

2024 学年第二学期期中考试八年级

数学试卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

★考生注意:

1. 本试卷含五个大题, 共 26 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出解答的主要步骤.
3. 本次考试不能使用计算器.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 在下列函数中, y 是 x 的一次函数的是 ()

A. $y = kx + b$ (k 、 b 是常数)

B. $2x + 7y = 1$

C. $y = \frac{1}{x} + 4$

D. $y = 2x^2 - 1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的定义 (识别一次函数), 熟练掌握一次函数的定义及一般形式是解题的关键:

1、一次函数的一般形式为 $y = kx + b$, 其中 k , b 为常数, $k \neq 0$; 2、一次函数的一般形式的结构特征:

(1) $k \neq 0$, (2) x 的次数是 1, (3) 常数 b 可以为任意实数; 3、注意: ①正比例函数是一次函数, 但一次函数不一定是正比例函数; ②一般情况下, 一次函数的自变量的取值范围是全体实数; ③如果一个函数是一次函数, 那么含有自变量 x 的式子是一次的, 系数 k 不等于 0, 而 b 可以为任意实数; ④判断一个函数是不是一次函数, 就是判断它是否能化成 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的形式; ⑤一次函数的一般形式可以转化为含 x 、 y 的二元一次方程.

根据一次函数的定义及一般形式逐项分析判断即可.

【详解】解: A. $y = kx + b$ (k 、 b 是常数), 当 $k = 0$ 时, y 不是 x 的一次函数, 故选项 A 不符合题意;

B. $2x + 7y = 1$, 可化为 $y = -\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}$, y 是 x 的一次函数, 故选项 B 符合题意;

C. $y = \frac{1}{x} + 4$, y 不是 x 的一次函数, 故选项 C 不符合题意;

D. $y = 2x^2 - 1$, y 不是 x 的一次函数, 故选项 D 不符合题意;

故选: B.

2. 已知点 $(-4, y_1)$, $(2, y_2)$ 都在直线 $y = -x + 3$ 上, 则 y_1 与 y_2 的大小关系为 ()

A. $y_1 < y_2$

B. $y_1 > y_2$

C. $y_1 = y_2$

D. 无法确定

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是一次函数图象上点的坐标特点, 分别把点 $(-4, y_1)$, $(2, y_2)$ 代入直线 $y = -x + 3$, 求出 y_1 , y_2 的值, 再比较大小即可. 熟知一次函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

【详解】解: $\because$ 点 $(-4, y_1)$, $(2, y_2)$ 都在直线 $y = -x + 3$ 上,

$$\therefore y_1 = 4 + 3 = 7, \quad y_2 = -2 + 3 = 1.$$

$$\because 7 > 1,$$

$$\therefore y_1 > y_2.$$

故选: B.

3. 下列说法正确的是 ()

A. $x^3 + 3x = 0$ 是二项方程

B. $x^2 + \sqrt{2}x - 3 = 0$ 是无理方程

C. $\frac{x^2 - x}{3} = 2$ 是分式方程

D. $2x^2 + y = 3$ 是二元二次方程

【答案】D

【解析】

【分析】根据二项方程的定义, 无理方程的定义, 二元二次方程的定义, 分式方程的定义逐个判断即可.

【详解】解: A. 方程的左边两项都含未知数, 故本选项不符合题意;

B. 根号内没有未知数, 不是无理方程, 故本选项不符合题意;

C. 分母中不能未知数, 不是分式方程, 故本选项不符合题意;

D. 方程是二元二次方程, 故本选项符合题意;

故选: D.

【点睛】 本题考查了二项方程、无理方程、二元二次方程、分式方程的定义等知识点，注意：根号内含有未知数的方程，叫无理方程，分母中含有未知数的方程，叫分式方程.

4. 下列方程，有实数解的是 ()

A. $\sqrt{x-2}+1=0$

B. $\sqrt{x+\frac{4}{x}}-3=0$

C. $x+\frac{1}{x-1}=2$

D. $2\sqrt{x-5}+\sqrt{x+1}=0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了无理方程，可化为一元二次方程的分式方程，一元二次方程根的判别式；把无理方程或分式方程化为一元二次方程，根据判别式判断一元二次方程根的情况以及算术平方根的非负性. 对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ ，若 $\Delta=b^2-4ac>0$ ，则方程有两个不相等的实数根；若 $\Delta=b^2-4ac=0$ ，则方程有两个相等的实数根；若 $\Delta=b^2-4ac<0$ ，则方程没有实数根. 据此即可求解.

【详解】 解：由 $\sqrt{x-2}+1=0$ 得： $\sqrt{x-2}=-1$ ，

$\because \sqrt{x-2} \geq 0$ ，

$\therefore$ 原方程无实数解，故 A 错误；

由 $\sqrt{x+\frac{4}{x}}-3=0$ 得： $x+\frac{4}{x}=9$ ，

即： $x^2-9x+4=0$ ，

$\Delta=(-9)^2-4 \times 4=65>0$ ；

$\therefore$ 原方程有实数解，故 B 正确；

由 $x+\frac{1}{x-1}=2$ 得： $x^2-3x+3=0$ ，

$\Delta=(-3)^2-4 \times 1 \times 3=-3<0$ ，

$\therefore$ 原方程无实数解，故 C 错误；

$\because \sqrt{x-5} \geq 0, \sqrt{x+1} \geq 0$ ，又 $2\sqrt{x-5}+\sqrt{x+1}=0$ ，

$\therefore x=5$ 且 $x=-1$ (矛盾)，

$\therefore$ 原方程无实数解，故 D 错误；

故选： B.

5. 如果一个多边形的边数增加 1, 那么它的内角和将增加 ().

A. 60°

B. 90°

C. 180°

D. 360°

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了多边形内角和定理, 设原多边形的边数为 n , 则边数变化后的多边形边数为 $(n+1)$, 根据多边形内角和计算公式分别表示出变化前后多边形内角和, 二者相减即可得到答案.

【详解】解: 设原多边形的边数为 n , 则边数变化后的多边形边数为 $(n+1)$,

$\therefore$ 原来多边形的内角和为 $180^\circ \cdot (n-2) = 180n^\circ - 360^\circ$, 变化后的多边形内角和为

$180^\circ \cdot (n+1-2) = 180n^\circ - 180^\circ$,

$\therefore 180n^\circ - 180^\circ - (180n^\circ - 360^\circ) = 180^\circ$,

$\therefore$ 内角和将增加 180° ,

故选: C.

6. 下列说法中正确的有 ()

① $y = kx$ 是正比例函数;

② 如果 $y = (a+3)x + a^2 - 9$ 是正比例函数, 那么 $a = \pm 3$;

③ 如果 y 与 $x+2$ 成正比例, 那么 y 是 x 的正比例函数;

④ 如果 $y = \frac{1}{3}x^2$, 那么 y 与 x^2 成正比例.

A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查正比例函数的定义, 一般地, 形如 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的函数叫做正比例函数, 由此即可判断.

【详解】解: ① 当 $k \neq 0$ 时, $y = kx$ 是正比例函数, 原说法错误;

② 如果 $y = (a+3)x + a^2 - 9$ 是正比例函数, 那么 $a = 3$, 原说法错误;

③ 如果 y 与 $x+2$ 成正比例, 那么 $y = k(x+2)$ 不是 x 的正比例函数, 原说法错误;

④ 如果 $y = \frac{1}{3}x^2$, 那么 y 与 x^2 成正比例, 说法正确.

∴正确的只有 1 个,

故选: D.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 直线 $y = -5 - x$ 的截距是_____.

【答案】 -5

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的截距, 根据一次函数的截距即为一次函数图象与 y 轴交点的纵坐标即可解答, 也是解题关键.

【详解】 解: 当 $x = 0, y = -5$,

∴截距为 -5 ,

故答案为: -5 .

8. 方程 $32 + x^5 = 0$ 的根是 $x =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了解特殊的高次方程, 熟练掌握解法是解决本题的关键.

本题中移项, 得 $x^5 = -32$, 将问题转化为求一个已知数的 n 次方根的问题.

【详解】 解: $32 + x^5 = 0$,

$$x^5 = -32$$

$$x = -2,$$

故答案为: -2

9. 将直线 $y = 5x - 3\sqrt{3}$ 向上平移 3 个单位, 得到的直线的解析式是_____.

【答案】 $y = 5x - 3\sqrt{3} + 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图象的平移问题, 根据“上加下减, 左减右加”的平移规律求解即可.

【详解】 解: 将直线 $y = 5x - 3\sqrt{3}$ 向上平移 3 个单位, 得到的直线的解析式是 $y = 5x - 3\sqrt{3} + 3$,

故答案为: $y = 5x - 3\sqrt{3} + 3$.

10. 一个正多边形的每个内角等于 144° , 则它的边数是 _____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的内角和公式，熟记公式并准确列出方程是解题的关键.

设正多边形的边数为 n ，然后根据多边形的内角和公式列方程求解即可.

【详解】 解： 设正多边形的边数为 n ，

由题意得： $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 144^\circ$ ，

解得： $n = 10$ ，

故答案为： 10.

11. 方程 $(x+2)\sqrt{x-1} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，先求 x 的范围，再解此方程得 $x+2=0$ 或 $\sqrt{x-1}=0$ ，舍去不符合题意的解即可.

【详解】 解： 由题意得 $x-1 \geq 0$ ，

解得 $x \geq 1$ ，

原方程可化为： $x+2=0$ 或 $\sqrt{x-1}=0$ ，

解得 $x=-2$ (不合题意，舍去) 或 $x=1$ ，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，原方程成立.

故方程 $(x+2)\sqrt{x-1} = 0$ 的根是 $x=1$.

故答案为： $x=1$.

12. 方程组 $\begin{cases} x=1 \\ y^2=2 \end{cases}$ _____ 二元二次方程组 (填“是”或“不是”).

【答案】 是

【解析】

【分析】 本题考查二元二次方程的定义，根据两个整式方程，共含有 2 个未知数，含未知数的项的最高次数为 2，组成的方程组叫做二元二次方程组，进行判断即可.

【详解】 解： 方程组 $\begin{cases} x=1 \\ y^2=2 \end{cases}$ 是二元二次方程组；

故答案为： 是.

13. 写出一个一次函数, 使该函数图象经过第一、二、四象限和点 $(0, 3)$, 则这个一次函数可以是_____.

【答案】 $y = -x + 3$ (答案不唯一)

【解析】

【详解】 设一次函数解析式为 $y = kx + b$, 根据一次函数的性质得 $k < 0$, $b = 3$, 据此写出函数解析式即可. 本题考查了一次函数的图象和性质, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

【解答】 解: $\because$ 函数图象经过第一、二、四象限和点 $(0, 3)$

$\therefore k < 0$, $b = 3$,

不妨 $k = -1$, 则一次函数解析式为 $y = -x + 3$

故答案为: $y = -x + 3$ (答案不唯一).

14. 某企业的年产值从 2006 年的 2 亿元增长到 2009 年的 7 亿元, 如果这三年的年平均增长率相同, 均为 x , 那么可以列出方程为_____.

【答案】 $2(1+x)^3 = 7$

【解析】

【分析】 设这三年的年平均增长率为 x , 根据题意列出一元三次方程即可求解.

【详解】 解: 设这三年的年平均增长率为 x , 根据题意可得,

$2(1+x)^3 = 7$.

故答案为: $2(1+x)^3 = 7$.

【点睛】 本题考查了一元三次方程的应用, 根据题意列出方程是解题的关键.

15. 直线 $y = -5x + 5$ 与坐标轴围成的三角形的面积为_____.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质, 三角形的面积等知识, 求出直线与坐标轴的交点坐标即可解决问题, 解题的关键是熟练掌握一次函数的性质.

【详解】 解: 由直线 $y = -5x + 5$ 得: 当 $x = 0$ 时, $y = 5$, 当 $y = 0$ 时, $x = 1$,

$\therefore$ 直线与坐标轴的交点为 $(0, 5)$ 和 $(1, 0)$,

∴ 与坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 5 \times 1 = \frac{5}{2}$,

故答案为: $\frac{5}{2}$.

16. 如果方程 $\frac{3-x}{x-2} = \frac{m}{x-2}$ 有增根, 那么 m 的值等于_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的增根, 增根问题可按如下步骤进行: .

① 让最简公分母为 0 确定增根; .

② 化分式方程为整式方程; .

③ 把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

增根是化为整式方程后产生的不适合分式方程的根. 所以应先确定增根的可能值, 让最简公分母 $x-2=0$, 得到 $x=2$, 然后代入化为整式方程的方程算出 m 的值.

【详解】 方程两边都乘 $(x-2)$, 得 $3-x=m$,

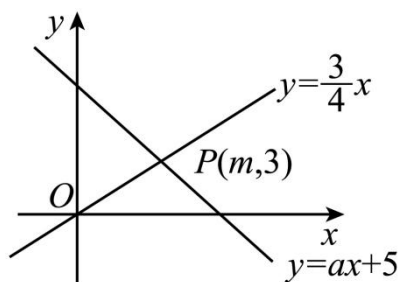
∴ 原方程有增根, .

∴ 最简公分母 $x-2=0$, 解得 $x=2$, .

当 $x=2$ 时, $m=1$. .

故答案为 1.

17. 如图, 已知函数 $y = \frac{3}{4}x$ 和 $y = ax+5$ 的图像相交于点 $P(m,3)$, 则不等式 $\frac{3}{4}x < ax+5$ 的解集是_____.



【答案】 $x < 4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了利用函数图像求一元一次不等式的解集, 确定点 P 坐标是解题关键. 首先将点

$P(m,3)$ 代入函数 $y = \frac{3}{4}x$, 求解即可获得点 P 坐标, 然后结合图像即可获得答案.

【详解】解：将点 $P(m, 3)$ 代入函数 $y = \frac{3}{4}x$,

可得 $3 = \frac{3}{4} \times m$, 解得 $m = 4$,

$\therefore P(4, 3)$,

结合图像可知, 不等式 $\frac{3}{4}x < ax + 5$ 的解集是 $x < 4$.

故答案为: $x < 4$.

18. 定义: 对于给定的两个函数, 当 $x \geq 0$ 时, 它们对应函数值相等; 当 $x < 0$ 时, 它们对应的函数值互为相反数, 我们称这样的两个函数互为相关函数. 例如: 正比例函数 $y = -x$, 它的相关函数为

$y = \begin{cases} -x & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$. 已知正比例函数 $y = 2x$, 若点 $N(n, 3)$ 在这个函数的相关函数的图象上, 则 n 的值为

_____.

【答案】 $\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数的图象, 以及图象上点的坐标特征, 正确理解新定义是解题的关键.

根据相关函数的定义求出正比例函数 $y = 2x$ 的相关函数为 $y = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases}$, 再分类讨论: 当 $n \geq 0$ 、 $n < 0$

时, 分别把点 $N(n, 3)$ 代入相应的函数求解即可.

【详解】解: 由题意可得, 正比例函数 $y = 2x$ 的相关函数为 $y = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases}$,

$\therefore$ 点 $N(n, 3)$ 在这个函数的相关函数的图象上,

当 $n \geq 0$ 时, 把点 $N(n, 3)$ 代入 $y = 2x$ 得, $2n = 3$,

$\therefore n = \frac{3}{2}$,

当 $n < 0$ 时, 把点 $N(n, 3)$ 代入 $y = -2x$ 得, $-2n = 3$,

$\therefore n = -\frac{3}{2}$,

$\therefore n = \frac{3}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$.

故答案为: $\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$.

三、简答题 (本大题共 4 题, 满分 24 分)

19. 解关于 x 的方程: $bx+2=-(x-1)$ (其中 $b \neq -1$).

【答案】 $x = -\frac{1}{b+1}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次方程, 把 b 看做常数, 按照去括号, 移项, 合并同类项, 系数化为 1 的步骤解方程即可.

【详解】 解: $bx+2=-(x-1)$

去括号得: $bx+2=-x+1$,

移项得: $bx+x=1-2$,

合并同类项得: $(b+1)x=-1$,

系数化为 1 得: $x=-\frac{1}{b+1}$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2-2xy+y^2=16 & \text{①} \\ 9x^2-y^2=0 & \text{②} \end{cases}.$$

【答案】 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=-3 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-6 \end{cases}, \begin{cases} x_3=-1 \\ y_3=3 \end{cases}, \begin{cases} x_4=2 \\ y_4=6 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组, 掌握解二元二次方程组的步骤是解题的关键.

先分别将①②两个二元二次方程化为两个二元一次方程, 再组合成四个二元一次方程组求解即可.

【详解】 解: 由①得, $(x-y)^2=16$,

$\therefore x-y=4$ 或 $x-y=-4$,

由②得, $(3x+y)(3x-y)=0$,

$\therefore 3x+y=0$ 或 $3x-y=0$,

$\therefore$ 原方程组可化为: $\begin{cases} x-y=4 \\ 3x+y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=4 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=-4 \\ 3x+y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=-4 \\ 3x-y=0 \end{cases}$,

分别解得: $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$

∴ 原方程组的解为: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -6 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -1 \\ y_3 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 6 \end{cases}.$

21. 先化简, 再求值: $\frac{2x}{x+1} - \frac{2x+4}{x^2-1} \div \frac{x+2}{x^2-2x+1}$, 且 x 是满足 $-3 < x < 2$ 的整数.

【答案】 $\frac{2}{x+1}, 2$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简求值, 分式有意义的条件, 掌握运算法则, 正确计算是解题的关键.

先将除法化为乘法计算, 再进行分式的加减计算, 然后根据分式有意义的条件以及 x 是满足 $-3 < x < 2$ 的整数确定 x 的值, 再代入即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: 原式} &= \frac{2x}{x+1} - \frac{2(x+2)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{x+2} \\ &= \frac{2x}{x+1} - \frac{2(x-1)}{x+1} \\ &= \frac{2}{x+1}, \end{aligned}$$

∵ x 是满足 $-3 < x < 2$ 的整数,

∴ x 可取 $-2, -1, 0, 1$,

∵ 分式有意义,

∴ $x \neq -1, 1, -2$,

∴ $x = 0$,

∴ 原式 $= \frac{2}{0+1} = 2$.

22 阅读下列材料:

解方程: $x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x} - 2 = 0$.

分析: 我们可以用“换元法”解方程.

解: 设 $\sqrt{x^2 + 3x} = t (t \geq 0)$, 则 $x^2 + 3x = t^2$,

原方程可化为: $t^2 - t - 2 = 0$,

请你将剩下的解题过程补充完整, 并求出 x 的值.

换元法又称变量替换法，可以化繁为简，化难为易，是解题常用的方法之一。



【答案】 $x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查了解无理方程，解一元二次方程，利用十字相乘法把方程 $t^2 - t - 2 = 0$ 左边分解因式，再解方程得到 $t = 2$ ，则 $x^2 + 3x - 2 = 0$ ，据此利用公式法解方程即可得到答案.

【详解】解：设 $\sqrt{x^2 + 3x} = t (t \geq 0)$ ，则 $x^2 + 3x = t^2$ ，

原方程可化为： $t^2 - t - 2 = 0$ ，

$$\therefore (t+1)(t-2) = 0,$$

$$\therefore t+1=0 \text{ 或 } t-2=0,$$

$$\therefore t=2 \text{ 或 } t=-1 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore x^2 + 3x = 2,$$

$$\therefore x^2 + 3x - 2 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}.$$

四、解答题 (本大题共 4 题，满分 22 分)

23. 已知一个多边形的每一个外角都等于 40° ，求这个多边形的内角和.

【答案】 1260°

【解析】

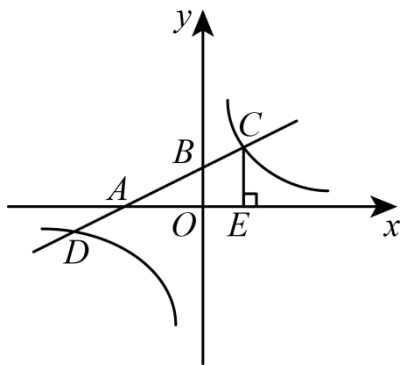
【分析】本题主要考查了多边形内角和定理和外角和定理，多边形的外角和为 360° ，据此可求出该多边形的边数，再根据 n 边形内角和为 $180^\circ \cdot (n-2)$ 计算求解即可.

【详解】解： $\because$ 一个多边形的每一个外角都等于 40° ，

$$\therefore \text{这个多边形的边数为 } \frac{360^\circ}{40^\circ} = 9,$$

$$\therefore \text{这个多边形的内角和为 } 180^\circ \times (9-2) = 1260^\circ.$$

24. 如图, 平面直角坐标系中, 直线 $y_1 = kx + b$ 分别与 x , y 轴交于点 A , B , 与双曲线 $y_2 = \frac{m}{x}$ 分别交于点 C , D (点 C 在第一象限, 点 D 在第三象限), 作 $CE \perp x$ 轴于点 E , $OA = 4$, $OE = OB = 2$.



(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 求出 y_1 和 y_2 的交点 D 的坐标, 并根据图像法观察, 直接写出当 $y_1 > y_2$ 时, 求 x 的取值范围.

【答案】(1) $y_2 = \frac{6}{x}$

(2) $D(-6, -1)$, $x > 2$ 或 $-6 < x < 0$

【解析】

【分析】本题是反比例函数的综合题, 主要考查反比例函数与一次函数的交点问题, 解题的关键求出函数解析式, 利用数形结合的思想,

(1) 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $OA = 4$, $OE = OB = 2$, 再用待定系数法即可求解;

(2) 求出点 D 坐标, 观察函数图象即可求解.

【小问 1 详解】

解: 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $OA = 4$, $OE = OB = 2$,

故点 A , B 的坐标分别为 $(-4, 0)$, $(0, 2)$,

将点 A , B 的坐标代入直线 $y_1 = kx + b$ 的表达式得,
$$\begin{cases} b = 2 \\ 0 = -4k + b \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$$

故直线 AB 的表达式为 $y = \frac{1}{2}x + 2$;

当 $x = 2$ 时, $y = \frac{1}{2}x + 2 = 3$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(2, 3)$,

将点 C 的坐标代入反比例函数表达式得 $3 = \frac{m}{2}$,

解得: $m = 6$,

故反比例函数的解析式 $y_2 = \frac{6}{x}$;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 直线 $y_1 = kx + b$ 分别与 x , y 轴交于点 A , B , 与双曲线 $y_2 = \frac{m}{x}$ 分别交于点 C , D ,

$$\therefore \text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases},$$

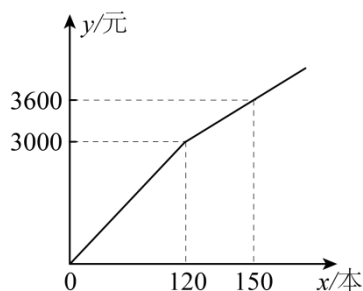
$$\text{解得: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases},$$

$\because$ 点 C 在第一象限, 点 D 在第三象限,

$\therefore$ 点 D 坐标为 $(-6, -1)$,

观察图象知, 当 $y_1 > y_2$ 时, x 的取值范围是 $x > 2$ 或 $-6 < x < 0$.

25. 每年 4 月 23 日是世界读书日, 旨在推动更多的人去阅读和写作, 某书店以读书日为契机, 决定购进甲, 乙两种图书, 供消费者选择. 经调查, 乙种图书每本进价 20 元, 甲种图书的总进价 y 与购进甲种图书的数量 x 之间的函数关系如图所示:



(1) 请求出当 $0 \leq x \leq 120$ 时, y 与 x 的函数关系式;

(2) 若该书店准备购进甲, 乙两种图书共 300 本, 且每种图书数量都不少于 120 本, 书店计划甲种图书以每本 30 元出售, 乙种图书以每本 25 元出售, 如何购进两种图书, 才能使书店所获利润最大, 最大利润是多少?

【答案】(1) $y = 25x$

(2) 应购买甲种图书 180 本, 乙种图书 120 本, 利润最大, 最大为是 1800 元

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的实际应用，利用待定系数法求出一次函数的关系式是解题关键.

(1) 利用待定系数法求出关系式即可；

(2) 先求出当 $x \geq 120$ 时，设 y 与 x 的函数关系式，再设书店所获利润为 w 元，可得 w 关于 x 的关系式，再利用一次函数的性质求出最少的费用即可.

【小问 1 详解】

解： 设 y 与 x 的函数关系式为 $y = kx (k \neq 0)$ ，

把点 $(120, 3000)$ 代入得： $3000 = 120k$ ，

解得： $k = 25$ ，

$\therefore$ 当 $0 \leq x \leq 120$ 时， y 与 x 的函数关系式为 $y = 25x$ ；

【小问 2 详解】

解： 当 $x \geq 120$ 时， 设 y 与 x 的函数关系式为 $y = mx + n$ ，

把点 $(120, 3000)$ ， $(150, 3600)$ 代入得：

$$\begin{cases} 120m + n = 3000 \\ 150m + n = 3600 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} m = 20 \\ n = 600 \end{cases},$$

$\therefore$ 当 $x \geq 120$ 时， 设 y 与 x 的函数关系式为 $y = 20x + 600$ ，

根据题意得： $120 \leq x \leq 180$ ，

设书店所获利润为 w 元， 则有

$$w = 30x + (25 - 20)(300 - x) - (20x + 600) = 5x + 900,$$

$$\therefore 5 > 0,$$

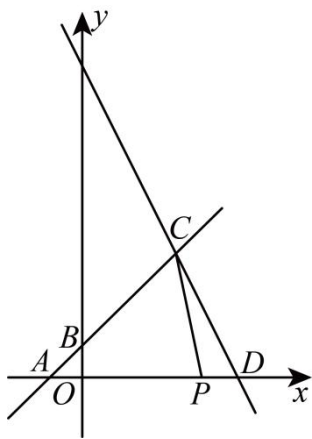
$\therefore w$ 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x = 180$ 时， w 取得最大值， 最大值为 $5 \times 180 + 900 = 1800$ ，

答： 应购买甲种图书 180 本， 乙种图书 120 本， 利润最大， 最大为是 1800 元.

五、综合题 (本大题共 1 题， 满分 12 分)

26. 如图， 在平面直角坐标系中， 直线 $y_1 = x + 1$ 与 x 轴、 y 轴分别交 A 、 B 两点， 与直线 $y_2 = -\frac{1}{3}x + b$ 相交于点 $C(3, m)$.



(1) 求 m 和 b 的值;

(2) 若直线 $y_2 = -\frac{1}{3}x + b$ 与 x 轴相交于点 D , 动点 P 从点 D 开始, 以每秒 1 个单位的速度向 x 轴负方向运动, 设点 P 的运动时间为 t 秒.

①若点 P 在线段 DA 上, 且 $\triangle ACP$ 的面积为 10, 求 t 的值;

②是否存在 t 的值, 使 $\triangle ACP$ 为等腰三角形? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $m = 4$, $b = 5$

(2) ① $t = 11$; ②存在 t 的值, 使 $\triangle ACP$ 为等腰三角形, t 的值为 8 或 $16 - 4\sqrt{2}$ 或 $16 + 4\sqrt{2}$ 或 12

【解析】

【分析】 (1) 把 $C(3, m)$ 代入 $y_1 = x + 1$ 求出 m , 再把 $C(3, 4)$ 代入 $y_2 = -\frac{1}{3}x + b$ 即可求出 b ;

(2) 求出 $OD = 10$, $AD = 12$; ①设 $PD = t$, 则 $AP = 12 - t$, 过 C 作 $CE \perp AP$ 于 E , 由三角形面积得出方程, 解方程即可;

②过 C 作 $CE \perp AP$ 于 E , 则 $CE = 4$, $AE = 4$, 由勾股定理求出 $AC = 4\sqrt{2}$, 然后分三种情况: 当 $AC = PC$ 时; 当 $AP = AC$ 时; 当 $PC = PA$ 时; 分别求出 t 的值即可.

【小问 1 详解】

$\because$ 点 C 在直线 $y = x + 1$ 上,

$$m = 3 + 1 = 4,$$

又 $\because$ 点 $C(3, 4)$ 也在直线 $y = -\frac{1}{3}x + b$ 上,

$$\therefore -\frac{1}{3} \times 3 + b = 4,$$

解得: $b = 5$;

【小问 2 详解】

在 $y = -\frac{1}{3}x + 5$ 中, 当 $y = 0$ 时, $x = 15$,

$$\therefore D(15, 0),$$

$$\therefore OD = 15,$$

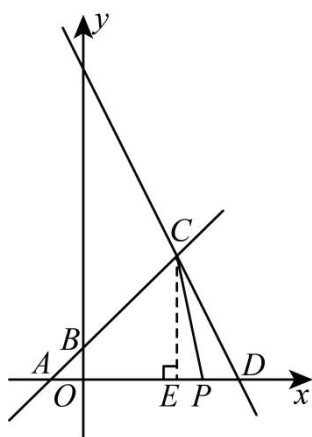
在 $y = x + 1$ 中, 当 $y = 0$ 时, $x = -1$,

$$\therefore A(-1, 0),$$

$$\therefore OA = 1,$$

$$\therefore AD = 1 + 15 = 16;$$

① 设 $PD = t$, 则 $AP = 16 - t$, 过 C 作 $CE \perp AP$ 于 E , 如图所示:



则 $CE = 4$,

$\therefore \triangle ACP$ 的面积为 10,

$$\therefore \frac{1}{2} \times (16 - t) \times 4 = 10,$$

解得: $t = 11$;

② 存在, 理由如下:

过 C 作 $CE \perp AP$ 于 E , 如图所示:

则 $CE = 4$, $OE = 3$,

$$\therefore AE = OA + OE = 4,$$

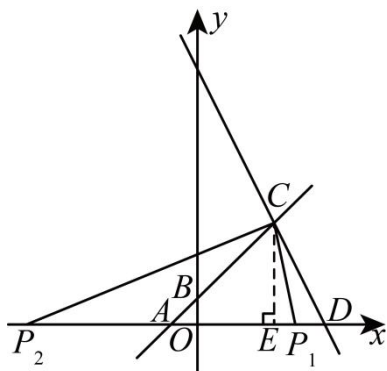
$$\therefore AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2};$$

a. 当 $AC = PC$ 时, $AP = 2AE = 8$,

$$PD = AD - AP = 8,$$

$$t = 8;$$

b. 当 $AP = AC$ 时, 如图所示:

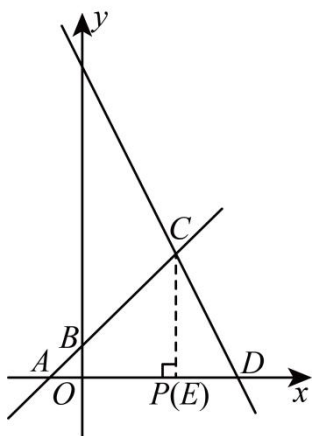


则 $AP_1 = AP_2 = AC = 4\sqrt{2}$,

$$\therefore DP_1 = 16 - 4\sqrt{2}, \quad DP_2 = 16 + 4\sqrt{2}$$

$$\therefore t = 16 - 4\sqrt{2}, \text{ 或 } t = 16 + 4\sqrt{2};$$

c. 当 $PC = PA$ 时, 如图所示:



设 $EP = m$, 则 $CP = \sqrt{m^2 + 4^2}$, $AP = m + 4$,

$$\therefore \sqrt{m^2 + 4^2} = m + 4,$$

解得: $m = 0$,

$$\therefore P \text{ 与 } E \text{ 重合, } AP = 4,$$

$$\therefore PD = 12,$$

$$\therefore t = 12;$$

综上所述, 存在 t 的值, 使 $\triangle ACP$ 为等腰三角形, t 的值为 8 或 $16 - 4\sqrt{2}$ 或 $16 + 4\sqrt{2}$ 或 12.

【点睛】 本题考查了一次函数的应用, 坐标与图形性质, 三角形面积, 等腰三角形的性质、勾股定理以及分类讨论等知识, 熟练掌握一次函数的性质和等腰三角形的性质是解题的关键.