 AG .



(1) 如果 $\angle AFG = \angle C$, 求证: 四边形 $AGBF$ 是矩形;

(2) 如果 F 是边 AD 的中点, 且 $\angle AFG = \frac{1}{2} \angle ADC$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质, 矩形的判定, 菱形的判定, 三角形的中位线, 熟练掌握矩形和菱形的判定是解题的关键.

(1) 先证出 $\triangle AEF \cong \triangle BEG$, 再根据 $\angle AFG = \angle C$, 得到 $AB = GF$, 即可证明;

(2) 连接 BD , 得到 EF 是 $\triangle ABD$ 的中位线, 从而证得 $\triangle ADB \cong \triangle CDB$, 得出 $AD = AC$, 即可证明.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore AD \parallel BC, \quad \angle FAE = \angle C$$

$$\therefore \angle EAF = \angle EBG$$

$\therefore E$ 是边 AB 的中点,

$$\therefore EA = EB$$

又 $\because \angle AEF = \angle BEG$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle BEG \text{ (ASA)}$$

$$\therefore AF = BG, \quad EF = EG$$

又 $\because AD \parallel BC$

$\therefore$ 四边形 $AGBF$ 是平行四边形

$$\therefore \angle AFG = \angle C$$

$$\therefore \angle AFG = \angle FAE$$

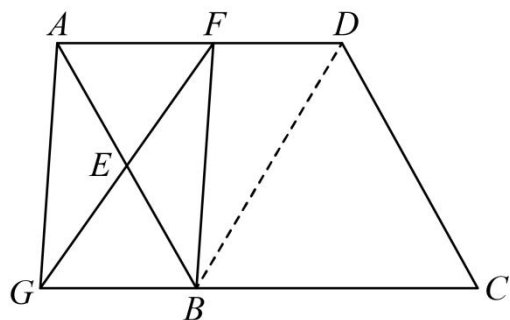
$$\therefore EA = EF$$

$$\therefore AB = GF$$

∴ 四边形 $AGBF$ 是矩形.

【小问 2 详解】

连接 BD ，如图，



$\because E$ 是边 AB 的中点, F 是边 AD 的中点,

$\therefore EF$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

$$\therefore EF \parallel BD$$

$$\therefore \angle AFE = \angle ADB$$

$$\text{又} \because \angle AFG = \frac{1}{2} \angle ADC$$

$$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \angle ADC$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CDB$$

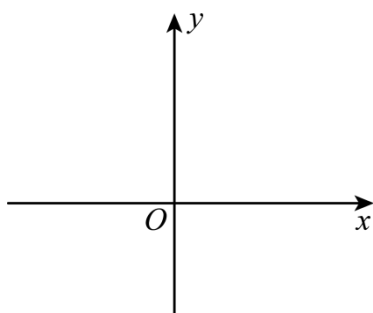
$$\text{又} \because \angle DAB = \angle C, \quad BD = BD$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CDB (\text{AAS})$$

$$\therefore AD = DC$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

24. 如果直线 l_1 与直线 l_2 相交于 A 点, 且夹角为 45° , 则称为 l_2 为 l_1 的半直交线, A 点为半直交点, 这个 45° 的角为半直角.



(1) 若直线 l_1 为 y 轴, 直线 l_2 的解析式为 $y = kx + 2$, 当 l_1 为 l_2 的半直交线时, k 的值为_____;

(2) 直线 $y = -x + 3$ 分别与 y 轴, x 轴交于 A, B 两点, 点 P 是 x 轴上 B 点右侧的一点, 且 $BP = m (m > 0)$, 点 Q 在直线 $y = x - 3$ 上, 其横坐标为 $m + 6$, 判断 $\angle QAP$ 是否为半直角, 并说明理由;

(3) 直线 l_3 的解析式为 $y = -3x + 3$, 与 y 轴交于点 C, 与 x 轴交于点 D, 点 M 是 x 轴上的一个动点, 直线 MC 是直线 l_3 的半直交线, 求 M 点的坐标.

【答案】 (1) 1 或 -1

(2) $\angle QAP$ 是半直角, 理由见解析

(3) $M\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 或 $M(6, 0)$

【解析】

【分析】 (1) 易得直线 l_1 与直线 l_2 相交于点 $(0, 2)$, 分两种情况: 当 $k > 0$ 时, 当 $k < 0$ 时, 根据半直交线的定义, 求出 l_2 与 x 轴的交点, 即可求出 k 值;

(2) 根据题意, 画出图象, 过点 Q 作 $QD \perp x$ 轴于点 D, 证明 $\triangle AOP \cong \triangle PDQ$, 推出 $\angle QAP = 45^\circ$, 进行判断即可;

(3) 分点 M 在点 D 的左侧和右侧, 两种情况, 进行讨论求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 l_2 的解析式为 $y = kx + 2$,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = 2$, 即直线 l_2 必过 $(0, 2)$;

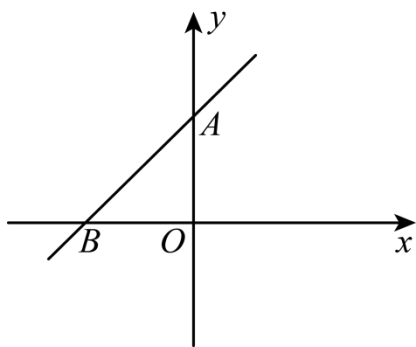
$\because$ 直线 l_1 为 y 轴, 直线 l_2 的解析式为 $y = kx + 2$, l_1 为 l_2 的垂直交线,

$\therefore$ 点 $A(0, 2)$, 直线 $y = kx + 2$ 与 y 轴的夹角为 45° ,

$\therefore OA = 2$,

当 $k > 0$ 时: 如图, $\angle OAB = 45^\circ$,

则: $\angle OBA = \angle OAB = 45^\circ$,



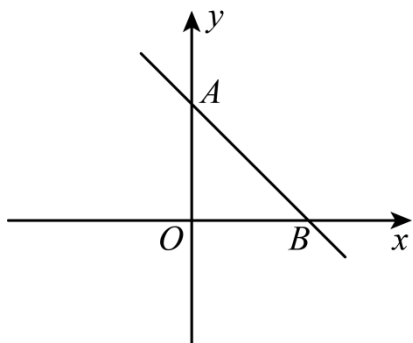
$\therefore OA = OB = 2$,

$\therefore B(-2, 0)$,

将 $B(-2, 0)$ 代入 $y = kx + 2$ 得: $0 = -2k + 2$,

解得: $k = 1$;

当 $k < 0$ 时: 如图,



同法可得: $B(2, 0)$,

将 $B(2, 0)$ 代入 $y = kx + 2$ 得: $0 = 2k + 2$,

解得： $k = -1$ ；

综上： k 的值为1或-1，

故答案为： 1或-1；

【小问2 详解】

$\angle QAP$ 是半直角，理由如下：

$\because y = -x + 3$ ，当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，当 $y = 0$ 时， $x = 3$ ，

$\therefore A(0,3)$ ， $B(3,0)$ ，

$\therefore OA = 3$ ，

$\because$ 点 P 是 x 轴上 B 点右侧的一点，且 $BP = m$ ($m > 0$)，

$\therefore P(m+3,0)$ ，

$\therefore OP = m + 3$ ，

$\because$ 点 Q 在直线 $y = x - 3$ 上，其横坐标为 $m + 6$ ，

$\therefore Q(m+6, m+3)$ ，

过点 Q 作 $QD \perp x$ 轴于点 D ，

$\therefore D(m+6,0)$ ，

则 $PD = m + 6 - (m + 3) = 3$ ， $QD = m + 3$ ，

$\therefore OA = DP$ ， $OP = DQ$ ，

又 $\angle AOP = \angle PDQ = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AOP \cong \triangle PDQ$ (SAS)，

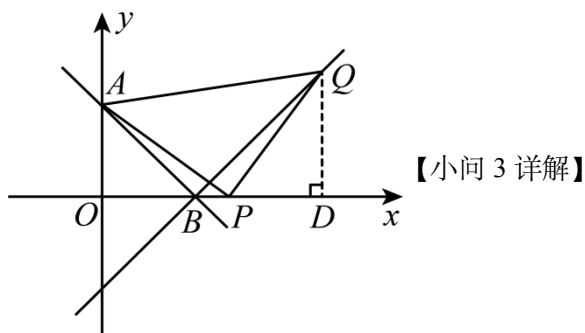
$\therefore AP = PQ$ ， $\angle APO = \angle PQD$

$\therefore \angle APO + \angle QPD = \angle PQD + \angle QPD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle APQ = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle PAQ = \angle AQP = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle QAP$ 是半直角；

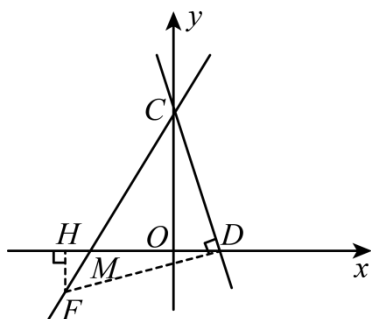


$\because y = -3x + 3$, 当 $x = 0$ 时, $y = 3$; 当 $y = 0$ 时, $x = 1$,

$\therefore C(0, 3), D(1, 0)$,

$\therefore OC = 3, OD = 1$;

当点 M 在点 D 左侧时, 过点 D 作 $DF \perp CD$, 过点 F 作 $FH \perp x$ 轴于点 H ,



则: $\angle FHD = \angle CDF = \angle COD = 90^\circ$,

$\therefore \angle CDO + \angle OCD = \angle CDO + \angle HDF = 90^\circ$,

$\therefore \angle OCD = \angle HDF$,

$\because$ 直线 MC 是直线 l_3 的垂线,

$\therefore \angle DCM = 45^\circ$,

$\therefore \angle CFD = \angle DCM = 45^\circ$,

$\therefore CD = DF$,

在 $\triangle COD$ 和 $\triangle DHF$ 中,

$$\begin{cases} \angle COD = \angle FHD = 90^\circ \\ \angle OCD = \angle HDF \\ CD = DF \end{cases},$$

$\therefore \triangle COD \cong \triangle DHF$ (AAS),

$\therefore HF = OD = 1, DH = OC = 3$,

$\therefore OH = DH - OD = 3 - 1 = 2$,

$$\therefore F(-2, -1),$$

设直线 MC 的解析式为: $y = px + q (p \neq 0)$, 将 $F(-2, -1)$, $C(0, 3)$ 代入得:

$$\begin{cases} -2p + q = -1 \\ q = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} p = 2 \\ q = 3 \end{cases},$$

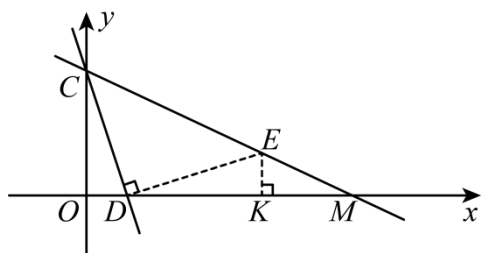
$$\therefore \text{直线 } MC \text{ 的解析式为: } y = 2x + 3,$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } 0 = 2x + 3,$$

$$\text{解得: } x = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore M\left(-\frac{3}{2}, 0\right);$$

当点 M 在点 D 右侧时, 过点 D 作 $DE \perp CD$, 交直线 CM 于点 E , 过点 E 作 $EK \perp x$ 轴于点 K ,



同法可证: $\triangle COD \cong \triangle DKE$ (AAS),

$$\therefore EK = OD = 1, \quad DK = OC = 3,$$

$$\therefore OK = DK + OD = 3 + 1 = 4,$$

$$\therefore E(4, 1),$$

设直线 MC 的解析式为: $y = nx + b$, 将 $E(4, 1)$, $C(0, 3)$ 代入得:

$$\begin{cases} 4n + b = 1 \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} n = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } MC \text{ 的解析式为: } y = -\frac{1}{2}x + 3,$$

当 $y=0$ 时, $0 = -\frac{1}{2}x + 3$,

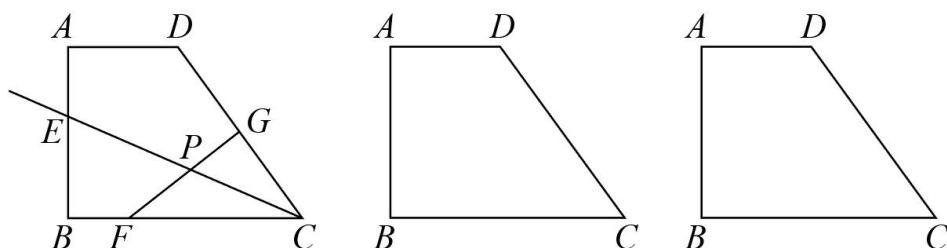
解得: $x = 6$

$\therefore M(6, 0)$;

综上: $M\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 或 $M(6, 0)$.

【点睛】 本题考查了一次函数的图象与性质, 全等三角形的判定与性质, 等腰直角三角形的判定与性质, 坐标与图形, 解题的关键是掌握相关知识并分类讨论.

25. 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 5$, 点 G 是 CD 中点, 过点 G 作 CD 的垂线交射线 BC 于点 F , $\angle DCF$ 的角平分线交射线 BA 于点 E , 交直线 GF 于点 P .



(1) 当点 F 与点 B 重合时, 求 CD 的长;

(2) 若点 F 在线段 BC 上, $AD = x$, $CF = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出函数定义域;

(3) 联结 DP 、 DE , 当 $\triangle DPE$ 是以 DP 为腰的等腰三角形时, 求 AD 的长.

【答案】 (1) $2\sqrt{5}$

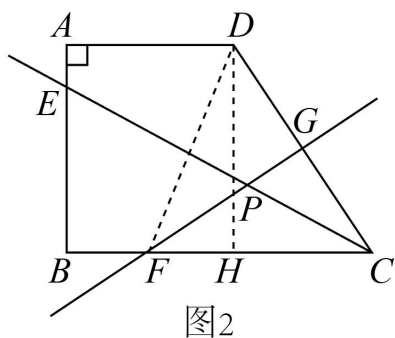
(2) $y = \frac{-x^2 + 10x - 41}{2x - 10} (0 < x \leq 3)$

(3) AD 的长为 2 或 $\frac{-5 + 2\sqrt{37}}{3}$ 或 8.

【解析】

【分析】 (1) 联结 BD , 过 D 作 $DH \perp BC$ 于 H , 根据线段垂直平分线的性质可得 $BD = BC = 5$, 在 $Rt\triangle ABD$ 中, 由勾股定理可得 $AD = 3$, 然后证明四边形 $ABHD$ 是矩形, 求出 $DH = AB = 4$, $CH = 2$, 在 $Rt\triangle DHC$ 中, 由勾股定理可得 CD 的长;

(2) 联结 DF , 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H , 求出 $FD = y$, $FH = |x - 5 + y|$, 在 $Rt\triangle DFH$ 中, 由勾股定理可得 $y^2 = 4^2 + (x - 5 + y)^2$, 整理后可得答案;



$\because FG$ 是 CD 的垂直平分线,

$$\therefore FD = FC,$$

$$\because FC = y,$$

$$\therefore FD = y,$$

$$\because BC = 5,$$

$$\therefore BF = 5 - y,$$

$$\because AD = x,$$

$$\therefore BH = x,$$

$$\therefore FH = |x - 5 + y|,$$

在 $Rt\triangle DFH$ 中, 由 $DF^2 = DH^2 + FH^2$ 得: $y^2 = 4^2 + (x - 5 + y)^2$,

$$\text{整理得: } y = \frac{-x^2 + 10x - 41}{2x - 10},$$

$\because$ 点 F 与点 B 重合时, $AD = 3$,

$$\therefore 0 < x \leq 3,$$

$$\therefore y = \frac{-x^2 + 10x - 41}{2x - 10} (0 < x \leq 3);$$

【小问 3 详解】

如图 3, 当 F 在线段 BC 上时,

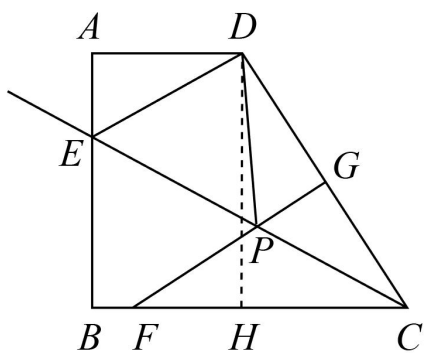


图3

① 当 $DP = PE$ 时,

$\because FG$ 是 CD 的垂直平分线,

$$\therefore DP = PC,$$

$$\therefore DP = PE = PC,$$

$$\therefore \angle PED = \angle PDE, \quad \angle PDC = \angle PCD,$$

$$\because \angle PED + \angle PDE + \angle PDC + \angle PCD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ = \angle CBE,$$

$\because EC$ 平分 $\angle DCB$,

$$\therefore \angle DCE = \angle ECB,$$

又 $\because CE = CE$,

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle CBE \quad (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = DE, \quad BC = CD,$$

$$\therefore CD = 5,$$

过 D 作 $DH \perp BC$ 于 H ,

在 $Rt\triangle CDH$ 中, $HC = 3$,

$$\therefore BH = AD = 2;$$

② 当 $DE = DP$ 时, $\angle DEP = \angle DPE$,

设 $\angle BCE = \angle DCE = \alpha$, 则 $\angle BEC = 90^\circ - \angle ECB = 90^\circ - \alpha$,

$\because DP = PC$,

$$\therefore \angle PDC = \alpha,$$

$$\therefore \angle DEP = \angle DPE = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle AED = 180^\circ - 2\alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle AED = \angle BEC, \quad \angle ADE = \angle GCP = \alpha,$$

又 $\because DE = PC$,

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle CGP$ (ASA),

$\therefore AD = CG$,

$\therefore CD = 2AD$,

$\because DH = 4$, $CH = 5 - AD$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle CDH$ 中, $(5 - AD)^2 + 16 = (2AD)^2$,

$\therefore AD = \frac{-5 + 2\sqrt{37}}{3}$ (负值已舍去);

当点 F 在射线 BC 上时, 如图 4, 此时 $\angle EPD > 90^\circ$,

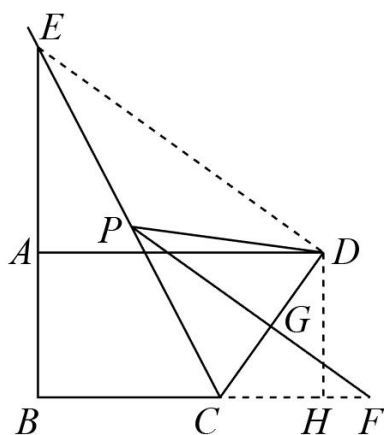


图4

$\therefore PE = PD = PC$,

同理可得: $\triangle CDE \cong \triangle CBE$ (AAS),

$\therefore BC = CD = 5$,

过 D 作 $DH \perp BC$ 交 BC 的延长线于 H ,

在 $Rt\triangle CHD$ 中, $DH = 4$,

$\therefore CH = 3$,

$\therefore AD = BH = BC + CH = 8$;

综上所述: AD 的长为 2 或 $\frac{-5 + 2\sqrt{37}}{3}$ 或 8.

【点睛】 本题是四边形的综合题, 考查了线段垂直平分线的性质, 勾股定理, 矩形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 解一元二次方程, 全等三角形的判定和性质等知识, 综合性较强, 熟练掌握分类讨论思想与数形结合思想的应用是解题的关键.