

青浦区实验中学 2024 学年第二学期期中考试

八年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟 满分 100 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列方程中, 属于无理方程的是 ()

- A. $\sqrt{2} + x = 0$ B. $2 - \sqrt{x-1} = 0$ C. $x^2 + \sqrt{2}x = 0$ D. $\frac{x}{x-\sqrt{2}} = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查无理方程的定义, 关键在于分析看看哪一项符合无理方程的定义. 根据无理方程的定义进行解答, 根号内含有未知数的方程为无理方程.

【详解】解: A 项的根号内没有未知数, 所以不是无理方程, 故本选项错误,

B 项的根号内含有未知数, 所以是无理方程, 故本选项正确,

C 项的根号内没有未知数, 所以不是无理方程, 故本选项错误,

D 项的根号内不含有未知数, 所以不是无理方程, 故本选项错误,

故选: B.

2. 下列图形中, 一定是轴对称图形的是 ()

- A. 三角形 B. 平行四边形 C. 菱形 D. 梯形

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形的性质, 逐项分析判断即可求解.

【详解】解: A. 等腰三角形或等边三角形是轴对称图形, 故该选项不正确, 不符合题意;

B. 平行四边形, 不是轴对称图形, 故该选项不正确, 不符合题意;

C. 菱形是轴对称图形, 故该选项正确, 符合题意;

D. 等腰梯形是轴对称图形, 故该选项不正确, 不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查了轴对称图形的定义, 熟练掌握轴对称图形是解题的关键, 如果一个平面图形沿一条直线折叠, 直线两旁的部分能够互相重合, 这个图形就叫做轴对称图形.

3. 用换元法解分式方程 $\frac{5x}{x^2+1} - \frac{x^2+1}{x} + 1 = 0$, 如果设 $\frac{x}{x^2+1} = y$, 那么原方程可以化为 ()

- A. $y^2 + y - 5 = 0$ B. $y^2 - 5y + 1 = 0$ C. $5y^2 + y + 1 = 0$ D. $5y^2 + y - 1 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】直接把 $\frac{x}{x^2+1}$ 换成 y , 整理即可.

【详解】解: 设 $\frac{x}{x^2+1} = y$, 则原方程化为 $5y - \frac{1}{y} + 1 = 0$,

去分母得, $5y^2 + y - 1 = 0$,

故选: D.

【点睛】本题考查的是换元法解分式方程, 换元的实质是转化, 关键是构造元和设元, 理论依据是等量代换, 目的是变换研究对象, 将问题移至新对象的知识背景中去研究, 从而使非标准型问题标准化、复杂问题简单化, 变得容易处理.

4. 下列方程有实数根的是 ()

- A. $\frac{x}{x-3} = \frac{3}{x-3}$ B. $\sqrt{4x+1} + 1 = 0$
C. $\sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} = 1$ D. $\sqrt{2x-5} \cdot \sqrt{x-2} = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了解分式方程、算术平方根的非负性、二次根式有意义的条件等知识点, 掌握算术平方根的非负性成为解题的关键.

根据解分式方程、算术平方根的非负性逐项判断即可.

- 【详解】解: A. 去分母得 $x = 3$, 又当 $x = 3$ 时, 分母无意义, 故此时原方程无解, 故 A 不合题意;
B. 方程左边是非负数+1, 不可能为 0, 故此时方程无解, 故 B 不合题意;
C. $x - 3 \geq 0$, 且 $3 - x \geq 0$, 故 $x = 3$, 方程左边 $= 0 \neq$ 右边 $= 1$, 故此时方程无解, 不合题意.
D. 由题意可得: $2x - 5 = 0$ 或 $x - 2 = 0$, 又 $2x - 5 \geq 0$, 故 $x = 2.5$, ($x = 2$ 不合题意, 舍去), 故此时方程有实数根 $x = 2.5$.

故选: D.

5. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 那么下列条件中, 不能判断它是等腰梯形的是 ()

- A. $AB = DC$ B. $\angle DAB = \angle ABC$ C. $\angle ABC = \angle DCB$ D. $AC = DB$

【答案】B

【解析】

【分析】等腰梯形的判定定理有：①有两腰相等的梯形是等腰梯形；②对角线相等的梯形是等腰梯形；③在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形，根据以上内容判断即可.

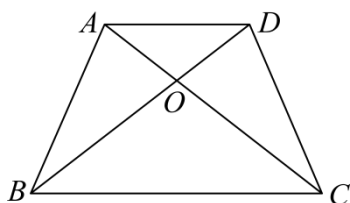
【详解】解：A、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为梯形，且 $AD \parallel BC$ ， $AB = DC$ ， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，故本选项不符合题意；

B、 $\angle DAB = \angle ABC$ ，不能推出四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，故本选项符合题意；

C、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为梯形，且 $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = \angle DCB$ ， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，故本选项不符合题意；

D、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为梯形，且 $AD \parallel BC$ ， $AC = DB$ ， $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，故本选项不符合题意.

故选：B.



【点睛】本题考查了等腰梯形的判定定理，等腰梯形的判定定理有：①有两腰相等的梯形是等腰梯形，②对角线相等的梯形是等腰梯形，③在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形.

6. 小明用四根相同长度的木条制作了一个正方形学具（如图1），测得对角线 $AC = 10\sqrt{2}\text{cm}$ ，将正方形学具变形为菱形（如图2）， $\angle DAB = 60^\circ$ ，则图2中对角线 AC 的长为（ ）

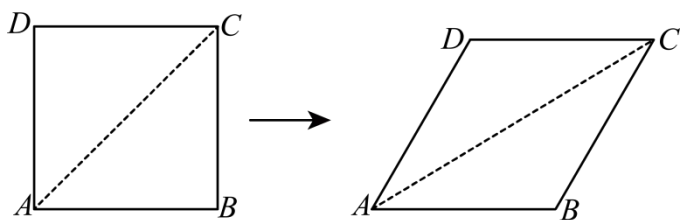


图1

图2

A. 20cm

B. $10\sqrt{6}\text{cm}$

C. $10\sqrt{3}\text{cm}$

D. $10\sqrt{2}\text{cm}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了正方形的性质，菱形的性质，勾股定理，等边三角形性质和判定，解题的关键是熟练掌握并运用相关知识.

根据正方形的性质以及勾股定理可得 $AB = BC = CD = AD = 10\text{cm}$ ，记 AC 交 BD 于点 O ，根据菱形的性

质结合 $\angle DAB = 60^\circ$ 可得 $OB = 5\text{cm}$ ，再利用勾股定理 $OA = OC = \sqrt{AB^2 - OB^2} = 5\sqrt{3}\text{cm}$ 计算，即可解题.

【详解】解：∵ 正方形 $ABCD$ 对角线 $AC = 10\sqrt{2}\text{cm}$ ，

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}AB$$

$$\therefore BC = CD = AD = AB = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = 10\text{cm},$$

又∵ 菱形 $ABCD$ 中 $\angle DAB = 60^\circ$ ，记 AC 交 BD 于点 O ，

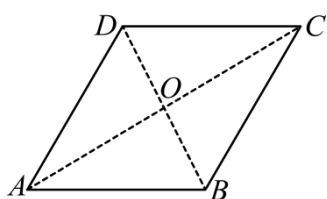


图2

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle DAB = 30^\circ$ ， $AC \perp BD$ 于点 O ， $BO = DO$ ， $OA = OC = \frac{1}{2}AC$ ，且 ABC 为等边三角形，

$$\therefore AD = AB = BD = 10\text{cm},$$

$$\therefore OB = 5\text{cm},$$

$$\therefore OA = OC = \sqrt{AB^2 - OB^2} = 5\sqrt{3}\text{cm},$$

$$\therefore AC = 10\sqrt{3}\text{cm}.$$

故选：C.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分)【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 方程 $x^3 - 27 = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】 本题考查了利用开立方解方程，先移项，再开立方即可.

【详解】解： $x^3 - 27 = 0$ ，

$$x^3 = 27,$$

$$x = \sqrt[3]{27} = 3,$$

故答案为: $x=3$.

8. 关于 x 的方程 $bx=x+1$ ($b \neq 1$) 的根是_____.

【答案】 $\frac{1}{b-1}$

【解析】

【分析】移项, 合并同类项, 系数化为 1, 据此即可求解.

【详解】解: 移项, 得: $bx-x=1$,

即 $(b-1)x=1$,

$\because b \neq 1$ 时,

$\therefore b-1 \neq 0$

$\therefore$ 方程的解为: $x = \frac{1}{b-1}$.

故答案是: $\frac{1}{b-1}$.

【点睛】本题主要考查了解一元一次方程, 去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1, 这仅是解一元一次方程的一般步骤, 针对方程的特点, 灵活应用, 各种步骤都是为使方程逐渐向 $x=a$ 形式转化.

9. 一辆汽车, 新车购买价为 20 万元, 以后每年的年折旧率为 x , 如果该车购买之后的第二年年末折旧后的价值为 14.45 万元, 那么可以列出关于 x 的方程是_____. (列出方程即可, 无需求解)

【答案】 $20(1-x)^2=14.45$

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的应用, 根据“新车购买价为 20 万元, 购买之后的第二年年末折旧后的价值为 14.45 万元”列方程即可.

【详解】解: 设每年的年折旧率为 x ,

根据题意, 得 $20(1-x)^2=14.45$,

故答案为: $20(1-x)^2=14.45$.

10. 一个多边形的内角和是它的外角和的 2 倍, 这个多边形是_____边形.

【答案】 6

【解析】

【分析】本题主要考查多边形内角和定理与外角和定理, 熟练掌握该定理是解题的关键. 利用多边形的外角和为 360° 以及多边形内角和定理即可解决答案.

【详解】解: 设这个多边形边数为 x , 内角和为 $180^\circ(x-2)$,

$\therefore$ 多边形外角和为 360° ,

$$\therefore 180^\circ(x-2) = 2 \times 360^\circ,$$

解得: $x = 6$,

故答案为: 6.

11. 若关于 x 的分式方程 $\frac{2x+a}{x-1} = 1$ 有增根, 则 a 的值是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 分式方程的增根, 去分母, 化分式方程为整式方程 $2x+a=x-1$, 由分式方程产生增根, 可知 $x=1$, 然后把代入 $x=1$ 整式方程即可求得 a 的值.

【详解】 解: 分式方程去分母, 得 $2x+a=x-1$,

$\therefore$ 分式方程 $\frac{2x+a}{x-1} = 1$ 有增根,

$$\therefore x-1=0,$$

$$\therefore x=1,$$

把 $x=1$ 代入 $2x+a=x-1$, 得 $2+a=1-1$,

解得 $a=-2$,

故答案为: -2.

12. 方程 $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x=2$

【解析】

【分析】 本题主要考查无理方程, 解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解, 在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法常用的方法有: 乘方法, 配方法, 因式分解法, 设辅助元素法, 利用比例性质法等.

两边平方得出关于 x 的整式方程, 解之求得 x 的值, 再根据二次根式有意义的条件得出符合方程的 x 的值, 可得答案.

【详解】 解: $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2} = 0$

$$\text{两边平方得 } (x-2)(x-1) = 0$$

$$\text{则 } x-2=0 \text{ 或 } x-1=0$$

解得: $x=2$ 或 $x=1$

$$\text{又} \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$$

解得： $x \geq 2$ ，

$$\therefore x = 2,$$

故答案为： $x = 2$ 。

13. 方程 $\sqrt{2x-1}+1=k$ 无实数根，则 k 的取值范围为_____。

【答案】 $k < 1$

【解析】

【分析】 本题考查了无理方程根的情况，解题的关键是了解二次根式成立的条件。根据无理方程无实数根，若 $\sqrt{x} = b$ ，则 $b < 0$ ，得关于 k 的不等式，解得即可。

【详解】 解： $\because \sqrt{2x-1}+1=k$ ，

$$\therefore \sqrt{2x-1} = k-1,$$

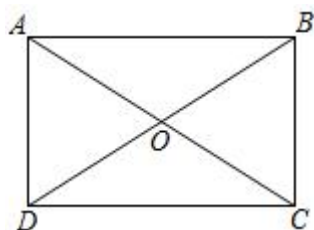
$\because$ 方程 $\sqrt{2x-1}+1=k$ 无实数根，

$$\therefore k-1 < 0,$$

解得： $k < 1$ 。

故答案是： $k < 1$ 。

14. 如图，在四边形 ABCD 中， $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ ，且 $AD \parallel BC$ ；AC 的长为 16，则 DO 的长为_____。



【答案】 8

【解析】

【分析】

由题意可以得到四边形 ABCD 为矩形，再根据矩形和直角三角形的性质求解。

【详解】 解： $\because \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAD + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel DC,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

∴ 四边形 ABCD 为矩形,

∴ O 为 AC 中点,

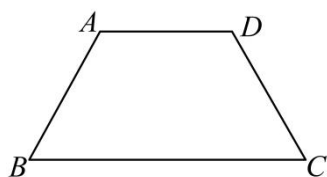
∵ $\angle ADC = 90^\circ$,

$$\therefore OD = \frac{1}{2} AC = 8,$$

故答案为 8.

【点睛】 本题考查矩形与直角三角形的综合应用, 熟练掌握矩形的判定与性质、直角三角形的性质是解题关键.

15. 如图, 在梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $AB = AD = 4$, $\angle B = \angle C = 60^\circ$, 那么边 BC 的长为_____.

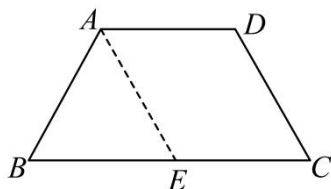


【答案】 8

【解析】

【分析】 过点 A 作 $AE \parallel CD$ 交 BC 于点 E, 可得四边形 ADCE 是平行四边形, $\triangle ABE$ 是等边三角形, 进一步得出 $CE = 4$, $BE = 4$, 从而可求出边 BC 的长.

【详解】 解: 过点 A 作 $AE \parallel CD$ 交 BC 于点 E, 如图,



∵ $AD \parallel CE$,

∴ 四边形 ADCE 是平行四边形,

∴ $CE = AD = 4$;

∵ $AE \parallel CD$,

∴ $\angle AEB = \angle C = 60^\circ$,

∵ $\angle B = 60^\circ$,

∴ $\triangle ABE$ 是等边三角形,

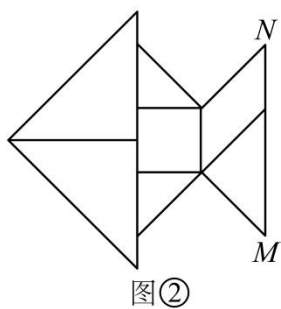
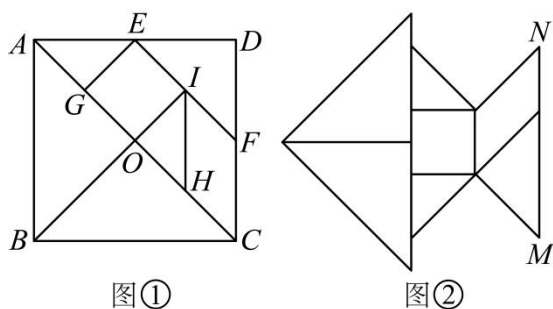
∴ $BE = AB = 4$,

∴ $BC = BE + CE = 4 + 4 = 8$,

故答案为：8.

【点睛】本题主要考查了梯形，正确作出辅助线，构造平行四边形和等边三角形是解答本题的关键.

16. 七巧板是中国民间流传的一种传统智力玩具，它是由等腰直角三角形，正方形和平行四边形组成的. 如图，有一块边长为4的正方形厚纸板 $ABCD$ ，做成如图①所示的一套七巧板（点 O 为正方形纸板对角线的交点，点 E 、 F 分别为 AD 、 CD 的中点， $GE \parallel BI$ ， $IH \parallel CD$ ），将图①示七巧板拼成如图②所示的“鱼形”，则“鱼尾” MN 的长为_____.



【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据正方形的性质，等腰三角形的性质，平行四边形的性质即可求解. 本题考查正方形，等腰三角形，平行四边形的性质，熟悉性质是解题关键.

【详解】解：在等腰直角三角形 ACD 中，

$$AD = CD = 4,$$

$$\therefore AC = 4\sqrt{2},$$

$\because$ 点 E 、 F 分别为 AD 、 CD 的中点，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2},$$

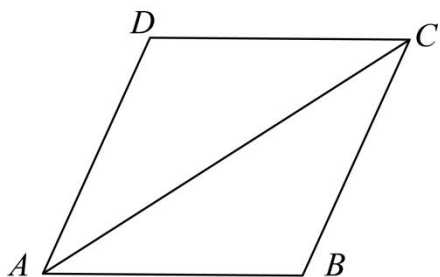
$$\text{又} \because AG = GO = OH = CH,$$

$$\therefore FI = EI = \frac{1}{2}EF = \sqrt{2},$$

$$\therefore MN = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

故答案为： $3\sqrt{2}$.

17. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为2， $\angle DAB = 60^\circ$ ，连接 AC ，将菱形 $ABCD$ 绕点 A 旋转，使点 D 的对应点 E 落在对角线 AC 上，连接 DE ，那么 $\triangle DEC$ 的面积是_____.

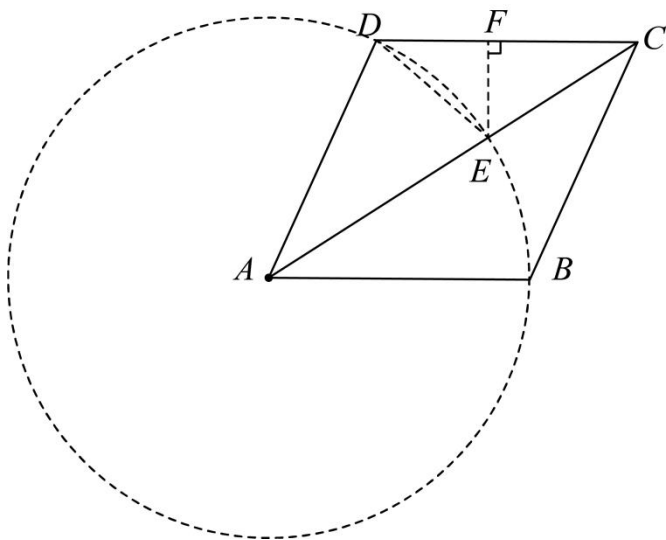


【答案】 $\sqrt{3}-1$

【解析】

【分析】 过点 E 作 $EF \perp CD$ ，根据已知条件得出 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形，设 $DF = EF = x$ ，则 $FC = 2 - x$ ，根据 $FC = \sqrt{3}EF$ ，列出方程，解得 $EF = \sqrt{3} - 1$ 进而根据三角形的面积公式即可求解.

【详解】 解： 如图所示，过点 E 作 $EF \perp CD$



依题意 $AD = AE$ ，

$\because$ 菱形 $ABCD$ 的边长为 2， $\angle DAB = 60^\circ$ ，

$\therefore AB \parallel CD, CD = 2$ ， $\angle ADC = 120^\circ$ ， $\angle DAE = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle AED = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$ ，

$\therefore \angle EDF = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle DEF$ 是等腰直角三角形，

设 $DF = EF = x$ ， 则 $FC = 2 - x$ ，

$\therefore \angle ACD = \angle DAC = 30^\circ$ ，

$\therefore FC = \sqrt{3}EF$ ，

即 $2 - x = \sqrt{3}x$ ，

解得: $x = \sqrt{3} - 1$,

则 $EF = \sqrt{3} - 1$,

$$\therefore S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}DC \times EF = \sqrt{3} - 1,$$

故答案为: $\sqrt{3} - 1$.

【点睛】本题考查了旋转的性质, 菱形的性质, 勾股定理, 含 30° 度角的直角三角形的性质, 三角形内角和定理, 等腰三角形的性质, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

18. 已知矩形 $ABCD$, $AB = 10$, 将 $\triangle ACD$ 沿着直线 AC 翻折, 点 D 落在点 E 处, 如果点 E 到直线 BC 的距离是 6, 那么 AD 的长是_____.

【答案】5 或 20

【解析】

【分析】分为两种情况分别画图计算. ①如图, 当 $AB < AD$ 时, AE 交 BC 于点 F , 过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 于点 H , 则 $EH = 6$, 根据四边形 $ABCD$ 是矩形, 得出 $AB = CD = 10, \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$, 根据折叠的性质得, $\angle AEC = \angle ADC = \angle B = 90^\circ, CE = CD = AB = 10$, 证明 $\triangle ABF \cong \triangle CEF$, 得出

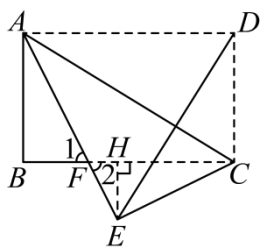
$BF = EF, AF = CF$, 设 $BF = EF = x$, 根据等面积法得出 $CF = \frac{5}{3}x$, 从而得出 $AF = CF = \frac{5}{3}x$, 在 $Rt\triangle ABF$ 中, 根据勾股定理求出 x , 即可求解;

②如图, $AB > AD$ 时, 过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 H , 过点 E 作 $EF \perp AB$ 交 AB 于点 F , 则 $EH = 6$, 根据四边形 $ABCD$ 是矩形, 得出 $AB = CD = 10, \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$, 证出四边形 $EHB F$ 是矩形, 得到 $BH = EF, BF = EH = 6$, $AF = 4$, 根据折叠的性质得,

$\angle AEC = \angle ADC = \angle B = 90^\circ, CE = CD = AB = 10$, $BC = AD$, 在 $Rt\triangle EHC$ 中, 根据勾股定理算出

$CH = 8$, 设 $BC = AD = AE = x$, $EF = BH = 8 - x$, 在 $Rt\triangle AEF$ 中, 根据勾股定理求出 x , 即可求解;

【详解】解: ①如图, 当 $AB < AD$ 时, AE 交 BC 于点 F , 过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 于点 H , 则 $EH = 6$,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB = CD = 10, \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$,

根据折叠的性质得, $\angle AEC = \angle ADC = \angle B = 90^\circ$, $CE = CD = AB = 10$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CEF (AAS),$$

$$\therefore BF = EF, AF = CF,$$

$$\text{设 } BF = EF = x,$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF = \frac{1}{2} CF \cdot EH,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 10 \cdot x = \frac{1}{2} CF \cdot 6,$$

$$\therefore CF = \frac{5}{3}x,$$

$$\therefore AF = CF = \frac{5}{3}x,$$

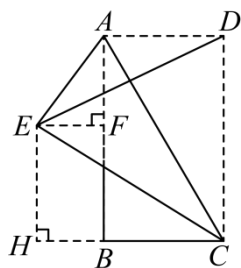
$$\text{在 } Rt\triangle ABF \text{ 中, } AB^2 + BF^2 = AF^2,$$

$$\text{即 } 10^2 + x^2 = \left(\frac{5}{3}x\right)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{30}{4},$$

$$\therefore AD = BC = \frac{5}{3}x + x = \frac{8}{3}x = 20;$$

②如图, $AB > AD$ 时, 过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 H , 过点 E 作 $EF \perp AB$ 交 AB 于点 F , 则 $EH = 6$,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB = CD = 10, \angle ADC = \angle ABC = \angle ABH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EHBF$ 是矩形,

$$\therefore BH = EF, BF = EH = 6,$$

$$\therefore AF = AB - BF = 4,$$

根据折叠的性质得, $\angle AEC = \angle ADC = \angle B = 90^\circ$, $CE = CD = AB = 10$, $BC = AD$,

在 $Rt\triangle EHC$ 中, $CH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$,

设 $BC = AD = AE = x$, $EF = BH = 8 - x$,

在 $Rt\triangle AEF$ 中, $AE^2 = EF^2 + AF^2$,

$$\text{即 } x^2 = (8 - x)^2 + 4^2,$$

解得: $x = 5$,

$$\therefore AD = 5,$$

综上, $AD = 5$ 或 20 ;

故答案为: 5 或 20.

【点睛】此题考查了折叠的性质、矩形的性质、勾股定理、全等三角形的性质和判定、三角形面积等知识点, 熟练掌握折叠的性质, 正确作出图形并分类讨论是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 8 题, 19-20 题每题 5 分, 21-22 题每题 6 分, 23-25 题每题 8 分, 第 26 题 12 分, 满分 58 分)

19. 解方程: $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1$.

【答案】 $x = -4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程和解一元二次方程, 解题的关键是熟练掌握解分式方程和解一元二次方程的方法和步骤.

先去分母, 将分式方程化为整式方程, 再用因式分解法求解, 最后进行检验即可.

【详解】 解: $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)} = 1$,

$$2x^2 - 8 = x^2 - 2x,$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$(x-2)(x+4) = 0,$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -4,$$

检验: 当 $x = 2$ 时, $x(x-2) = 0$; 当 $x = -4$ 时, $x(x-2) \neq 0$;

$\therefore x = -4$ 是原分式方程的解.

20. 解方程: $\sqrt{2x-3} + x = 3$.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，将原方程化成一元二次方程是解答本题的关键.

先移项将原方程进行变形 $\sqrt{2x-3} = 3-x$ ，再等式两边平方得到 $2x-3 = (3-x)^2$ ，然后整理解一元二次方程即可解答.

【详解】 解：由题意可知 $2x-3 > 0$ ，则 $x > \frac{3}{2}$ ，

移项： $\sqrt{2x-3} = 3-x$ ，

两边平方： $2x-3 = (3-x)^2$ ，

整理得： $x^2 - 8x + 12 = 0$ ，解得： $x_1 = 2$ ， $x_2 = 6$.

经检验： $x_1 = 2$ 是原方程的根， $x_2 = 6$ 是增根，舍去.

所以，原方程的根是 $x = 2$.

21. 解方程组：
$$\begin{cases} x^2 - 5xy - 6y^2 = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = 2.4 \\ y_1 = 0.4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组，熟练掌握因式分解法是解题的关键.

根据题意利用因式分解，将原方程组化为 $\begin{cases} x-6y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ ，然后分类讨论即可求解.

【详解】 解：由①得， $x-6y=0$ 或 $x+y=0$

将它们与方程②分别组成方程组，得：

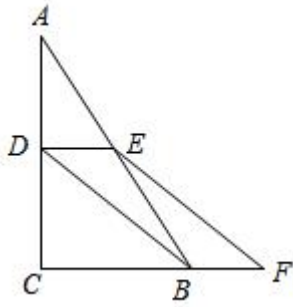
$$\begin{cases} x-6y=0 \\ x-y=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$$

分别解这两个方程组，

得原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 2.4 \\ y_1 = 0.4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}.$$

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D ， E 分别是 AC ， AB 的中点，点 F 是 CB 延长线上的一点，且 $CF = 3BF$ ，连接 DB ， EF . 若 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 12\text{cm}$ ， $DE = 4\text{cm}$ ，



(1) 求证: $DE = BF$;

(2) 求四边形 $DEFB$ 的周长.

【答案】 (1) 见解析 (2) 四边形 $DBFE$ 的周长为 28cm

【解析】

【分析】 (1) 根据三角形中位线定理可得 $DE = \frac{1}{2}BC$, 根据已知条件可得 $BF = \frac{1}{2}BC$ 即可得证 $BF = DE$;

(2) 根据勾股定理求得 BD , 根据 (1) 的结论证明四边形 $DBFE$ 是平行四边形, 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because D, E$ 分别是 AC, AB 的中点,

$$\therefore DE \parallel BC, \quad DE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\text{又 } CF = 3BF$$

$$\text{即 } BF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore BF = DE$$

【小问 2 详解】

$$\because DE = \frac{1}{2}BC, \quad DE = 4$$

$$\therefore BC = 8,$$

$$\because AC = 12, \quad D \text{ 是 } AC \text{ 的中点},$$

$$\therefore DC = 6,$$

$\text{Rt}\triangle BDC$ 中,

$$\therefore BD = \sqrt{DC^2 + BC^2} = 10,$$

$$\text{又 } DE = BF \text{ 且 } DE \parallel BF,$$

$$\therefore \text{四边形 } DBFE \text{ 为平行四边形.}$$

$$\therefore \text{四边形 } DBFE \text{ 的周长为 } (4 + 10) \times 2 = 28(\text{cm}).$$

【点睛】 本题考查了三角形中位线定理，平行四边形的性质与判定，勾股定理，掌握平行四边形的性质与判定以及中位线定理是解题的关键.

23. 松江区于 4 月 22 日，举办“G60”上海佘山半程马拉松比赛. 主办方打算为参赛选手定制一批护膝，并交由 A 厂家完成. 已知 A 厂家要在规定的天数内生产 3600 对护膝，但由于参赛选手临时增加，不但要求 A 厂家在原计划基础上增加 10% 的总量，而且还要比原计划提前 3 天完成. 经预测，要完成新计划，平均每天的生产总量要比原计划多 20 对. 求原计划每天生产多少对护膝.

【答案】 原计划每天生产护膝 100 对

【解析】

【分析】 设原计划每天生产的护膝 x 对，则实际每天护膝 $(x+20)$ 对. 根据等量关系“要求 A 厂家在原计划基础上增加 10% 的总量，而且还要比原计划提前 3 天完成”列分式方程求解即可.

【详解】 解：设原计划每天生产的护膝 x 对，则实际每天护膝 $(x+20)$ 对.

根据题意，可列方程 $\frac{3600}{x} - \frac{3600(1+10\%)}{x+20} = 3$.

两边同时乘以 $x(x+20)$ ，再整理，得 $x^2 + 140x - 24000 = 0$.

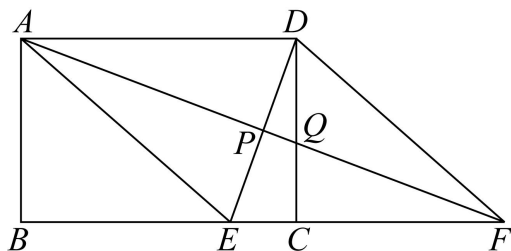
解得 $x_1 = 100$, $x_2 = -240$.

经检验， $x_1 = 100$, $x_2 = -240$ 都是原方程的解，但护膝得对数不能为负数，所以取 $x = 100$.

答：原计划每天生产护膝 100 对.

【点睛】 本题主要考查了分式方程的应用，根据题意列出分式方程和检验是解答本题的关键.

24. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 在边 BC 上，点 F 在边 BC 的延长线上，四边形 $AEFD$ 的对角线 AF 分别交 DE 、 DC 于点 P 、 Q ，且 $PD = PE$ ， DE 平分 $\angle ADF$.



(1) 求证：四边形 $AEFD$ 是菱形；

(2) 如果 $BC = EF$ ， $\angle EDC = \angle EFP$ ，求证：四边形 $ABCD$ 为矩形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle ADP \cong \triangle FEP$ (AAS) 得出 $AD = BC$ ，即可得出四边形 $AEFD$ 是平行四边形，根据角平分线的定义，以及平行线的性质得出 $\angle FDE = \angle FED$ ，进而可得 $FD = FE$ ，即可得证；

(2) 根据 (1) 的结论得出 $AD = EF$ ，结合已知条件得出 $AD = BC$ ，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，根据菱形的性质得出 $\angle EPF = 90^\circ$ ，即 $\angle PEF + \angle EFP = 90^\circ$ ，根据已知 $\angle EDC = \angle EFP$ ，等量代换得出 $\angle PEF + \angle EDC = 90^\circ$ ，即 $\angle BCD = 90^\circ$ ，即可得证.

【小问 1 详解】

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAP = \angle EFP, \angle ADP = \angle FEP$,

又 $PD = PE$,

$\therefore \triangle ADP \cong \triangle FEP$ (AAS),

$\therefore AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形,

$\because DE$ 平分 $\angle ADF$,

$\therefore \angle PDA = \angle PDF$,

又 $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADE = \angle DEF$,

$\therefore \angle FDE = \angle FED$,

$\therefore FD = FE$,

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是菱形;

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $AEFD$ 是菱形;

$\therefore AD = EF$,

$\because EF = BC$,

$\therefore AD = BC$,

又 $AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\because$ 四边形 $AEFD$ 是菱形;

$\therefore AF \perp DE$,

$\therefore \angle EPF = 90^\circ$,

$$\therefore \angle PEF + \angle EFP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle EFP,$$

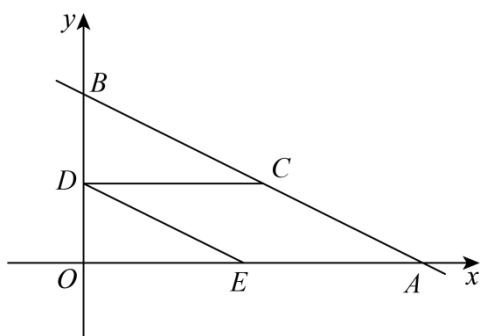
$$\therefore \angle PEF + \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle BCD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

【点睛】 本题考查了菱形的性质与判定，矩形的判定，熟练掌握以上知识是解题的关键.

25. 已知直线 $y = ax + b$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于 $A(6, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 两点，点 C 在线段 AB 上，过点 C 作 $CD \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 D ，再过 D 作 $DE \parallel AB$ ，交 x 轴于点 E ，



(1) 求直线 $y = ax + b$ 的解析式;

(2) 已知点 C 的横坐标为 4，求四边形 $ACDE$ 的面积;

(3) 联结 AD 、 CE ，当点 C 在线段 AB 上移动时，问 AD 与 CE 是否有可能互相垂直？如有可能，试求出点 C 的坐标；如不可能，请简要说明理由.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

(2) 4 (3) 当点 C 的坐标为 $(30 - 12\sqrt{5}, -12 + 6\sqrt{5})$ 时， AD 与 CE 互相垂直

【解析】

【分析】 (1) 将 $A(6, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 代入 $y = ax + b$ ，利用待定系数法即可求解;

(2) 当 $x = 4$ 时， $y = 1$ ，可知点 C 的坐标为 $(4, 1)$ ，由题意可知四边形 $ACDE$ 为平行四边形，且 $CD = 4$ ，再根据平行四边形的面积公式即可求解;

(3) 由题意可知 $OA = 6$ ，设点 C 的坐标为 $(a, -\frac{1}{2}a + 3)$ ，其中 $0 < a < 6$ ，由 (2) 可知四边形 $ACDE$ 为平行四边形，得 $AE = CD = a$ ， $OD = -\frac{1}{2}a + 3$ ， $OE = OA - AE = 6 - a$ ，当 $AE = DE$ 时，四边形 $ACDE$ 为菱形，此时 AD 与 CE 互相垂直，在 $\text{Rt}\triangle DOE$ 中， $OD^2 + OE^2 = DE^2$ ，列出方程求解即可.

【小问 1 详解】

解：将 $A(6,0)$ 、 $B(0,3)$ 代入 $y = ax + b$,

$$\text{得} \begin{cases} 6a + b = 0 \\ b = 3 \end{cases}, \text{解得:} \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 3;$$

【小问 2 详解】

$$\text{当 } x = 4 \text{ 时, } y = -\frac{1}{2} \times 4 + 3 = 1,$$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(4,1)$,

$\therefore CD \parallel x$ 轴, $DE \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 为平行四边形, 且 $CD = 4$,

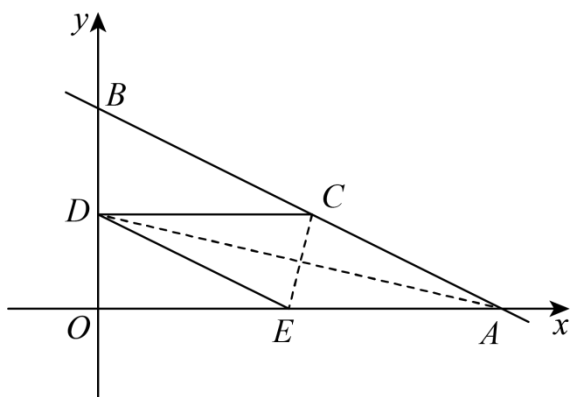
则四边形 $ACDE$ 的面积为 $CD \cdot |y_D| = 4$;

【小问 3 详解】

当点 C 的坐标为 $(30 - 12\sqrt{5}, -12 + 6\sqrt{5})$ 时, AD 与 CE 互相垂直, 理由如下:

$\therefore A(6,0)$,

$\therefore OA = 6$,



设点 C 的坐标为 $\left(a, -\frac{1}{2}a + 3\right)$, 其中 $0 < a < 6$,

由 (2) 可知四边形 $ACDE$ 为平行四边形,

$$\therefore AE = CD = a, \quad OD = -\frac{1}{2}a + 3, \quad OE = OA - AE = 6 - a,$$

当 $AE = DE$ 时, 四边形 $ACDE$ 为菱形, 此时 AD 与 CE 互相垂直,

在 $\text{Rt}\triangle DOE$ 中, $OD^2 + OE^2 = DE^2$, 即 $\left(-\frac{1}{2}a + 3\right)^2 + (6 - a)^2 = a^2$,

解得: $a = 30 - 12\sqrt{5}$ ($a = 30 + 12\sqrt{5}$ 舍去),

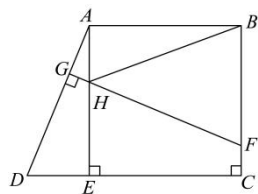
则 $-\frac{1}{2}a + 3 = -12 + 6\sqrt{5}$,

此时点 C 的坐标为 $(30 - 12\sqrt{5}, -12 + 6\sqrt{5})$,

综上, 当点 C 的坐标为 $(30 - 12\sqrt{5}, -12 + 6\sqrt{5})$ 时, AD 与 CE 互相垂直.

【点睛】 本题考查利用待定系数法求函数解析, 平行四边形的判定及性质, 菱形的判定及性质, 勾股定理等知识点, 理解相关图形的性质是解决问题的关键.

26. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle C = 90^\circ$, $AE \perp CD$, 点 F 是射线 BC 上一点, $FG \perp AD$, 垂足为点 G , FG 交线段 AE 于点 H , $AB = 12$, $CD = 17$, $AD = 13$.



(1) 求梯形 $ABCD$ 的面积;

(2) 当点 F 在线段 BC 上时, 设 $CF = x$, $AH = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式及自变量 x 的取值范围;

(3) 若 $\triangle BHF$ 是以 BH 为腰的等腰三角形, 请直接写出 AH 的长.

【答案】 (1) 174 (2) $y = 7 - x (0 \leq x \leq 7)$

(3) AH 的长为 5 或 11.9

【解析】

【分析】 (1) 先判断出四边形 $AECB$ 是矩形, 进而求出 $EC = 12$, $DE = 5$, 利用勾股定理求出 $AE = 12$, 即可得出结论;

(2) 过点 C 作 $CM \parallel FH$, 交 AE 于点 M , 先判断出四边形 $HMCF$ 是平行四边形, 进而判断出 $\angle FHE = \angle CME$, 即可判断出 $\angle GAH = \angle ECM$, 进而判断出 $\triangle AED \cong \triangle MEC$, 即可得出结论;

(3) 分两种情况: 当 $BH = HF$ 时, 当 $BH = BF$ 时, 利用 (2) 的结论和勾股定理即可得出结论.

【小问 1 详解】

解: $\because AE \perp CD$,

$\therefore \angle AED = 90^\circ$, 又 $\angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle AED = \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore AE \parallel CB,$$

$$\text{又 } AB \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $AECB$ 是矩形,

$$\therefore AB = EC,$$

$$\because AB = 12, \quad CD = 17,$$

$$\therefore EC = 12, \text{ 则 } DE = CD - CE = 5,$$

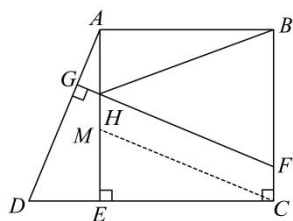
$$\because AD = 13, \quad \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$$

$$\therefore S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2} \times (12 + 17) \times 12 = 174;$$

【小问 2 详解】

如图, 过点 C 作 $CM \parallel FH$, 交 AE 于点 M ,



$$\because AE \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $HMCF$ 是平行四边形,

$$\therefore FC = HM = x$$

$$\because CM \parallel FH,$$

$$\therefore \angle FHE = \angle CME,$$

$$\text{又 } \angle FHE = \angle AHG,$$

$$\therefore \angle CME = \angle AHG,$$

$$\because FG \perp AD,$$

$$\therefore \angle AHG + \angle GAH = 90^\circ,$$

$$\because AE \perp CD,$$

$$\therefore \angle CME + \angle ECM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAH = \angle ECM.$$

又 $\angle AED = \angle MEC = 90^\circ$, 由 (1) 可知 $EC = AE = 12$,

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle MEC,$$

$$\therefore ME = DE = 5,$$

$$\therefore y + x = 12 - 5,$$

$$\therefore y = 7 - x (0 \leq x \leq 7),$$

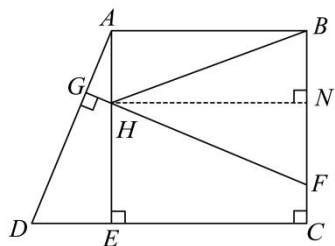
【小问 3 详解】

由 (2) 知, $y = 7 - x$

即: $AH = 7 - CF$,

$$\therefore CF = 7 - AH$$

当 $BH = HF$ 时, 过点 H 作 $HN \perp BC$, 则 $BN = NF = \frac{1}{2}BF$, $AH = BN$,



$$\therefore BF = 2AH,$$

$$\therefore BF + CF = 12,$$

$$\therefore 2AH + CF = 12,$$

$$\therefore 2AH + 7 - AH = 12,$$

$$\therefore AH = 5,$$

当 $BH = BF$ 时,

$$\therefore BH = BF = BC - CF = 12 - (7 - AH) = 5 + AH,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $AB^2 + AH^2 = BH^2$,

$$12^2 + AH^2 = (5 + AH)^2,$$

$$\therefore AH = 11.9,$$

$\therefore \triangle BHF$ 是以 BH 为腰的等腰三角形, AH 的长为 5 或 11.9.

【点睛】此题是四边形综合题, 主要考查了平行四边形的判定和性质, 矩形的判定及性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 等腰三角形的性质, 得出 $y = 7 - x$ 是解本题的关键.