

2024 学年第二学期期中考试八年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分, 每题只有一个选项正确)

1. 下列说法正确的是 ()

A. $\frac{5x^2+4x+3}{2}=1$ 是分式方程

B. $\begin{cases} x^2-x=5 \\ 3y=12 \end{cases}$ 是二元二次方程组

C. $\frac{\sqrt{2}}{x}+\sqrt{3}=2$ 是无理方程

D. $x^6+3x^2=0$ 是二项方程

【答案】 B

【解析】

【分析】 分别根据一元二次方程的定义、二元二次方程组的定义、分式方程的定义、二项方程的定义逐项判断即可得.

【详解】 解: A、 $\frac{5x^2+4x+3}{2}=1$ 是一元二次方程, 则此项不符合题意;

B、 $\begin{cases} x^2-x=5 \\ 3y=12 \end{cases}$ 是二元二次方程组, 则此项符合题意;

C、 $\frac{\sqrt{2}}{x}+\sqrt{3}=2$ 是分式方程, 则此项不符合题意;

D、 $x^6+3x^2=0$ 不是二项方程, 则此项不符合题意;

故选: B.

【点睛】 本题考查了无理方程、高次方程、分式方程, 较难的是二项方程的判断, 解题的关键是掌握二项方程的定义: 如果一元 n 次方程的一边只有含未知数的一项和非零的常数项, 另一边是零, 那么这样的方程就叫做二项方程.

2. 从一个九边形的一个顶点出发的对角线把这个九边形分割成的三角形个数是 ()

A. 10

B. 12

C. 7

D. 6

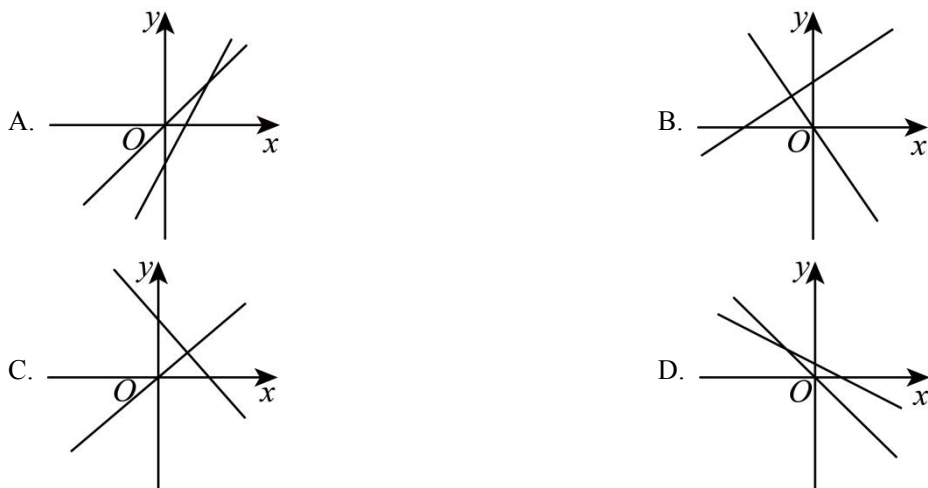
【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的对角线, 根据 n 边形从一个顶点引出的对角线条数为 $(n-3)$ 条, 可分成个 $(n-2)$ 三角形即可求解, 掌握以上知识点是解题的关键.

【详解】解：从一个九边形的一个顶点出发的对角线把这个九边形分割成的三角形个数为 $9 - 2 = 7$ 个，
故选：C.

3. 一次函数 $y = kx - b$ 与正比例函数 $y = kbx$ (k, b 为常数, $kb \neq 0$) 在同一直角坐标系内的大致图象不可能的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了正比例函数和一次函数的图象，根据一次函数与图象的位置关系确定 k 、 b ，再去对照正比例函数的图象与 kb 的关系，逐项判断即可.

【详解】解：A、由一次函数图象位置确定 $k > 0$ ， $-b < 0$ ， $b > 0$ ，故 $kb > 0$ ，正比例函数图象满足这一关系，故选项 A 不符合题意；

B、由一次函数图象位置确定 $k > 0$ ， $-b > 0$ ， $b < 0$ ，故 $kb < 0$ ，正比例函数图象满足这一关系，故选项 B 不符合题意；

C、由一次函数图象位置确定 $k < 0$ ， $-b > 0$ ， $b < 0$ ，故 $kb > 0$ ，正比例函数图象满足这一关系，故选项 C 不符合题意；

D、由一次函数图象位置确定 $k < 0$ ， $-b > 0$ ， $b < 0$ ，故 $kb > 0$ ，正比例函数图象不满足这一关系，故选项 D 符合题意；

故选：D.

4. 五一劳动节小明一家自驾车去离家 650km 的景点旅游，出发前将油箱加满油. 下表记录了轿车行驶的路程 x (km) 与油箱剩余油量 y (L) 之间的部分数据：

轿车行驶的路程 x /km	0	150	300	450	600	...
-----------------	---	-----	-----	-----	-----	-----

油箱剩余油量 y/L	60	48	36	24	12	...
--------------	----	----	----	----	----	-----

下列说法中不正确的是 ()

- A. 该车的油箱容量为 60L
- B. 该车每行驶 100km 耗油 8L
- C. 当小明一家到达景点时, 油箱中剩余 4.8L 油
- D. 油箱剩余油量 $y(L)$ 与行驶的路程 $x(km)$ 之间的关系式为 $y = 60 - 0.08x$

【答案】 C

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的应用, 由 $x = 0$ 时, $y = 60$, 可判断 A; 由表格数据可知, 轿车每行驶 150km, 耗油 12L,

可判断 B、C、D, 综上即可求解, 看懂表格数据的变化规律是解题的关键.

【详解】解: $\because x = 0$ 时, $y = 60$,

$\therefore$ 该车的油箱容量为 60L, 故选项 A 正确, 不合题意;

由表格数据可知, 轿车每行驶 150km, 耗油 12L,

$\therefore$ 该车每行驶 100km 耗油 $\frac{12}{150} \times 100 = 8L$, 故选项 B 正确, 不合题意;

$\therefore$ 景点离家 650km,

$\therefore$ 当小明一家到达景点时, 油箱中剩余 $60 - \frac{12}{150} \times 650 = 8L$, 故选项 C 错误, 符合题意;

$\therefore$ 轿车每行驶 150km, 耗油 12L,

$\therefore y = 60 - \frac{12}{150}x = 60 - 0.08x$, 故选项 D 正确, 不合题意;

故选: C.

5. 下列结论中, 正确的是 ()

- A. 函数 $y = -2x + 3 (-1 \leq x \leq 3)$ 的图像是一条线段
- B. 一次函数 $y = x - 1$ 的图像与 x 轴交于点 $(-1, 0)$
- C. 一次函数 $y = 4(x - 1) - 2$ 在 y 轴上截距是 -2
- D. 一次函数 $y = (-m^2 - 1)x + 3x + n$ 的图像一定经过第二、四象限

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的图象和性质，掌握一次函数的图象和性质是解题的关键.

根据一次函数的图象和性质判断即可.

【详解】 解： A. 函数 $y = -2x + 3 (-1 \leq x \leq 3)$ 的图像是一条线段，本选项说法正确，符合题意；

B. 一次函数 $y = x - 1$ 的图像与 x 轴交于点 $(1, 0)$ ，本选项说法错误，不符合题意；

C. 一次函数 $y = 4(x - 1) - 2$ ，可化为 $y = 4x - 6$ ，在 y 轴上截距是 -6 ，本选项说法错误，不符合题意；

D. 一次函数 $y = (-m^2 - 1)x + 3x + n$ ，可化为 $y = (-m^2 + 2)x + n$ ，当 $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ 时， $-m^2 + 2 > 0$ ，它的图像一定经过第一、三象限，本选项说法错误，不符合题意；

故选：A.

6. 方程组 $\begin{cases} (x-1)(y+3)=0 \\ y^2=x \end{cases}$ 的实数解的个数是 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 把 $y^2 = x$ 代入原方程，再化简成 $(y+1)(y-1)(y+3) = 0$ ，解方程即可求解.

【详解】 解： $\because y^2 = x$

$$\therefore (x-1)(y+3) = 0$$

$$\therefore (y^2-1)(y+3) = 0$$

$$\therefore (y+1)(y-1)(y+3) = 0$$

$$\therefore y+1=0 \text{ 或 } y-1=0 \text{ 或 } y+3=0$$

$$\therefore y = -1 \text{ 或 } y = 1 \text{ 或 } y = -3$$

故选 C

【点睛】 本题考查了因式分解解方程，解题关键是熟练掌握平方差公式和解方程.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 2 分，共 24 分)

7. 当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，函数 $y = (m-2)x^{3-|m|} + m + 2$ 是一次函数.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题主要考查了学生对一次函数的定义的理解及掌握情况，一次函数的未知数的次数是 1，同时系数不能为 0，据此求解即可.

【详解】 解： $\because$ 函数 $y = (m-2)x^{3-|m|} + m + 2$ 是一次函数，

$$\therefore 3 - |m| = 1 \text{ 且 } m - 2 \neq 0,$$

解得 $m = -2$,

故答案为： -2 .

8. 将直线 $y = mx + 2$ 向上平移 3 个单位，平移后的直线经过点 $(3, -4)$ ，那么 m 的值为_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象的平移、一次函数图象上点的坐标特征，熟练掌握图象平移的规律“左加右减，上加下减”是解题的关键.

根据图象平移的规律“上加下减”得出平移后的解析式，再将坐标代入求解即可.

【详解】 解： $\because$ 直线 $y = mx + 2$ 向上平移 3 个单位，

$$\therefore \text{直线向上平移的解析式为 } y = mx + 5,$$

$$\text{将点 } (3, -4) \text{ 代入 } y = mx + 5 \text{ 得: } -4 = 3m + 5,$$

解得： $m = -3$,

故答案为： -3 .

9. 从一个多边形的一个顶点出发，一共可作 9 条对角线，则这个多边形的内角和是_____度.

【答案】 1800

【解析】

【分析】 设多边形边数为 n ，根据 n 边形从一个顶点出发可引出 $(n-3)$ 条对角线可得 $n-3=9$ ，计算出 n 的值，再根据多边形内角和 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 可得答案.

【详解】 设多边形边数为 n ，由题意得：

$$n-3=9,$$

$$n=12,$$

$$\text{内角和: } (12-2) \times 180^\circ = 1800^\circ.$$

故答案为： 1800.

【点睛】本题主要考查了多边形的对角线, 以及多边形内角和, 关键是掌握 n 边形从一个顶点出发可引出 $(n-3)$ 条对角线, 多边形内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$.

10. 把二次方程 $x^2 - 4xy + 4y^2 = 9$ 化成两个一次方程, 那么这两个一次方程分别是_____.

【答案】 $x - 2y = 3$ 和 $x - 2y = -3$

【解析】

【分析】此题考查了多项式的分解因式, 正确掌握直接开平方法解方程是解题的关键.
利用完全平方公式分解因式, 两边同时开平方得到答案.

【详解】解: $x^2 - 4xy + 4y^2 = 9$,

分解因式得: $(x - 2y)^2 = 9$,

$\therefore x - 2y = 3$, $x - 2y = -3$,

故答案为: $x - 2y = 3$ 和 $x - 2y = -3$.

11. 已知: 一次函数 $y = (a+1)x - (a-2)$ 中, 该函数的图象不过第四象限, 则 a 的范围是_____.

【答案】 $-1 < a \leq 2$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的性质, 根据题意可得 $\begin{cases} a+1 > 0 \\ -(a-2) \geq 0 \end{cases}$, 解不等式即可求解.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = (a+1)x - (a-2)$ 的图象不经过第四象限,

$\therefore \begin{cases} a+1 > 0 \\ -(a-2) \geq 0 \end{cases}$,

$\therefore -1 < a \leq 2$,

故答案为: $-1 < a \leq 2$.

12. 用换元法解方程 $\frac{x}{x^2-1} + \frac{3(x^2-1)}{x} = 5$ 时, 如果设 $\frac{x}{x^2-1} = y$, 那么得到关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 5y + 3 = 0$

【解析】

【分析】本题考查了换元法, 将分式方程化为整式方程, 设 $\frac{x}{x^2-1} = y$, 则方程可化为 $y + \frac{3}{y} = 5$, 进而去分

母和移项即可求解，掌握将分式方程化为整式方程的方法是解题的关键.

【详解】解：设 $\frac{x}{x^2-1} = y$ ，则方程可化为 $y + \frac{3}{y} = 5$ ，

方程两边乘以 y ，得 $y^2 + 3 = 5y$ ，

$$\therefore y^2 - 5y + 3 = 0,$$

$\therefore$ 得到关于 y 的整式方程是 $y^2 - 5y + 3 = 0$ ，

故答案为： $y^2 - 5y + 3 = 0$.

13. 关于 y 的分式方程 $\frac{y}{y-2} + \frac{a}{2-y} = -1$ 有非负数解，则 a 的取值范围为_____.

【答案】 $a \geq -2$ 且 $a \neq 2$

【解析】

【分析】 本题考查根据分式方程的解的情况参数的范围，先求出分式方程的解，根据方程的解的情况结合分式有意义，列出不等式进行求解即可.

【详解】解：解 $\frac{y}{y-2} + \frac{a}{2-y} = -1$ ，得： $y = 1 + \frac{a}{2}$ ，

$\therefore$ 方程有非负数解，

$$\therefore y \geq 0 \text{ 且 } y - 2 \neq 0,$$

$$\therefore 1 + \frac{a}{2} \geq 0 \text{ 且 } 1 + \frac{a}{2} \neq 2,$$

$$\therefore a \geq -2 \text{ 且 } a \neq 2;$$

故答案为： $a \geq -2$ 且 $a \neq 2$.

14. 如果方程组 $\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x - 3y + k = 0 \end{cases}$ 无实数解，那么实数 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k > \frac{37}{12}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式，由方程组可得 $3x^2 + x + k - 3 = 0$ ，即得

$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (k - 3) = 37 - 12k < 0$ ，解不等式即可求解，掌握一元二次方程根的判别式与一元二次方程根的关系是解题的关键.

【详解】解：
$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \text{ ①} \\ x - 3y + k = 0 \text{ ②} \end{cases},$$

① $\times 3 +$ ②，得 $3x^2 + x + k = 3$ ，

整理得， $3x^2 + x + k - 3 = 0$ ，

$\therefore$ 方程组无实数解，

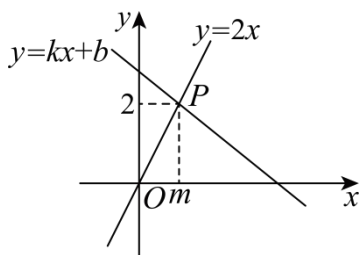
$\therefore$ 一元二次方程 $3x^2 + x + k - 3 = 0$ 无实数解，

$\therefore \Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (k - 3) = 37 - 12k < 0$ ，

解得 $k > \frac{37}{12}$ ，

故答案为： $k > \frac{37}{12}$ 。

15. 如图，直线 $y = 2x$ 与 $y = kx + b$ 相交于点 $P(m, 2)$ ，那么不等式 $kx + b > 2x$ 的解集是_____。



【答案】 $x < 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与不等式的关系，先求出点 P 的坐标，再找到直线 $y = kx + b$ 的图象在直线 $y = 2x$ 的图象上方时自变量的取值范围即可得到答案。

【详解】解： 在 $y = 2x$ 中，当 $y = 2x = 2$ 时， $x = 1$ ，

$\therefore P(1, 2)$ ，

$\therefore$ 由函数图象可知，不等式 $kx + b > 2x$ 的解集是 $x < 1$ ，

故答案为： $x < 1$ 。

16. 直线 $y = kx + 2$ 与 x 轴、 y 轴围成的三角形的面积为 5，则 k 的值为_____。

【答案】 $\pm \frac{2}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的图象和性质，熟练掌握一次函数与 x 、 y 轴交点坐标的求法是解题的关键；

先求出一次函数与 x 、 y 轴交点坐标，即可得出所围三角形的底和高，再根据三角形的面积公式列方程求解即可。

【详解】解：由题意知： $k \neq 0$ ，

当 $x=0$ 时， $y=2$ ，

当 $y=0$ 时， $kx+2=0$ ，

解得： $x=-\frac{2}{k}$ ，

$\therefore$ 直线 $y=kx+2$ 与 x 轴、 y 轴的交点为 $(-\frac{2}{k}, 0), (0, 2)$ ，

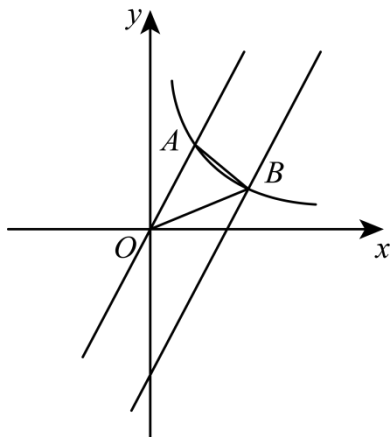
$\therefore$ 直线 $y=kx+2$ 与 x 轴、 y 轴围成的三角形的面积为 5，

$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \cdot \left| -\frac{2}{k} \right| = 5$ ，

解得： $k = \pm \frac{2}{5}$ ，

故答案为： $\pm \frac{2}{5}$ 。

17. 如图，一次函数 $y=2x$ 与 $y=2x-9$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第一象限分别交于 A 、 B 两点，已知 $\triangle AOB$ 面积为 3，则 k 的值为_____。

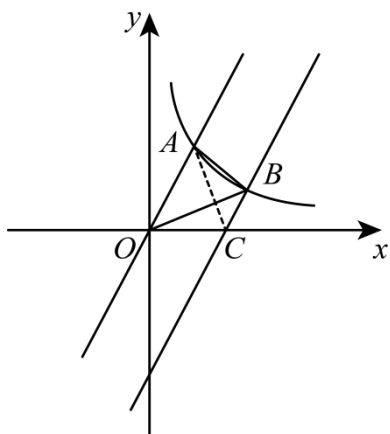


【答案】 $\frac{8}{9}$

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题，两条直线平行问题，三角形的面积，设 $y=2x-9$ 的图象与 x 轴的交点为 C ，连接 AC ，求得点 C 的坐标，即可求得 OC ，利用三角形面积求得 A 的纵坐标，代入 $y=2x$ 求得横坐标，然后利用待定系数法求得 k 即可。

【详解】解：设 $y = 2x - 9$ 的图象与 x 轴的交点为 C ，连接 AC ，



$$\text{令 } y = 2x - 9 = 0, \text{ 则 } x = \frac{9}{2},$$

$$\therefore C\left(\frac{9}{2}, 0\right),$$

$$\therefore OC = \frac{9}{2},$$

$\because$ 直线 $y = 2x$ 与直线 $y = 2x - 9$ 平行,

$$\therefore S_{\triangle AOC} = S_{\triangle AOB} = 3,$$

$$\therefore \frac{1}{2}OC \cdot y_A = 3$$

$$\therefore y_A = \frac{4}{3},$$

把 $y_A = \frac{4}{3}$ 代入 $y = 2x$ ，求得 $x = \frac{2}{3}$ ，

$$\therefore A\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right),$$

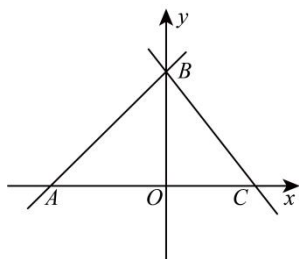
$\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象过点 A ，

$$\therefore k = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9},$$

故答案为： $\frac{8}{9}$.

18. 如图，直线 $AB: y = x + b$ 分别与 x 、 y 轴交于 A 、 B 两点，点 A 的坐标为 $(-4, 0)$ ，过点 B 的直线交 x 轴正半轴于点 C ，且 $OB:OC = 4:3$ ．点 P 是 y 轴上的一点，连接 CP ，将 $\triangle BCP$ 沿直线 CP 翻折，当点 B 的

对应点 B' 恰好落在 x 轴上时, 此时点 P 的坐标为_____.



【答案】 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 或 $(0, -6)$

【解析】

【分析】 本题是一次函数综合题, 主要考查了一次函数与几何综合, 勾股定理和折叠综合等知识, 运用分类讨论思想是解题的关键.

由直线 AB 过点 A , 利用一次函数图象上点的坐标特征可求出 b 的值, 进而可得出点 B 的坐标及 OB 的长度, 结合 $OB:OC = 4:3$ 可求出点 C 的坐标, 设 $OP = x$, 则 $PB = PB' = 4 - x$ 或 $4 + x$, 在 $\text{Rt}\triangle POB'$ 中, 利用勾股定理可得出关于 x 的方程, 解之即可得出结论.

【详解】 $\because$ 直线 $AB: y = x + b$ 过点 $A(-4, 0)$,

$$\therefore 0 = -4 + b,$$

$$\therefore b = 4,$$

当 $x = 0$ 时, $y = x + b = b = 4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 4)$, 即 $OB = 4$,

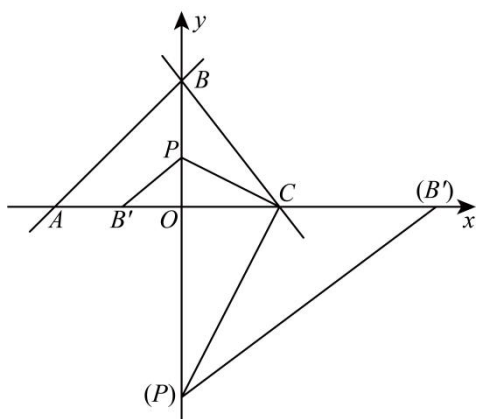
$$\because OB:OC = 4:3,$$

$$\therefore OC = 3,$$

$\therefore$ 点 C 在 x 轴正半轴,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(3, 0)$,

依照题意画出图形, 如图所示.



由翻折得, $PB = PB'$, $B'C = BC$,

$\because OB = 4$, $OC = 3$,

$$\therefore B'C = BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$\therefore OB' = 5 - 3 = 2 \text{ 或 } OB' = 5 + 3 = 8,$$

$\therefore$ 设 $OP = x$, 则 $PB = PB' = 4 - x$ 或 $4 + x$,

在 $\text{Rt}\triangle POB'$ 中, $\angle POB' = 90^\circ$,

$$\therefore OP^2 + OB'^2 = PB'^2, \text{ 即 } x^2 + 2^2 = (4 - x)^2 \text{ 或 } x^2 + 8^2 = (4 + x)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{3}{2} \text{ 或 } x = 6,$$

点 P 的坐标为 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 或 $(0, -6)$.

故答案为: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 或 $(0, -6)$

三、解答题 (本大题共 5 题, 19~22 每题 5 分, 第 23 题 8 分, 共 28 分)

19. 解关于 x 的方程: $7 - bx^2 = x^2 + 6(b \neq -1)$.

【答案】 当 $b > -1$ 时, $x = \pm \frac{\sqrt{b+1}}{b+1}$, 当 $b < -1$ 时, 方程无实数根

【解析】

【分析】 本题主要考查解一元二次方程的能力, 熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法: 直接开平方法、因式分解法、公式法、配方法, 结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键.

先变形, 再利用直接开平方法求解可得.

【详解】 解: $7 - bx^2 = x^2 + 6(b \neq -1)$,

整理得: $(1+b)x^2 = 7-6$, 即 $x^2 = \frac{1}{b+1} (b \neq -1, \text{即 } b+1 \neq 0)$,

当 $b > -1$ 时, $x = \pm \frac{\sqrt{b+1}}{b+1}$,

当 $b < -1$ 时, 方程无实数根.

20. 解方程: $\frac{2x}{x^2-9} = 1 + \frac{1}{x-3}$.

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 解一元二次方程, 根据解分式方程的步骤解答即可求解, 掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

【详解】 解: 方程两边乘以 $(x+3)(x-3)$, 得 $2x = (x+3)(x-3) + x+3$,

整理得, $x^2 - x - 6 = 0$,

解得 $x = -2$ 或 $x = 3$,

$\therefore (x+3)(x-3) \neq 0$,

$\therefore x \neq -3$ 且 $x \neq 3$,

$\therefore x = -2$.

21. 解方程: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$.

【答案】 $x_1 = 4, x_2 = 12$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解无理方程, 先把原方程变形为 $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x-3} + 2$, 再把方程两边同时平方得到 $x = 4\sqrt{x-3}$, 再把方程两边同时平方得到 $x^2 - 16x + 48 = 0$, 解方程即可得到答案.

【详解】 解: $\because \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$,

$\therefore \sqrt{2x+1} = \sqrt{x-3} + 2$,

$\therefore 2x+1 = x-3 + 4\sqrt{x-3} + 4$,

$\therefore x = 4\sqrt{x-3}$,

$\therefore x^2 = 16(x-3)$,

$$\therefore x^2 - 16x + 48 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 4, \quad x_2 = 12,$$

$$\therefore \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore x \geq 3,$$

$$\therefore x_1 = 4, \quad x_2 = 12.$$

$$22. \text{ 解方程组: } \begin{cases} \frac{2}{2x+y} + \frac{1}{x-2y} = 3 \\ \frac{4}{2x+y} + \frac{3}{x-2y} = 7 \end{cases}.$$

$$\text{【答案】} \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

【解析】

$$\text{【分析】 本题考查了分式方程，解二元一次方程组，设 } 2x+y=a, \quad x-2y=b, \text{ 可得 } \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 3 \text{ ①} \\ \frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 7 \text{ ②} \end{cases}, \text{ 解}$$

分式方程可得 $a=1, \quad b=1$ ，即得 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2y=1 \end{cases}$ ，再解方程组即可求解，利用换元法解答是解题的关键.

【详解】解：设 $2x+y=a, \quad x-2y=b$,

$$\text{则方程组可变为 } \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 3 \text{ ①} \\ \frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 7 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{②} - \text{①} \times 3, \text{ 得 } -\frac{2}{a} = -2,$$

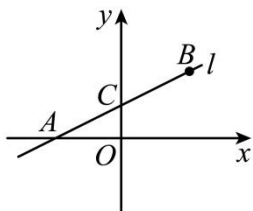
$$\text{解得 } a=1, \text{ 把 } a=1 \text{ 代入①, 得 } 2 + \frac{1}{b} = 3,$$

$$\therefore b=1,$$

$$\therefore \begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2y=1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}.$$

23. 如图, 直线 $l: y = \frac{1}{3}x + m$ 分别交 x 轴、 y 轴于点 $A(-3, 0)$ 和点 C , 点 $B(n, 2)$ 在直线 l 上.



- (1) 求 m, n 的值;
 (2) 已知 P 是 y 轴上的点, 如果 $\triangle ABP$ 的面积为 4, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $m = 1, n = 3$

(2) $\left(0, \frac{7}{3}\right)$ 或 $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数图像上点的坐标特征, 三角形面积等知识, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

- (1) 根据直线上的点的坐标满足直线的解析式来求解 m 和 n 的值;
 (2) 设 $P(0, y)$, 则可求 $PC = |y - 1|$, 利用 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ACP} + S_{\triangle BCP}$ 求解即可.

【小问 1 详解】

解: 将点 $A(-3, 0)$ 代入 $y = \frac{1}{3}x + m$ 得: $0 = \frac{1}{3} \times (-3) + m$,

解得: $m = 1$,

$$\therefore \text{直线 } l: y = \frac{1}{3}x + 1,$$

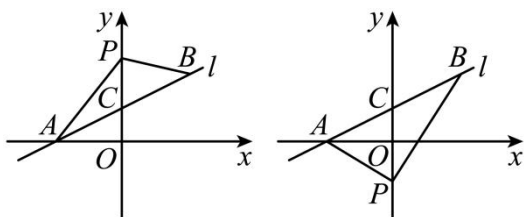
$\because$ 点 $B(n, 2)$ 在直线 l 上,

$$\therefore 2 = \frac{1}{3}n + 1,$$

解得: $n = 3$.

【小问 2 详解】

解：如图，设 $P(0, y)$ ，



$\therefore$ 点 C 在 y 轴上，且在直线 $l: y = \frac{1}{3}x + 1$ 上，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 1)$ ，

$\therefore PC = |y - 1|$ ，

$\therefore A(-3, 0), B(3, 2)$ ，

$\therefore$ 点 A 到 y 轴的距离为 3，点 B 到 y 轴的距离为 3，

$\therefore \triangle ABP$ 的面积为 4，

$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ACP} + S_{\triangle BCP} = \frac{1}{2} \times PC \times (3 + 3) = 4$ ，

$\therefore \frac{1}{2} \times |y - 1| \times (3 + 3) = 4$ ，即 $|y - 1| = \frac{4}{3}$ ，

解得： $y_1 = \frac{7}{3}$ ， $y_2 = -\frac{1}{3}$ ，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0, \frac{7}{3})$ 或 $(0, -\frac{1}{3})$ 。

四、解答题（本大题共 3 题，第 24 题 8 分，第 25 题 8 分，第 26 题 14 分，共 30 分）

24. 随着电影《哪吒 2 魔童闹海》的热映，周边玩偶热销。小洋经营的线上周边专卖店销量激增，一次，小洋发现一张进货单上的一个信息是：A 款哪吒玩偶的进货单价比 B 款哪吒玩偶多 5 元，花 600 元购进 A 款哪吒玩偶的数量比花 600 元购进 B 款哪吒玩偶的数量少 6 个。

(1) 问：A、B 两款玩偶的进货单价分别是多少元？

(2) 小洋准备要投入 1200 元购进 A、B 两款玩偶若干个，且 A 款的数量不小于 B 款的一半，于是他决定将 A 款玩偶的销售单价定为 27 元，将 B 款玩偶的销售单价定为 25 元，如果所有玩偶都按定价全部卖出，请你根据计算说明，当 A 款数量购进多少时，小洋获得的总利润最高，最高为多少元？

【答案】 (1) A 款的进货单价为 25 元，B 款的进货单价为 20 元

(2) A 款数量购进 19 个时，小洋获得的总利润最高，最高利润 219.25 元

【解析】

【分析】(1) 设 A 款的进货单价为 x 元, 则 B 款的进货单价为 $(x-5)$ 元, 根据题意列出方程即可求解;

(2) 设 A 款购进 a 个, 总利润为 W 元, 可得 $W = -\frac{17}{4}a + 300$, 再根据题意由不等式求得 $a \geq 18\frac{6}{13}$, 进而根据一次函数的性质即可求解;

本题考查了分式方程的应用, 一次函数的应用, 一元一次不等式的应用, 掌握一次函数的性质是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 设 A 款的进货单价为 x 元, 则 B 款的进货单价为 $(x-5)$ 元,

由题意得, $\frac{600}{x-5} - \frac{600}{x} = 6$,

解得 $x_1 = 25$, $x_2 = -20$ (不合, 舍去),

经检验, $x = 25$ 是原方程的解, 符合题意,

$\therefore x - 5 = 20$,

答: A 款的进货单价为 25 元, B 款的进货单价为 20 元;

【小问 2 详解】

解: 设 A 款购进 a 个, 总利润为 W 元,

由题意得, $W = (27-25)a + (25-20) \times \frac{1200-25a}{20} = -\frac{17}{4}a + 300$,

$\because$ A 款的数量不小于 B 款的一半,

$\therefore a \geq \frac{1}{2} \times \frac{1200-25a}{20}$,

解得 $a \geq 18\frac{6}{13}$,

$\therefore W = -\frac{17}{4}a + 300$,

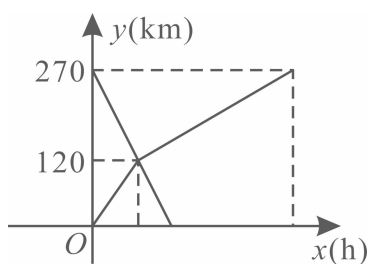
$\therefore$ 当 a 取最小值时, W 取最大值,

$\therefore a$ 为整数,

$\therefore a$ 的最小值为 19,

即 A 款数量购进 19 个时, 小洋获得的总利润最高, 最高利润 $W = -\frac{17}{4} \times 19 + 300 = 219.25$ 元.

25. 已知甲、乙两车分别从 A、B 两地同时出发, 沿同一条公路相向而行, 甲车先以 60 千米时的速度匀速行驶 120 千米后与乙车相遇, 再以另一速度继续匀速行驶 3 小时到达 B 地; 乙车匀速行驶至 A 地, 两车到达各自的目的地后停止. 甲、乙两车各自距 A 地的路程 $y(\text{km})$ 与行驶时间 $x(\text{h})$ 之间的函数关系如图所示.



(1) 求两车相遇后, 甲车距 A 地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数关系式;

(2) 当乙车到达 A 地时, 求甲车距 A 地的路程.

【答案】 (1) $y = 50x + 20 (2 \leq x \leq 5)$

(2) 200 千米

【解析】

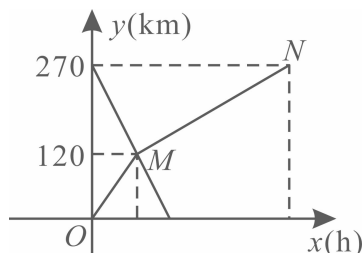
【分析】 本题主要考查了一次函数的应用, 读懂图象, 求出函数解析式是解答本题的关键.

(1) 首先根据图像和题意求出 $M(2, 120)$, $N(5, 270)$, 然后利用待定系数法求解即可;

(2) 根据题意求出乙车行完全程用时为 3.6 小时, 然后将 $x = 3.6$ 代入 $y = 50x + 20 (2 \leq x \leq 5)$ 求解即可.

【小问 1 详解】

如图所示,



根据题意得, 两人相遇的时间为 $120 \div 60 = 2$,

$\therefore M(2, 120)$,

$\therefore$ 甲车先以 60 千米/时的速度匀速行驶 120 千米后与乙车相遇, 再以另一速度继续匀速行驶 3 小时到达 B 地

$\therefore 2 + 3 = 5$,

$\therefore N(5, 270)$

设相遇后, 甲车距 A 地的路程 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$

则有:
$$\begin{cases} 2k + b = 120 \\ 5k + b = 270 \end{cases}$$

解得, $\begin{cases} k = 50 \\ b = 20 \end{cases}$

甲车距 A 地的路程 y 与 x 之间的函数关系式 $y = 50x + 20 (2 \leq x \leq 5)$;

【小问 2 详解】

甲乙两车相遇时, 乙车行驶的路程为 $270 - 120 = 150$ 千米,

$\therefore$ 乙车的速度为: $150 \div 2 = 75$ (千米/时)

$\therefore$ 乙车行完全程用时为: $270 \div 75 = 3.6$ (时)

$\therefore 3.6 > 2$

$\therefore$ 当 $x = 3.6$ 时, $y = 50 \times 3.6 + 20 = 200$ 千米,

$\therefore$ 当乙车到达 A 地时, 甲车距 A 地的路程为 200 千米.

26. 【探索发现】如图 1, 等腰直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CB = CA$, 直线 DE 经过点 C , 过点 A 作 $AD \perp DE$ 于点 D . 过 B 作 $BE \perp DE$ 于点 E , 则 $\triangle BEC \cong \triangle CDA$.

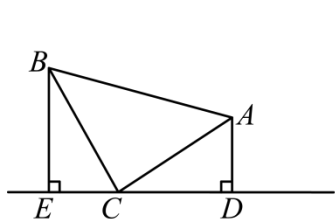


图1

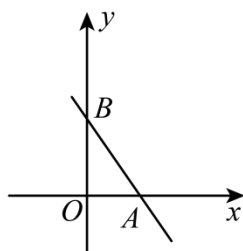


图2

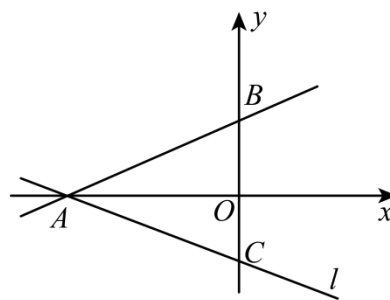


图3

【迁移应用】如图 2, 直线 $y = kx + 2$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点.

(1) 当直线 $y = 6$ 上存在一点 F , 且点 F 在第一象限, 使得 $\triangle ABF$ 为等腰直角三角形, 请直接写出点 F 的坐标及相应的 k 的值;

(2) 点 H 为第一象限内的一点, 且 $AH \perp AB$, $AH = AB$, 连接 OH , 求 $\triangle OAH$ 的面积 (用含有 k 的代数式来表示);

(3) 如图 3, 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 直线 l 经过点 A , 与 y 轴负半轴交于点 C , 且 $\angle BAC = 45^\circ$, 求直线 l 的表达式.

【答案】(1) $F(2, 6)$, $k = -\frac{1}{2}$ 或 $F(8, 6)$, $k = -\frac{1}{3}$ 或 $F(6, 6)$, $k = -\frac{1}{5}$

(2) $\frac{2}{k^2}$

$$(3) \quad y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与几何综合问题，涉及待定系数法求函数解析式，一次函数图象与坐标轴的交点问题，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的判定等知识点，解题的关键在于构造“一线三等角”的全等.

(1) 先求出 $B(0, 2)$ ，即 $OB = 2$ ，然后分三种情况讨论，利用“一线三等角”的全等进行求解即可；

(2) 先求出 $A\left(-\frac{2}{k}, 0\right)$ ，则 $OA = \left|\frac{2}{k}\right|$ ，过点 H 作 $HK \perp x$ 轴于点 H ，同上可证明： $\triangle BOA \cong \triangle AKH$ ，

$HK = OA = \left|\frac{2}{k}\right|$ ，再由 $S_{\triangle OAH} = \frac{1}{2}OA \times HK$ 即可求解；

(3) 当 $k = \frac{1}{2}$ 时， $y = \frac{1}{2}x + 2$ ，则可求 $A(-4, 0)$ ，过点 B 作 $BP \perp l$ 交直线 l 于点 P ，过点 B 作 y 轴的垂线，

分别过点 A, P 作垂线的垂线，垂足为点 M, N ，可得 $BA = BP$ ，同上可证明： $\triangle BMA \cong \triangle PNB$ ，

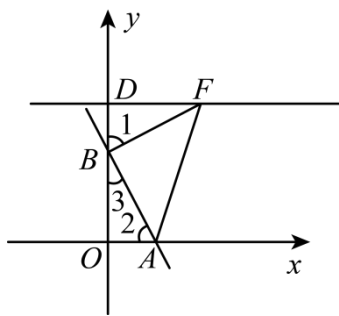
即可得到 $P(2, -2)$ ，再由待定系数法求解即可.

【小问 1 详解】

解：当 $x = 0, y = 2$ ，

$\therefore B(0, 2)$ ，即 $OB = 2$ ，

①当 $BA = BF, \angle ABF = 90^\circ$ ，记直线 $y = 6$ 交 y 轴于点 D ，如图：



$\because$ 直线 $y = 6$ 与 y 轴垂直，

$\therefore \angle AOB = \angle BDF = 90^\circ$ ，

$\because \angle ABF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 90^\circ - \angle 3$ ，

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BDF \text{ (AAS)},$$

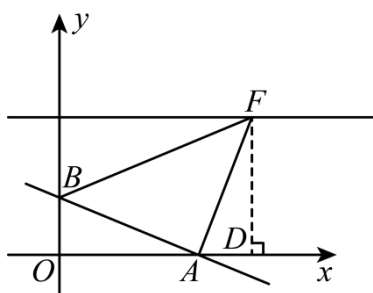
$$\therefore DF = OB = 2, \quad BD = OA = 6 - 2 = 4$$

$$\therefore F(2, 6), \quad A(4, 0),$$

将 $A(4, 0)$ 代入 $y = kx + 2$ 得, $4k + 2 = 0$,

$$\text{解得: } k = -\frac{1}{2};$$

② $AB = AF, \angle BAF = 90^\circ$, 过点 F 作 $FD \perp x$ 轴于点 D , 如图:



同理可证明: $\triangle AOB \cong \triangle FDA \text{ (AAS)},$

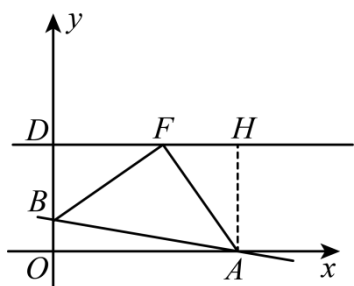
$$\therefore OB = AD = 2, \quad OA = FD = 6,$$

$$\therefore F(8, 6), \quad A(6, 0),$$

将 $A(6, 0)$ 代入 $y = kx + 2$ 得, $6k + 2 = 0$,

$$\text{解得: } k = -\frac{1}{3};$$

当 $FB = FA, \angle AFB = 90^\circ$, 记直线 $y = 6$ 交 y 轴于点 D , 过点 A 作直线 $y = 6$ 的垂线, 垂足为点 H , 如图:



同理可证明: $\triangle FDB \cong \triangle AHF \text{ (AAS)},$

$$\therefore FD = AH = 6,$$

$$\therefore FH = DB = 6 - 2 = 4,$$

$$\therefore OA = DH = 6 + 4 = 10,$$

$$\therefore F(6,6), A(10,0),$$

将 $A(10,0)$ 代入 $y = kx + 2$ 得, $10k + 2 = 0$,

$$\text{解得: } k = -\frac{1}{5};$$

综上所述: $F(2,6)$, $k = -\frac{1}{2}$ 或 $F(8,6)$, $k = -\frac{1}{3}$ 或 $F(6,6)$, $k = -\frac{1}{5}$;

【小问 2 详解】

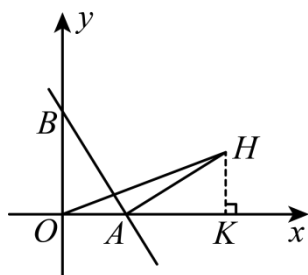
解: 当 $y = 0$, $kx + 2 = 0$,

$$\text{解得: } x = -\frac{2}{k},$$

$$\therefore A\left(-\frac{2}{k}, 0\right),$$

$$\therefore OA = \left|\frac{2}{k}\right|,$$

过点 H 作 $HK \perp x$ 轴于点 H ,



同上可证明: $\triangle BOA \cong \triangle AKH$,

$$\therefore HK = OA = \left|\frac{2}{k}\right|,$$

$$\therefore S_{\triangle OAH} = \frac{1}{2}OA \times HK = \frac{1}{2} \times \left(\left|\frac{2}{k}\right|\right)^2 = \frac{2}{k^2};$$

【小问 3 详解】

解: 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{1}{2}x + 2$,

令 $y = 0$, 则 $\frac{1}{2}x + 2 = 0$,

解得 $x = -4$,

$$\therefore A(-4,0),$$

过点 B 作 $BP \perp l$ 交直线 l 于点 P ，过点 B 作 y 轴的垂线，分别过点 A ， P 作垂线的垂线，垂足为点 M ， N ，

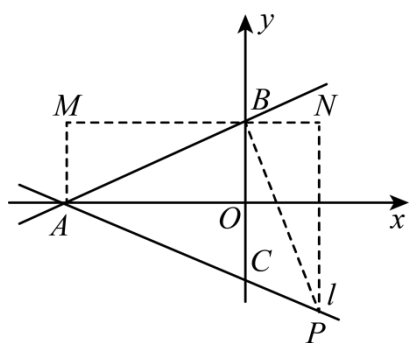


图3

$$\because \angle BAC = 45^\circ, \quad BP \perp l,$$

$$\therefore \angle BPA = \angle BAP = 45^\circ,$$

$$\therefore BA = BP,$$

同上可证明: $\triangle BMA \cong \triangle PNB$,

$$\therefore PN = BM = 4, BN = AM = 2,$$

$$\therefore P(2, -2),$$

设直线 l 表达式为: $y = mx + n$,

$$\text{代入 } P(2, -2), \quad A(-4, 0) \text{ 得: } \begin{cases} -4k + b = 0 \\ 2k + b = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 表达式为 } y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}.$$