

2024 学年第二学期初二年级数学学科期中试卷

一、选择题{每题 3 分，共 18 分}

1. 函数 $y = 2x - 3$ 的图像不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查一次函数的性质，根据 k 与 b 的值求出该一次函数的图像的位置是解题的关键.

根据一次函数的 k 与 b 的值即可知道该一次函数的图像经过哪些象限.

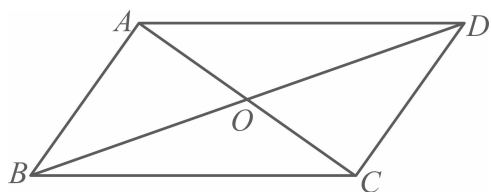
【详解】解：由题意可知： $k = 2$ ， $b = -3$ ，

$\therefore k > 0$ ， $b < 0$ ，

$\therefore$ 该一次函数的图像经过第一、三、四象限，即不经过第二象限，

故选：B.

2. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，两对角线交于点 O ， $AB \perp AC$ ， $AD = 5\text{cm}$ ， $OC = 2\text{cm}$ ，则对角线 BD 的长为 ()



- A. 13cm B. 8cm C. 3cm D. $2\sqrt{13}\text{cm}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质，勾股定理，先根据平行四边形的性质得 $BC = AD = 5\text{cm}$ ，

$AO = 2\text{cm}$ ， $AC = 4\text{cm}$ ， $BD = 2BO$ ，再运用勾股定理算出 $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 3\text{cm}$ ，以及

$BO = \sqrt{AB^2 + AO^2} = \sqrt{13}\text{cm}$ ，进行作答即可.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $OC = 2\text{cm}$ ，

$\therefore BC = AD = 5\text{cm}$ ， $AO = OC = 2\text{cm}$ ， $AC = 2OC = 4\text{cm}$ ， $BD = 2BO$

$\because AB \perp AC$ ，

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ ，

则 $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{25 - 16} = 3(\text{cm})$,

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $BO = \sqrt{AB^2 + AO^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}(\text{cm})$,

$\therefore BC = 2BO = 2\sqrt{13}\text{cm}$,

故选: D

3. 化简 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ 的结果等于 ()

A. $\vec{0}$

B. $\overrightarrow{DC}$

C. $\overrightarrow{BD}$

D. $\overrightarrow{CD}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了向量的加减, 解题的关键是掌握向量的加减运算法则.

根据向量的加减运算法则进行计算即可.

【详解】 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$,

$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$,

$= \overrightarrow{CD}$,

故选: D.

4. 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于 O , 下列条件能判断菱形 $ABCD$ 是正方形的是 ()

A. $\angle DAO + \angle ADO = 90^\circ$

B. $\angle DAC = \angle ACD$

C. $\angle DAC = \angle BAC$

D. $\angle DAB = \angle ABC$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了菱形的性质, 正方形的判定, 对角线相等的菱形是正方形, 有一个角是直角的菱形是正方形, 据此结合菱形的性质逐一判断即可.

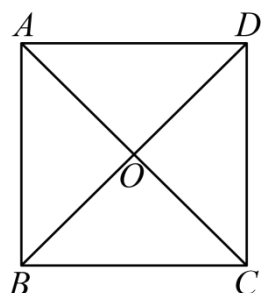
【详解】 解: A、 $\angle DAO + \angle ADO = 90^\circ$, 则 $\angle AOD = 90^\circ$, 此时并不能证明菱形 $ABCD$ 是正方形, 不符合题意;

B、 $\angle DAC = \angle ACD$, 可得 $AD = CD$, 此时并不能证明菱形 $ABCD$ 是正方形, 不符合题意;

C、 $\angle DAC = \angle BAC$, 本身是菱形具有的性质, 此时并不能证明菱形 $ABCD$ 是正方形, 不符合题意;

D、 $\angle DAB = \angle ABC$, 由菱形的性质可得 $AD \parallel BC$, 则 $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$, 则 $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$, 能证明菱形 $ABCD$ 是正方形, 符合题意;

故选：D.



5. 顺次联结一个四边形的四条边的中点得到一个菱形，那么原四边形可能是（ ）

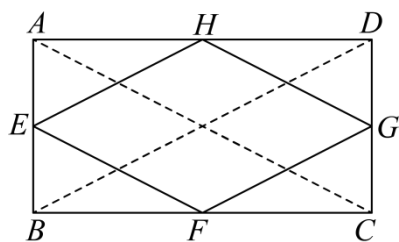
- A. 平行四边形 B. 菱形 C. 矩形 D. 梯形

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形中位线定理，菱形和矩形的性质．根据三角形中位线定理以及菱形的性质，可得原四边形的对角线相等，即可求解．

【详解】解：如图，四边形 $ABCD$ 的四边 AB, BC, CD, AD 中点分别为 E, F, G, H ，且四边形 $EFGH$ 为菱形，连接四边形对角线 AC, BD ，



$\because AB, BC, CD, AD$ 中点分别为 E, F, G, H ，

$\therefore BD = 2EH = 2FG, AC = 2EF = 2HG$ ，

$\because$ 四边形 $EFGH$ 为菱形，

$\therefore AC = BD$ ，

即原四边形的对角线相等，

故符合题意的是矩形．

故选：C

6. 我们把梯形下底与上底的差叫做梯形的底差，梯形的高与中位线的比值叫做梯形的纵横比．如果一个腰长为 13 的等腰梯形，底差等于 10，面积为 108，那么这个等腰梯形的纵横比等于（ ）

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{12}{5}$

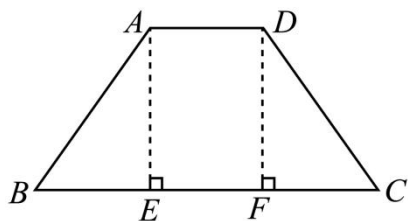
【答案】B

【解析】

【分析】此题考查勾股定理，矩形的判定和性质、梯形中位线定理，正确理解题意确定各线之间的数量及关系是解题的关键.

作 $AE \perp BC$ 于 E , $DF \perp BC$ 于 F , 根据底差等于 10 求出 $BE = CF = 5$, 利用勾股定理求出高的长, 利用梯形面积公式求出 $AD = 4$, 由此得到梯形中位线的长, 即可得到答案.

【详解】解: 如图, 由题意得: 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD = 13$, $BC - AD = 10$,



作 $AE \perp BC$ 于 E , $DF \perp BC$ 于 F , 则 $\angle AEF = \angle DFE = \angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAE = 180^\circ - \angle AEF = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形,

$\therefore AD = EF$, $AE = DF$,

$\therefore AB = CD$,

$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle DCF$ (HL),

$\therefore BE = CF$,

$\therefore BE = CF = \frac{1}{2}(BC - EF) = \frac{1}{2}(BC - AD) = 5$,

$\therefore AE = DF = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$,

$\therefore$ 梯形面积 $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AE = \frac{1}{2} \times (AD + AD + 10) \times 12 = 108$,

$\therefore AD = 4$,

$\therefore BC = 14$,

$\therefore$ 梯形的中位线 $\frac{AD + BC}{2} = \frac{4 + 14}{2} = 9$,

$\therefore$ 这个等腰梯形的纵横比 $= \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$,

故选: B.

二、填空题: (每题 2 分, 共 24 分)

7. 直线 $y = x - 2$ 在 y 轴上的截距是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 求出直线与 y 轴交点坐标，纵坐标即为在 y 轴上的截距.

【详解】 解： $x=0$ 时， $y=-2$ ，直线与 y 轴交于点 $(0,-2)$ ，故在 y 轴上的截距为 -2 ；

故答案为： -2

【点睛】 本题考查截距的定义，确定直线与坐标轴交点坐标；运用方程确定直线与坐标轴交点坐标是解题的关键.

8. 在一次函数 $y=(a+3)x-a-1$ 中， y 随 x 的增大而增大， a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > -3$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质，熟练掌握一次函数的增减性是解题关键. 根据一次函数的增减性可得 $a+3>0$ ，由此即可得.

【详解】 解： $\because$ 在一次函数 $y=(a+3)x-a-1$ 中， y 随 x 的增大而增大，

$\therefore a+3>0$ ，

解得 $a>-3$ ，

故答案为： $a>-3$.

9. 一个多边形的每一个外角都等于 45° ，则这个多边形的内角和为_____.

【答案】 1080° ## 1080 度

【解析】

【分析】 本题考查了正多边形的内角和与外角和，熟练掌握多边形的内角和与外角和是解题关键. 先根据多边形的外角和等于 360° 可求出这个多边形的边数，再根据多边形的内角和公式计算即可得.

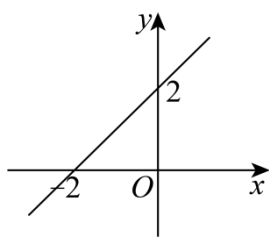
【详解】 解： $\because$ 一个多边形的每一个外角都等于 45° ，

$\therefore$ 这个多边形的边数为 $360^\circ \div 45^\circ = 8$ ，

$\therefore$ 这个多边形的内角和为 $180^\circ \times (8-2) = 1080^\circ$ ，

故答案为： 1080° .

10. 一次函数 $y=kx+b$ 的图象如图所示，那么不等式 $kx+b<0$ 的解集为_____.



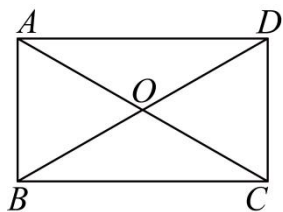
【答案】 $x < -2$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与一元一次不等式，熟练掌握函数图象法是解题关键. 不等式 $kx + b < 0$ 表示的是一次函数 $y = kx + b$ 的图象位于 x 轴的下方，结合函数图象求解即可得.

【详解】 解：不等式 $kx + b < 0$ 表示的是一次函数 $y = kx + b$ 的图象位于 x 轴的下方，结合函数图象可知，不等式 $kx + b < 0$ 的解集为 $x < -2$ ，故答案为： $x < -2$.

11. 如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于 O ，那么图中 $\overrightarrow{AO}$ 的相反向量是_____.



【答案】 $\overrightarrow{CO}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平面向量，矩形的性质，根据矩形的性质推知 $AO = OC$ 即可，熟练掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解：在矩形 $ABCD$ 中， $AO = OC$. 则图中与 $\overrightarrow{AO}$ 相反向量是 $\overrightarrow{CO}$. 故答案为： $\overrightarrow{CO}$.

12. 某城市出租汽车收费标准为：3 千米以内 (含 3 千米) 收 14 元，超出 3 千米的部分，每千米收费 1.6 元. 那么车费 y 元与行驶路程 x ($x > 3$) 千米之间的函数关系式为_____.

【答案】 $y = 1.6x + 9.2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求函数解析式，熟练掌握函数的概念并找出相应的等量关系是解题的关键. 由题意可直接列出车费 y 与行驶路程 x 千米之间的函数关系式，化简即可.

【详解】解：由题意可知，当行驶路程 $x(x > 3)$ 千米时，车费 y 与行驶路程 x 千米之间的函数关系式为：

$$y = 14 + 1.6(x - 3) = 1.6x + 9.2,$$

故答案为： $y = 1.6x + 9.2$.

13. 已知一菱形的两条对角线长分别是方程 $x^2 - 9x + 20 = 0$ 的两根，则菱形的面积是_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质，一元二次方程根与系数的关系，掌握菱形的面积等于两对角线乘积的一半是解题的关键.

设菱形的两条对角线长分别是 a 、 b ，根据一元二次方程根与系数的关系得出 $ab = 20$ ，再根据菱形的面积等于两对角线乘积的一半即可求解.

【详解】解：设菱形的两条对角线长分别是 a 、 b ,

$\because$ 菱形的两条对角线长分别是方程 $x^2 - 9x + 20 = 0$ 的两实根,

$$\therefore ab = 20,$$

$$\therefore \text{菱形的面积} = \frac{1}{2}ab = 10.$$

故答案为： 10.

14. 如果直线 $y = -2x + k$ 与两坐标轴所围成的三角形面积是 4，则 k 的值为_____.

【答案】 $k = \pm 4$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与坐标轴围成图形的面积，掌握一次函数图象与坐标轴的交点的计算，图形面积的计算是关键. 根据一次函数与坐标轴的交点得到当 $x = 0$ 时， $y = k$ ，当 $y = 0$ 时， $x = \frac{k}{2}$ ，结合图形面积的计算即可求解.

【详解】解：直线 $y = -2x + k$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = k$ ，当 $y = 0$ 时， $x = \frac{k}{2}$ ，

直线 $y = -2x + k$ 与两坐标轴所围成的三角形面积是 4，

$$\text{当 } k > 0 \text{ 时， } \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{k}{2} = 4,$$

解得， $k = \pm 4$ ，

$$\therefore k = 4,$$

当 $k < 0$ 时, $\frac{1}{2}(-k) \cdot \left(-\frac{k}{2}\right) = 4$,

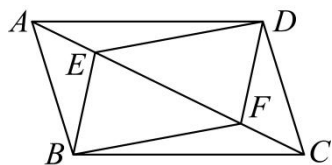
解得, $k = \pm 4$,

$\therefore k = -4$,

综上所述, $k = \pm 4$,

故答案为: $k = \pm 4$.

15. 如图, AC 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线, 点 E 、 F 在 AC 上, 要使四边形 $BFDE$ 是平行四边形, 还需要增加的一个条件是_____ (只要填写一种情况).



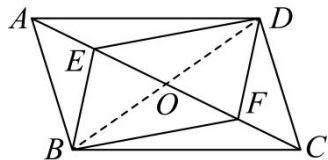
【答案】 $AE = CF$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的判定和性质, 根据两条对角线互相平分的四边形是平行四边形即可解答.

【详解】 解: 还需要增加的一个条件是 $AE = CF$, 理由为:

连接 BD , 交 AC 于 O ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA = OC, OB = OD,$

$\therefore AE = CF,$

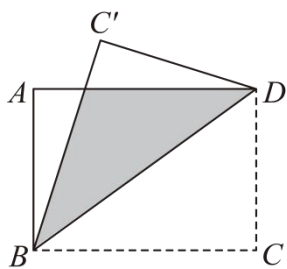
$\therefore OA - AE = OC - CF,$

$\therefore OE = OF,$

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形,

故答案为: $AE = CF$.

16. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $BC = 8$, 如果将该矩形沿对角线 BD 折叠, 那么图中阴影部分的面积是_____.



【答案】 $\frac{75}{4}$

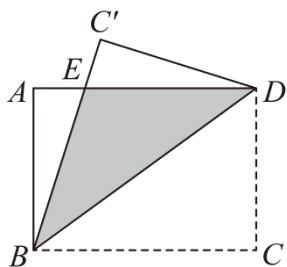
【解析】

【分析】 本题考查了矩形与折叠，勾股定理，等角对等边的运用，掌握矩形的性质是关键.

如图所示，设 BC', AD 交于点 E ，可证 $EB = ED$ ，设 $EB = ED = x$ ，则 $AE = AD - ED = 8 - x$ ，在

$Rt\triangle ABE$ 中，由勾股定理得到 $BE^2 = AE^2 + AB^2$ ，代入计算得到 $ED = \frac{25}{4}$ ，再根据面积的计算即可求解.

【详解】 解：如图所示，设 BC', AD 交于点 E ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB = CD = 6, AD = BC = 8, \angle A = \angle ABC = \angle C = \angle ADC = 90^\circ, AB \parallel CD, AD \parallel BC$ ，

$\because$ 折叠，

$\therefore DC = DC' = 6, \angle C = \angle C' = 90^\circ, \angle CBD = \angle C'BD$ ，，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle DBC$ ，

$\therefore \angle EBD = \angle EDB$ ，

$\therefore EB = ED$ ，

设 $EB = ED = x$ ，则 $AE = AD - ED = 8 - x$ ，

在 $Rt\triangle ABE$ 中， $BE^2 = AE^2 + AB^2$ ，即 $x^2 = (8 - x)^2 + 6^2$ ，

解得， $x = \frac{25}{4}$ ，

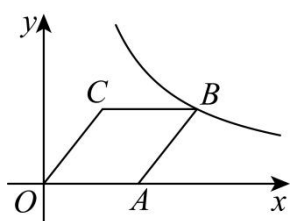
$$\therefore ED = EB = \frac{25}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}ED \cdot AB = \frac{1}{2} \times \frac{25}{4} \times 6 = \frac{75}{4},$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积为 } \frac{75}{4},$$

故答案为: $\frac{75}{4}$.

17. 如图: 菱形 $OABC$ 的顶点 C 坐标为 $(5,12)$, 顶点 A 在 x 轴的正半轴上, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像经过顶点 B , 则 k 的值为_____.



【答案】 216

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的几何应用、菱形的性质等知识, 熟练掌握反比例函数的应用是解题关键. 先根据菱形的性质可得 $BC \parallel OA, BC = OC = 13$, 再求出 $B(18,12)$, 代入反比例函数的解析式即可得.

【详解】解: $\because C(5,12)$,

$$\therefore OC = \sqrt{(5-0)^2 + (12-0)^2} = 13,$$

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是菱形,

$$\therefore BC \parallel OA, BC = OC = 13,$$

又 $\because$ 顶点 A 在 x 轴的正半轴上,

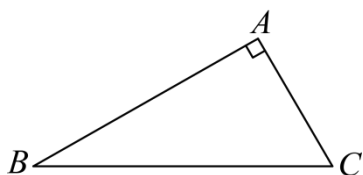
$$\therefore B(5+13,12), \text{ 即 } B(18,12),$$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像经过顶点 B ,

$$\therefore k = 18 \times 12 = 216,$$

故答案为: 216.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 4$, 点 D 在边 BC 上, 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于 D , 交边 AB 于点 E , 将 $\triangle ABC$ 沿直线 DE 翻折, 点 A 、 C 分别与点 F 、 G 对应, 如果四边形 $AFBG$ 是平行四边形, 那么 CG 的长是_____.



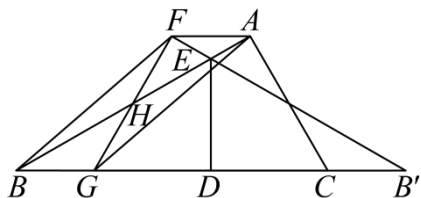
【答案】6

【解析】

【分析】本题考查了含 30° 度角的直角三角形的性质，折叠的性质，平行四边形的性质，掌握以上知识，数形结合分析是关键.

根据题意作图，由含 30° 度角的直角三角形的性质得到 $BC = 8$ ，折叠的性质 $FG = AC = 4$ ，平行四边形的性质 $FH = HG = \frac{1}{2}FG = 2$ ，结合三角形外角的性质得到 $BG = HG = 2$ ，由 $CG = BC - BG = 8 - 2 = 6$ 即可求解.

【详解】解：根据题意作图如下，



$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $AC = 4$ ，

$\therefore BC = 2AC = 8$ ， $\angle ACB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB' = 120^\circ$ ，

$\because$ 折叠，

$\therefore AC = FG = 4$ ， $\angle FGB' = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle FGB = 120^\circ$ ，

$\because$ 四边形 $AFBG$ 是平行四边形，

$\therefore AB, FG$ 相互平分，交于点 H ，

$\therefore FH = HG = \frac{1}{2}FG = 2$ ，

在 $\triangle BGH$ 中， $\angle GBH = 30^\circ$ ， $\angle HGB = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle GHB = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$ ，

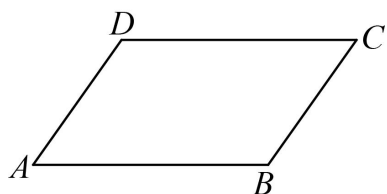
$\therefore BG = HG = 2$ ，

$\therefore CG = BC - BG = 8 - 2 = 6$ ，

故答案为：6.

三、简答题 (第 19、20、21 每题 6 分, 第 22、23 每题 7 分, 共 32 分)

19. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中.



- (1) 作 $\angle BAD$ 的平分线 AE 交 DC 于 E ; (尺规作图, 不写作法, 保留作图痕迹, 并标明字母).
(2) 按 (1) 作图所示, 若 $BC = 7$, $AB = 11$, 求 CE 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 4

【解析】

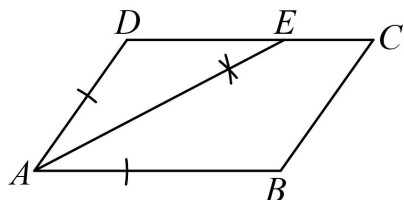
【分析】本题主要考查了平行四边形的性质, 等角对等角, 角平分线的尺规作图:

(1) 根据角平分线的尺规作图方法作图即可;

(2) 先由角平分线的定义得到 $\angle DAE = \angle BAE$, 再由平行四边形的性质得到 $AB \parallel CD$, $CD = AB = 11$, $AD = BC = 7$, 证明 $\angle DAE = \angle AED$, 得到 $AD = DE$, 则 $CE = CD - DE = 4$.

【小问 1 详解】

解: 线段 AE 即为所求;



【小问 2 详解】

解: $\because AE$ 平分 $\angle DAB$,

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD, CD = AB = 11, AD = BC = 7,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle BAE,$$

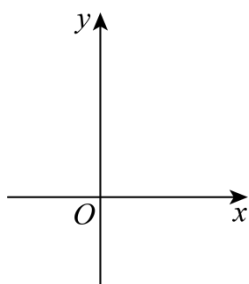
$$\therefore \angle DAE = \angle AED,$$

$$\therefore AD = DE,$$

$$\therefore CE = CD - DE = 4,$$

$\therefore CE$ 的长是 4.

20. 已知, 直线 $l: y = kx + b$ 与直线 $y = 2x$ 平行, 且经过点 $A(1, 3)$, 直线 l 交 y 轴于 B 点.



(1) 求直线 l 的表达式.

(2) y 轴上一点 C , 若 ABC 为等腰三角形, 求点 C 的坐标.

【答案】 (1) $y = 2x + 1$

(2) $(0, 1 + \sqrt{5})$ 或 $(0, 1 - \sqrt{5})$ 或 $(0, \frac{9}{4})$ 或 $(0, 5)$

【解析】

【分析】 本题考查求一次函数的解析式, 等腰三角形的定义, 掌握待定系数法是解题的关键.

(1) 利用待定系数法求一次函数的解析式即可;

(2) 分为 $CB = AB$, $AC = AB$ 或 $AC = CB$ 三种情况, 利用等腰三角形的性质和两点间距离公式解答即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $l: y = kx + b$ 与直线 $y = 2x$ 平行,

$\therefore k = 2$,

把 $A(1, 3)$ 代入 $l: y = 2x + b$ 得 $2 + b = 3$,

解得 $b = 1$,

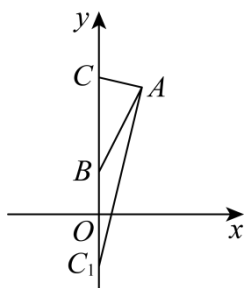
$\therefore$ 直线 l 的解析式为 $y = 2x + 1$;

【小问 2 详解】

解: 当 $x = 0$ 时, $y = 1$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 1)$, $AB = \sqrt{1^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$,

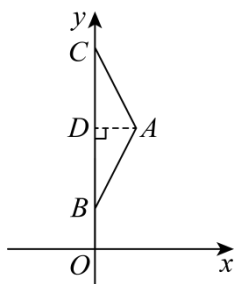
当 $CB = AB = \sqrt{5}$ 时,



$$\therefore OC = 1 \pm \sqrt{5},$$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 1 + \sqrt{5})$ 或 $(0, 1 - \sqrt{5})$;

当 $AC = AB$ 时, 过点 A 作 $AD \perp y$ 轴于点 D ,



$$\therefore BD = CD = 2,$$

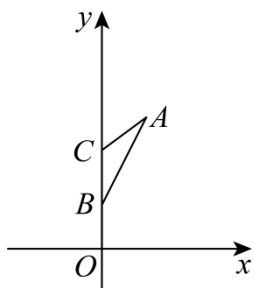
$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 5)$;

当 $AC = CB$ 时, 设点 C 的坐标为 $(0, c)$,

$$\text{则 } \sqrt{1^2 + (3 - c)^2} = c - 1,$$

$$\text{解得 } c = \frac{9}{4},$$

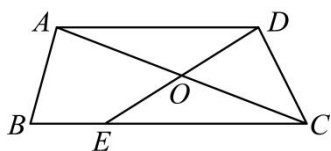
$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, \frac{9}{4})$;



综上所述, 点 C 的坐标 $(0, 1 + \sqrt{5})$ 或 $(0, 1 - \sqrt{5})$ 或 $(0, \frac{9}{4})$ 或 $(0, 5)$.

21. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 O 是对角线 AC 的中点, DO 的延长线与 BC 相交于点 E ,

设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{c}$.



(1) 试用向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 表示下列向量: $\overrightarrow{DE} =$ _____; $\overrightarrow{CD} =$ _____;

(2) 求作: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OC}$. (保留作图痕迹, 写出结果, 不要求写作法)

【答案】(1) $-\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$, $-\vec{c} - \vec{a}$ (2) 作图见详解

【解析】

【分析】本题主要考查向量的和差, 平行四边形的判定和性质, 掌握向量的计算是关键.

(1) 根据向量和差计算, 结合题意得到四边形 $ADCE$ 是平行四边形, 由向量和差计算即可;

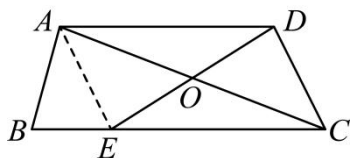
(2) 根据平行四边形的性质, 向量的和差计算即可.

【小问 1 详解】

解: 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{c}$, 则 $\overrightarrow{DA} = -\vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = -\vec{b} + \vec{a} + \vec{c},$$

如图所示, 连接 AE ,



$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAO = \angle ECO,$$

$\because$ 点 O 是对角线 AC 的中点,

$$\therefore OA = OC, \text{ 且 } \angle AOD = \angle COE,$$

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COE (ASA),$$

$$\therefore AD = CE,$$

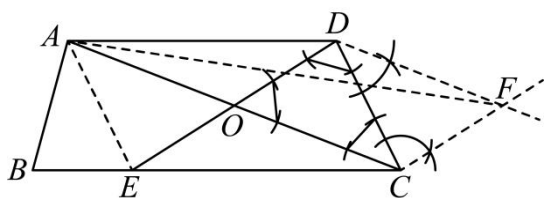
$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形,

$$\therefore CD = AE,$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} = -\vec{c} + (-\vec{a}) = -\vec{c} - \vec{a};$$

【小问 2 详解】

解: 如图所示,



根据尺规作平行线分别作 DO, CO 的平行线，交于点 F ，即 $CF \parallel OD, DF \parallel OC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ODFC$ 是平行四边形，

$\therefore OC = DF$ ，

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF}$ 。

22. “双十一”甲、乙两家商店为招揽顾客推出优惠活动；甲商店所购商品全按原价打八折；乙商店所购商品接原价每满 200 元减 50 元。设顾客在甲、乙两家商店购买商品原价都为 x 元，

(1) 请直接写出当 $200 \leq x < 400$ 时，顾客在乙商店实际付款金额 $y_{\text{乙}}$ 元与原价 x 元之间函数关系式为_____。

(2) 若顾客购买原价在 350 元以下的商品时，如果分别选择甲、乙两家商店的优惠活动后，实际付款金额相等，求 x 的值。

(3) 若顾客购买原价在 600 元以下的商品时，如果选择乙商店的优惠活动比选择甲商店的优惠活动更合算，求 x 的取值范围。

【答案】 (1) $y = x - 50 (200 \leq x < 400)$

(2) $x = 250$

(3) 当 $200 \leq x < 250$ 时，或当 $400 \leq x < 500$ 时，选择乙商店的优惠活动比选择甲商店的优惠活动更合算

【解析】

【分析】 本题主要考查不等式，函数关系的运用，理解数量关系正确列式求解是关键。

(1) 根据乙家优惠活动计算即可；

(2) 根据题意，分别得到甲家付款金额，乙家付款金额，由此列式求解即可；

(3) 根据两家的优惠方法，分类讨论即可求解。

【小问 1 详解】

解：乙商店所购商品接原价每满 200 元减 50 元，购买商品原价为 x 元， $200 \leq x < 400$ ，

$\therefore y = x - 50$ ；

【小问 2 详解】

解：顾客购买原价在 350 元以下的商品，

$\therefore$ 在甲家付款金额为 $0.8x$ 元，在乙家付款金额为 $(x - 50)$ 元，

$$\therefore 0.8x = x - 50,$$

解得, $x = 250$,

$\therefore$ 顾客购买原价为 250 元;

【小问 3 详解】

解: 顾客购买原价在 600 元以下的商品,

$\therefore$ 在甲家付款金额为 $0.8x$ 元,

当 $0 < x < 200$ 时, 在乙家付款金额为 x 元,

当 $200 \leq x < 400$ 时, 在乙家付款金额为 $(x - 50)$ 元,

当 $400 \leq x < 600$ 时, 在乙家付款金额为 $(x - 100)$ 元,

① $\because x > 0.8x$, 即在乙家付款大于甲家付款,

$\therefore 0 < x < 200$, 不符合题意;

② 当 $200 \leq x < 400$ 时, $x - 50 < 0.8x$,

解得, $x < 250$,

$\therefore 200 \leq x < 250$;

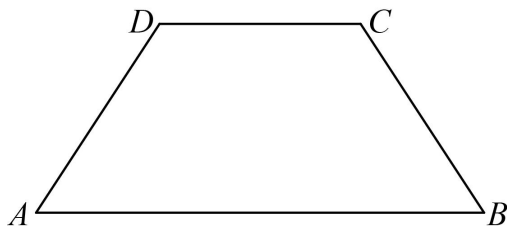
③ 当 $400 \leq x < 600$ 时, $x - 100 < 0.8x$,

解得, $x < 500$,

$\therefore 400 \leq x < 500$;

综上所述, 当 $200 \leq x < 250$ 时, 或当 $400 \leq x < 500$ 时, 选择乙商店的优惠活动比选择甲商店的优惠活动更合算.

23. 如图, 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle D = 2\angle B$, $AD = 12$, $CD = 8$.



(1) 如果 $\angle A = 60^\circ$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形;

(2) 求 AB 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 20

【解析】

【分析】(1) 证明梯形的两个底角相等即可得到结论;

(2) 作 $DE \perp AB$ 于点 E , $CF \perp AB$ 于点 F , 进一步利用轴对称图形的性质与矩形的判定与性质,

勾股定理的应用可得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ,$$

$$\because \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle D = 120^\circ,$$

$$\because \angle D = 2\angle B,$$

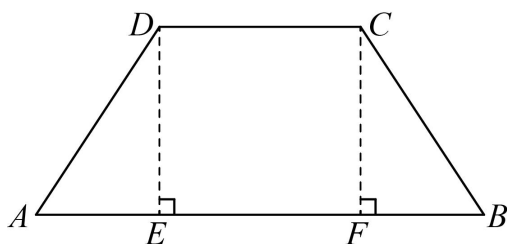
$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle B,$$

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形.

【小问 2 详解】

解: 作 $DE \perp AB$ 于点 E , $CF \perp AB$ 于点 F ,



$\because$ 梯形 $ABCD$ 为等腰梯形,

$\therefore AE = BF$, 四边形 $BEFC$ 是矩形;

$$\therefore CD = EF = 8,$$

在 $\triangle AED$ 中, $\angle AED = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AD = 12$,

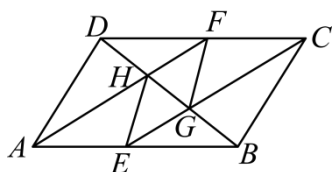
$$\therefore \angle ADE = 30^\circ, \quad AE = BF = 6,$$

$$\therefore AB = AE + EF + BF = 20.$$

【点睛】 本题考查的是等腰梯形的判定, 轴对称图形的性质, 矩形的判定与性质, 含 30° 度角的直角三角形的性质, 掌握等腰梯形的性质与判定是解本题的关键.

四、解答题 (24 题 8 分, 25 题 9 分, 26 题 9 分, 共 26 分)

24. 如图, 已知在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E , F 分别是 AB , CD 的中点, CE , AF 与对角线 BD 分别相交于点 G , H , 连接 EH 、 FG .



- (1) 求证：四边形 $EGFH$ 是平行四边形；
- (2) 如果 $AD \perp BD$ ，求证：四边形 $EGFH$ 是菱形.

【答案】(1) 证明见解析；

(2) 证明见解析.

【解析】

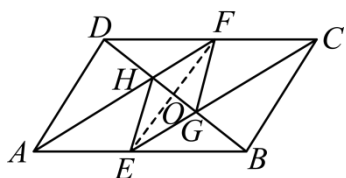
【分析】(1) 连接 EF ，交 BD 于点 O ，根据对角线互相平分的四边形是平行四边形即可证明四边形 $EGFH$ 是平行四边形；

(2) 根据对角线互相垂直的平行四边形是菱形即可求证.

本题主要考查了平行线分线段成比例定理，以及平行四边形和菱形的判定，正确理解定理是解决本题的关键.

【小问 1 详解】

证明：连接 EF ，交 BD 于点 O ，如图：



$\because AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ，点 E ， F 分别是 AB ， CD 的中点，

$$\therefore \frac{FO}{EO} = \frac{OD}{BO} = \frac{DF}{BE} = \frac{\frac{1}{2}CD}{\frac{1}{2}AB} = 1,$$

$$\therefore FO = EO, DO = BO,$$

$$\therefore DH = GB,$$

$$\therefore OH = OG,$$

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是平行四边形.

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 知，四边形 $EGFH$ 是平行四边形，

$\therefore$ 点 E ， O 分别是 AB ， BD 的中点，

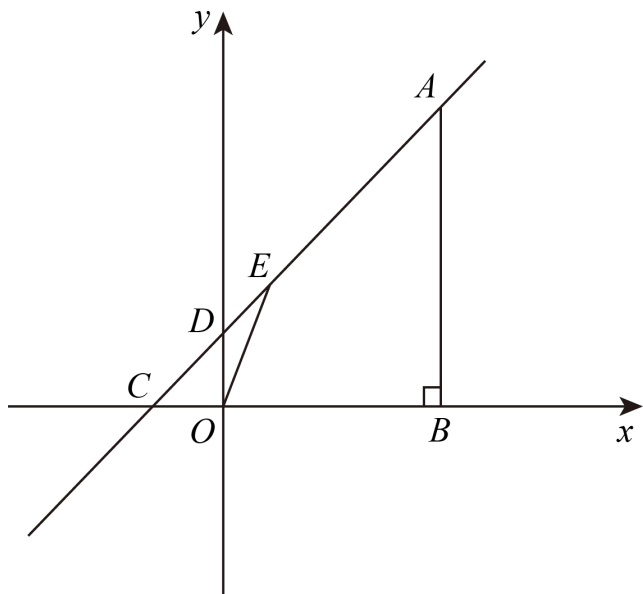
$$\therefore OE \parallel AD,$$

$$\therefore AD \perp BD,$$

$$\therefore EF \perp GH,$$

$\therefore$ 平行四边形 $HEGF$ 是菱形.

25. 如图, 点 A 的坐标为 $(6,8)$, 点 B 、 C 在 x 轴上, 且 $AB \perp x$ 轴, $AB = BC$, 直线 AC 与 y 轴交于点 D , E 是直线 AC 上的一个动点.



- (1) 求直线 AC 的表达式;
- (2) 当点 E 在线段 AD 上, 联结 OE , 如果 $\triangle ODE$ 的面积是 $\triangle OCD$ 面积的一半, 求点 E 的坐标;
- (3) 设点 F 是平面内一点, 如果以 A 、 E 、 B 、 F 为顶点的四边形为正方形, 试求出点 F 的坐标.

【答案】(1) $y = x + 2$

(2) $(1,3)$

(3) $(10,4)$ 或 $(-2,8)$

【解析】

【分析】(1) 求出点 C 的坐标, 由待定系数法求出直线 AC 的表达式即可;

(2) 求出点 D 的坐标是 $(0,2)$, 得到 $OD = 2$, 设点 E 的坐标是 $(t, t+2)$, 由 $\triangle ODE$ 的面积是 $\triangle OCD$ 面积的一半列出关于 t 的方程, 求出 t 的值, 即可得点 E 的坐标;

(3) 根据点 E 的位置, 利用正方形的性质分两种情况求出点 F 的坐标即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 A 的坐标为 $(6,8)$, 且 $AB \perp x$ 轴,

$\therefore AB = 8$, $\angle ABC = 90^\circ$, $OB = 6$,

$\because AB = BC$,

$\therefore AB = BC = 8$,

$$\therefore OC = BC - OB = 8 - 6 = 2,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标是 } (-2, 0),$$

设直线 AC 的表达式为 $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} -2k + b = 0 \\ 6k + b = 8 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的表达式为 } y = x + 2;$$

【小问 2 详解】

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = x + 2 = 2,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标是 } (0, 2),$$

$$\therefore OD = 2,$$

$\because$ 点 E 在线段 AD 上,

$$\therefore \text{可设点 } E \text{ 的坐标是 } (t, t + 2),$$

$\because \triangle ODE$ 的面积是 $\triangle OCD$ 面积的一半,

$$\therefore \frac{1}{2} OD \cdot t = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} OD \cdot OC,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2t = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2,$$

$$\text{解得 } t = 1,$$

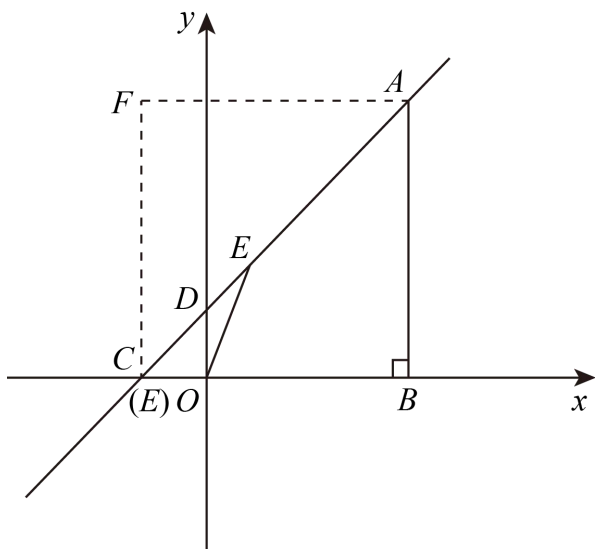
$$\therefore t + 2 = 1 + 2 = 3,$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标是 } (1, 3);$$

【小问 3 详解】

$\because E$ 是直线 AC 上的一个动点. ABC 是等腰直角三角形,

$\therefore$ 当点 E 与点 C 重合时, 四边形 $ABEF$ 是正方形,



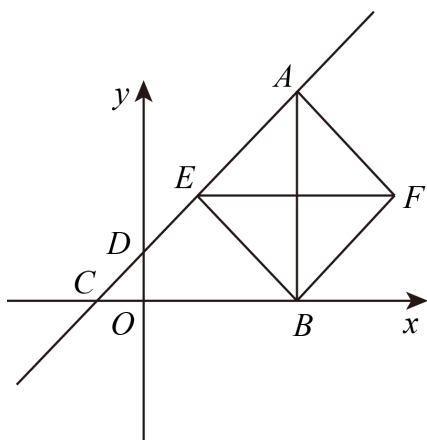
此时 $BE = AB = 8$,

$\therefore EF = AF = AB = 8$, $AF \parallel BE$,

$\therefore$ 点 F 的坐标是 $(-2, 8)$,

当点 E 为线段 AC 的中点时, $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形,

此时点 E 的坐标为 $(2, 4)$, 四边形 $AEBF$ 是正方形, 则有 EF 与 AB 互相垂直平分且相等,



$\therefore EF = AB = 8$, $EF \perp AB$,

$\therefore EF \parallel x$ 轴,

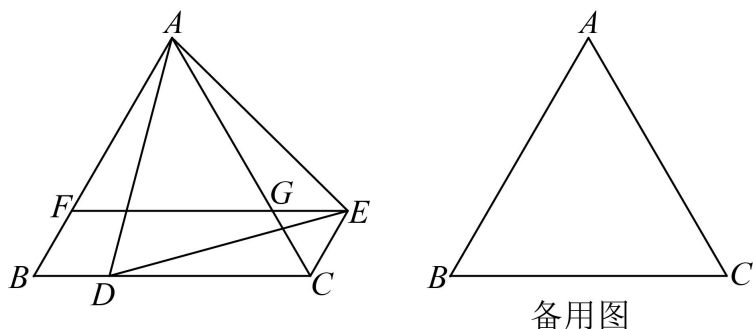
$\therefore$ 点 F 的坐标是 $(10, 4)$,

$\therefore$ 点 F 的坐标是 $(10, 4)$ 或 $(-2, 8)$.

【点睛】 此题是一次函数和几何综合题, 考查了一次函数的图象和性质、正方形的性质、待定系数法求一次函数解析式、等腰直角三角形的判定和性质等知识, 数形结合是解题的关键.

26. 已知等边 ABC 中, $AB = 6$, 点 D 为射线 BC 上一动点, 以 AD 为边作等边 ADE , 且点 E 与点 D

在直线 AB 的同侧，过点 E 作 $EF \parallel BC$ ， EF 与直线 AB 、 AC 分别相交于点 F 、 G 。



(1) 若 D 在边 BC 上时

①求证：四边形 $BCEF$ 是平行四边形；

②设 $BD = x$ ， $FG = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，(不需要写出函数定义域)；

(2) 当 $DC = 4$ 时，求 $\triangle AFG$ 的面积。

【答案】(1) ①见解析：② $y = 6 - x$

(2) $S_{\triangle AFG} = 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) ①由等边三角形性质，得 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle DAE = 60^\circ$ ， $\therefore$ 得 $\angle BAD = \angle CAE$ ，得 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS)，得 $\angle ABD = \angle ACE = 60^\circ$ ，可得 $\angle ABC + \angle BCE = 180^\circ$ ，得 $BF \parallel CE$ ，可得四边形 $BCEF$ 是平行四边形；②由等边三角形定义得 $BC = AB = 6$ ，由平行四边形性质得 $EF = BC = 6$ ， $\angle CEF = \angle B = 60^\circ$ ，可得 $\triangle CEG$ 是等边三角形，得 $CE = EG$ ，由 $BD = CE$ ，得 $EG = BD = x$ ，由 $FG = y$ ，即得 $y = 6 - x$ ；

(2) 当点 D 在边 BC 上时，过点 A 作 $AH \perp FG$ 于点 H ，则 $\angle AHF = 90^\circ$ ，证明 $FG = CD = 4$ ， $\angle AFG = \angle B = 60^\circ$ ， $\angle AGF = \angle ACB = 60^\circ$ ，结合 $\angle FAG = 60^\circ$ ，得 $\triangle AFG$ 是等边三角形，求出 $AH = 2\sqrt{3}$ ，得 $S_{\triangle AFG} = 4\sqrt{3}$ ；当点 D 在 BC 延长线上时，过点 A 作 $AM \perp FG$ 于点 M ，则 $\angle AMF = 90^\circ$ ，证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS)，得 $BD = CE$ ， $\angle ABD = \angle ACE = 60^\circ$ ，可得 $\angle ABC + \angle BCE = 180^\circ$ ，得 $BF \parallel CE$ ，可得 四边形 $BCEF$ 是平行四边形，得 $EF = BC = 6$ ， $\angle CEF = \angle B = 60^\circ$ ，可得 $\triangle CEG$ 是等边三角形，得 $CE = EG$ ，得 $EG = BD$ ，得 $FG = CD = 4$ ，证明 $\triangle AFG$ 是等边三角形，求出 $AM = 2\sqrt{3}$ ，得 $S_{\triangle AFG} = 4\sqrt{3}$ 。

【小问 1 详解】

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，

$$\therefore AB = AC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CAD = \angle CAE + \angle CAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ACB + \angle ACE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BCE = 180^\circ,$$

$$\therefore BF \parallel CE,$$

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是平行四边形;

$$\textcircled{2} \because \text{等边 } \triangle ABC \text{ 中, } AB = 6,$$

$$\therefore BC = AB = 6,$$

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是平行四边形,

$$\therefore EF = BC = 6, \angle CEF = \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CGE = \angle BCG = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle CEG$ 是等边三角形,

$$\therefore CE = EG,$$

$$\therefore BD = CE,$$

$$\therefore EG = BD = x,$$

$$\therefore FG = EF - EG, FG = y,$$

$$\therefore y = 6 - x;$$

【小问 2 详解】

解: 当点 D 在边 BC 上时, 过点 A 作 $AH \perp FG$ 于点 H ,

则 $\angle AHF = 90^\circ$,

由 (1) 知, $EF = BC$, $EG = BD$,

$$\therefore FG = CD = 4,$$

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle B = 60^\circ, \angle AGF = \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FAG = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AFG$ 是等边三角形,

$$\therefore AF = FG = 4, \quad FH = \frac{1}{2}FG = 2,$$

$$\therefore AH = \sqrt{AF^2 - FH^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle AFG} = \frac{1}{2}FG \cdot AH = 4\sqrt{3};$$

当点 D 在 BC 延长线上时, 过点 A 作 $AM \perp FG$ 于点 M ,

则 $\angle AMF = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形,

$$\therefore AB = AC, \quad AD = AE, \quad \angle BAC = \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BD = CE, \quad \angle ABD = \angle ACE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ACB + \angle ACE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BCE = 180^\circ,$$

$$\therefore BF \parallel CE,$$

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是平行四边形,

$$EF = BC = 6, \quad \angle CEF = \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle G = \angle BCG = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle CEG$ 是等边三角形,

$$\therefore CE = EG,$$

$$\therefore EG = BD,$$

$$\therefore FG = CD = 4,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle B = 60^\circ, \quad \angle FAG = \angle BAC = 60^\circ,$$

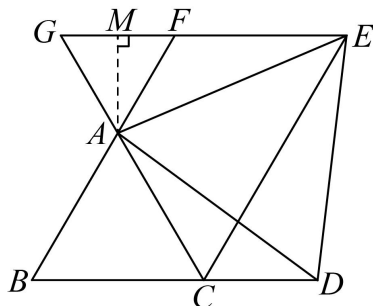
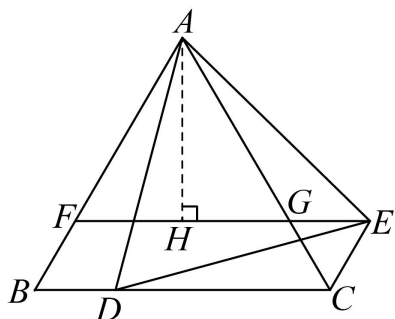
$\therefore \triangle AFG$ 是等边三角形,

$$\therefore AF = FG = 4, \quad FM = \frac{1}{2}FG = 2,$$

$$\therefore AM = \sqrt{AF^2 - FM^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle AFG} = \frac{1}{2}FG \cdot AM = 4\sqrt{3}.$$

综上, $S_{\triangle AFG} = 4\sqrt{3}$.



【点睛】此题考查了等边三角形的，熟练掌握全等三角形的判定与性质，等边三角形的性质，平行四边形的判定与性质，一次函数与线段综合，勾股定理，分类讨论，是解本题的关键．