

杨浦区 2024 学年第二学期八年级期中质量调研

数学学科

(满分: 100 分 完成时间: 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列说法中不正确的是 ()

A. $x^2 + 2x = 0$ 是二项方程

B. $\frac{x^2}{x} = 1$ 是分式方程

C. $x^4 = -1$ 是关于 x 的一元高次方程

D. $\sqrt{x^2} + 1 = 0$ 是无理方程

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了二项方程, 无理方程, 分式方程和一元 n 次方程的定义, 熟练掌握知识点是解题的关键.

分别根据二项方程, 无理方程, 分式方程和一元 n 次方程的定义判断各选项即可.

【详解】解: A、 $x^2 + 2x = 0$ 不是二项方程, 因为二项方程的形式为 $ax^n + b = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0, n$ 是正整数), 故符合题意;

B、 $\frac{x^2}{x} = 1$ 是分式方程, 正确, 不符合题意;

C、 $x^4 = -1$ 是关于 x 的一元高次方程, 正确, 不符合题意;

D、 $\sqrt{x^2} + 1 = 0$ 是无理方程, 正确, 不符合题意;

故选: A.

2. 如果一个 n 边形的内角和为 1260° , 那么 n 的值是 ()

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了 n 边形的内角和公式, 依题意, 列式 $(n-2) \times 180^\circ = 1260^\circ$ 进行计算, 即可作答.

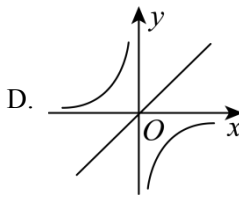
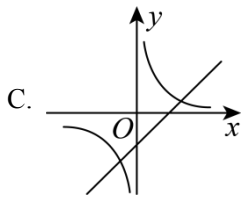
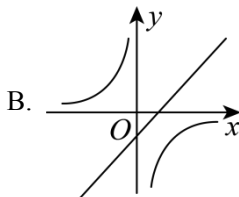
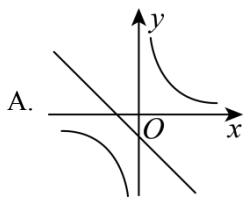
【详解】解: $\because$ 一个 n 边形的内角和是 1260° ,

$$\therefore (n-2) \times 180^\circ = 1260^\circ,$$

解得 $n = 9$,

故选：C.

3. 已知关于 x 的函数 $y = k(x-1)$ 和 $y = -\frac{k}{x} (k \neq 0)$, 它们在同一平面直角坐标系中的大致图象是下列图中的 ()



【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的图象与一次函数的图象性质，熟练掌握反比例函数图象与一次函数图象的性质是解题的关键.

根据反比例函数与一次函数的图象的性质分析当 k 不同取值时，反比例函数图象与一次函数图象所在的象限，然后根据给出的图象进行判断即可.

【详解】解：当 $k > 0$ 时，

$\therefore$ 反比例函数 $y = -\frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的系数 $-k < 0$ ，一次函数 $y = k(x-1) = kx - k$ ，其中 $k > 0$ ，

$\therefore$ 反比例函数 $y = -\frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在二、四象限，一次函数 $y = k(x-1) = kx - k$ 经过一、三、四象限，

$\therefore$ 选项 B 符合题意；

当 $k < 0$ 时，

$\therefore$ 反比例函数 $y = -\frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的系数 $-k > 0$ ，一次函数 $y = k(x-1) = kx - k$ ，其中 $k < 0$ ，

$\therefore$ 反比例函数 $y = -\frac{k}{x} (k \neq 0)$ 经过一、三象限，一次函数 $y = k(x-1) = kx - k$ 经过一、二、四象限，

$\therefore$ 选项中没有图象符合.

故选：B.

4. 下列方程中有实数根的是 ()

A. $\sqrt{3x+5} + 2 = 0$

B. $\sqrt{2x+3} = -x$

C. $\sqrt{x-2} = 1-x$

D. $\frac{x}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-9}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了解无理方程、一元二次方程、分式方程等知识点，解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解.

利用二次根式的非负性对 A 进行判断；利用根的判别式的意义对 C 进行判断；解无理方程对 B 进行判断；解分式方程对 D 进行判断.

【详解】解：A、移项得： $\sqrt{3x+5}=-2$ ，

因为 $\sqrt{3x+5} \geq 0$ ，

所以原方程没有实数解，A 选项不符合题意；

B、给方程两边同时平方得： $2x+3=x^2$ ，化为一般形式为： $x^2-2x-3=0$ ，

解得 $x_1=-1$ ， $x_2=3$ ，

经检验 $x_2=3$ 时不满足原方程，所以 $x_1=-1$ 为原方程的实数解，B 选项符合题意；

C、给方程两边同时平方得： $x-2=(1-x)^2$ ，

化为一般形式为： $x^2-3x+3=0$ ，

$\because \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 < 0$ ，所以方程无解，C 选项不符合题意；

D、解方程得 $x=3$ ，经检验当 $x=3$ 时分母为零，所以原方程无实数解，所以 D 选项不符合题意.

故选 B.

5. 小明乘出租车去体育场，有两条路线可供选择：路线一的全程是 20 千米，但交通比较拥堵；路线二的全程是 27 千米，平均车速比走路线一的平均车速能提高 60%，因此比走路线一少用 10 分钟到达. 设走路线一的平均车速为 x 千米/小时，那么根据题意得（ ）

A. $\frac{27}{(1+60\%)x} - \frac{20}{x} = 10$

B. $\frac{20}{x} - \frac{27}{(1+60\%)x} = 10$

C. $\frac{27}{(1+60\%)x} - \frac{20}{x} = \frac{1}{6}$

D. $\frac{20}{x} - \frac{27}{(1+60\%)x} = \frac{1}{6}$

【答案】D

【解析】

【分析】题目主要考查分式方程的应用，理解题意列出方程是解题关键.

若设走路线一时的平均速度为 x 千米/小时，根据路线一的全程是 20 千米，但交通比较拥堵，路线二的全程

是 27 千米，平均车速比走路线一时的平均车速能提高 60%，因此能比走路线一少用 10 分钟到达可列出方程，注意单位变换.

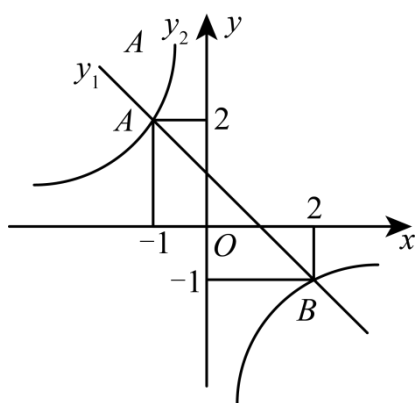
【详解】解：设走路线一时的平均速度为 x 千米/小时，走路线二时的平均速度为 $(1+60\%)x$ 千米/小时，

$$\frac{20}{x} - \frac{27}{(1+60\%)x} = \frac{1}{6}$$

故选 D.

6. 如图，一次函数 $y_1 = k_1x + b$ ($k_1 \neq 0$) 与反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ ($k_2 \neq 0$) 的图象交于 A 、 B 两点，则使函数值

$y_1 < y_2$ 的自变量 x 的取值范围是 ()



A. $x \leq -1$

B. $x < -1$ 或 $0 < x < 2$

C. $-1 < x < 0$ 或 $x > 2$

D. $x > 2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象与反比例函数图象的交点问题，根据函数图象确定不等式的解集，利用数形结合的思想是解题的关键. 函数值 $y_1 < y_2$ ，即函数 y_1 图象在函数 y_2 图象下方时，所对应的横坐标的取值范围，借助图象即可求解.

【详解】解：由题意得， $A(-1, 2), B(2, -1)$,

当函数值 $y_1 < y_2$ ，即函数 y_1 图象在函数 y_2 图象下方时，所对应的横坐标的取值范围，

$\therefore$ 由图象可得： $-1 < x < 0$ 或 $x > 2$,

故选：C.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分)

7. 一次函数 $y = \frac{2-x}{6}$ 的图像在 y 轴上的截距为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数的性质，一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象的一般形式，熟练掌握一次函数的基本形式是解题关键.

将一次函数化为一般形式即可求解.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = \frac{2-x}{6} = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$,

$\therefore$ 此函数图象在 y 轴上的截距是 $\frac{1}{3}$.

故答案为： $\frac{1}{3}$.

8. 正十二边形的每一个外角等于_____度.

【答案】 30

【解析】

【分析】 主要考查了多边形的外角和定理. 根据多边形的外角和为 360 度，再用 360 度除以边数即可得到每一个外角的度数.

【详解】 解： $\because$ 多边形的外角和为 360 度，

$\therefore$ 正十二边形的每个外角度数为： $360^\circ \div 12 = 30^\circ$.

故答案为： 30.

9. 方程 $x^3 - 27 = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】 本题考查利用立方根解方程，移项后，利用立方根的定义，进行求解即可，熟练掌握立方根的定义，是解题的关键.

【详解】 解： $x^3 - 27 = 0$,

$\therefore x^3 = 27$,

$\therefore x = 3$;

故答案为： $x = 3$.

10. 方程 $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+5} = 0$ 的解为_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了无理方程的解，解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解，在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法，解无理方程，往往会产生增根，应注意验根.

根据方程有解，得出 $x-2 \geq 0$ 且 $x+5 \geq 0$ ，求出 x 的取值范围，再根据原方程得出 $x=2$ 或 $x=-5$ ，从而得出答案.

【详解】 解： 根据题意得： $x-2 \geq 0$ 且 $x+5 \geq 0$ ，

解得： $x \geq 2$ 且 $x \geq -5$ ，

$\therefore x \geq 2$ ，

$$\because \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+5} = 0,$$

$\therefore x=2$ 或 $x=-5$ (不符合题意，舍去)，

$\therefore x=2$ ，

经检验： $x=2$ 为原方程的根，

故答案为： $x=2$.

11. 分式方程 $\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$ 的解是_____.

【答案】 $x=-3$

【解析】

【分析】 本题主要考查可化为一元二次方程的分式方程的解法，熟记分式方程的解法是解题的关键. 先去分母得到一元二次方程，再解一元二次方程，然后检验是否有增根即可.

【详解】 解： 方程 $\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$ 去分母，得 $x^2 = 9$ ，

解得： $x_1 = 3, x_2 = -3$ ，

经检验： $x_1 = 3$ 是增根，舍去， $x_2 = -3$ 是原方程的根，

$\therefore$ 原方程的根为 $x = -3$ ，

故答案为： $x = -3$.

12. 已知方程 $\frac{x-1}{2x+2} - \frac{x+1}{3-3x} = 1$ ，如果设 $\frac{x-1}{x+1} = y$ ，那么原方程可以化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $3y^2 - 6y + 2 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查换元法解分式方程，根据题意，先化成关于 y 的分式方程，再去分母转化为关于 y 的整式

方程即可.

【详解】解: $\frac{x-1}{2x+2} - \frac{x+1}{3-3x} = 1,$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+1}{1-x} = 1,$$

$$\therefore \frac{x-1}{x+1} = y,$$

$$\therefore \text{原方程化为: } \frac{1}{2}y + \frac{1}{3y} = 1,$$

去分母, 得: $3y^2 + 2 = 6y$, 整理, 得: $3y^2 - 6y + 2 = 0$;

故答案为: $3y^2 - 6y + 2 = 0$.

13. 一次函数 $y = -kx + 2k - 4$ 的图像经过第二、三、四象限, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $0 < k < 2$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图像分布与 k , b 的关系, 根据图像分布, 列出不等式, 准确求解即可.

根据题意, 得 $-k < 0$, $2k - 4 < 0$, 求解即可.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = -kx + 2k - 4$ 的图像经过第二、三、四象限,

$$\therefore -k < 0, \text{ 即 } k > 0,$$

$$2k - 4 < 0, \text{ 即 } k < 2,$$

$$\therefore k \text{ 的取值范围是 } 0 < k < 2,$$

故答案为: $0 < k < 2$.

14. 已知直线 $y = kx + b$ 过点 $A(2, 0)$, 若将该直线向下平移得直线 $y = -4x$, 那么平移的距离是_____.

【答案】 8

【解析】

【分析】 此题主要考查了一次函数图象得平移及待定系数法确定函数解析式, 熟练掌握一次函数图象的平移是解题关键.

根据题意得出 $k = -4$, 将点 $A(2, 0)$ 代入确定函数解析式, 然后即可得出结果.

【详解】解: $\because$ 直线 $y = kx + b$ 向下平移得直线 $y = -4x$,

$$\therefore k = -4,$$

$$\therefore y = -4x + b,$$

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ 过点 $A(2, 0)$,

$$\therefore 0 = -4 \times 2 + b,$$

解得: $b = 8$,

$\therefore$ 该直线向下平移 8 个单位长度,

故答案为: 8.

15. 已知平行四边形一个角的平分线把一条边分成 4cm 和 5cm 的两条线段, 那么该平行四边形的周长为 _____.

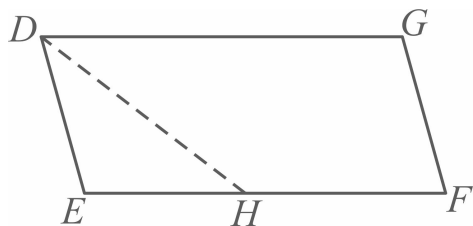
【答案】 26cm 或 28cm

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的性质, 等角对等边, 理解题意, 作出图形求解即可, 解题关键是通过画图讨论不同情况的解.

通过画图, 根据平行四边形的性质及平行线的性质得出 $\angle GDH = \angle DHE$, 再由角平分线及等量代换确定 $\angle EDH = \angle DHE$, 根据等角对等边得出 $DE = EH$, 然后分情况分析即可求解.

【详解】 解: 如图,



$\therefore$ 平行四边形,

$$\therefore DG \parallel EF,$$

$$\therefore \angle GDH = \angle DHE.$$

$\because DH$ 平分 $\angle GDE$,

$$\therefore \angle GDH = \angle EDH,$$

$$\therefore \angle EDH = \angle DHE, \text{ 即 } DE = EH.$$

当 $DE = EH = 4\text{cm}$, $HF = 5\text{cm}$ 时, 平行四边形的周长为 $2 \times (4 + 4 + 5) = 26\text{cm}$.

当 $DE = EH = 5\text{cm}$, $HF = 4\text{cm}$ 时, 平行四边形的周长为 $2 \times (4 + 5 + 5) = 28\text{cm}$.

故答案为: 26cm 或 28cm.

16. 已知关于 x 的方程 $ax - 3 = 2x - b$ 有无数个解, 那么直线 $y = ax - b$ 与坐标轴围成的三角形的面积为 _____.

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特点，一元一次方程解的情况，三角形面积公式，熟知一次函数图象上各点的坐标一定适合函数的解析式是解答关键.

先根据关于 x 的方程有无数个解，列出方程组求出 a, b ，继而得到一次函数解析式，再令 $x=0, y=0$ 求出与坐标轴交点，即可求解直线与坐标轴围成的三角形面积.

【详解】 解：方程 $ax-3=2x-b$ 可化为： $(a-2)x=3-b$ ，

$\because$ 方程 $ax-3=2x-b$ 有无数个解，

$$\therefore \begin{cases} a-2=0 \\ 3-b=0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数解析为： $y=2x-3$ ，

当 $x=0, y=-3$ ，

当 $y=0, 2x-3=0$ ，解得： $x=\frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 直线 $y=ax-b$ 与坐标轴交点为： $(0, -3), (\frac{3}{2}, 0)$ ，

$\therefore$ 直线 $y=ax-b$ 与坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ ，

故答案为： $\frac{9}{4}$.

17. 如果关于 x 的方程 $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+k}=1$ 有增根 $x=3$ ，那么 k 的值为_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 题目主要考查无理方程，根据题意代入求解计算即可，熟练掌握基础知识点是解题关键.

【详解】 解：将 $x=3$ 代入原方程得： $\sqrt{3 \times 3 - 8} - \sqrt{3 + k} = 1$ ，

即 $1 - \sqrt{3 + k} = 1$ ，

$\therefore \sqrt{3 + k} = 0$ ，

$$\therefore k = -3,$$

故答案为: -3 .

18. 已知有三个边长相同, 但边数不同且边数是偶数的正多边形可以无缝拼接, 那么这三个正多边形的边数分别是_____.

【答案】 4,6,12

【解析】

【分析】 题目主要考查多边形内角和及无缝拼接, 根据题意列出方程求解是解题关键

设这三个正多边形的边数分别是 a, b, c , 根据题意列出方程, 整理得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$, 然后从构成多边形的最小的偶数开始进行试算求解即可.

【详解】 解: 设这三个正多边形的边数分别是 a, b, c ,

$\because$ 三个边长相同, 但边数不同且边数是偶数的正多边形可以无缝拼接,

$$\therefore \frac{a-2}{a} \times 180^\circ + \frac{b-2}{b} \times 180^\circ + \frac{c-2}{c} \times 180^\circ = 360^\circ,$$

$$\text{整理得: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2},$$

$\because$ 边数不同且边数是偶数,

$$\therefore \text{假设 } a=4, b=6, \text{ 则 } \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}, \text{ 解得: } c=12,$$

经检验, 符合题意,

$\therefore$ 这三个正多边形的边数分别是 4,6,12,

故答案为: 4,6,12.

三、解答题 (本大题共 7 题, 第 19、20、21、22 每题 5 分, 第 23、24 每题 8 分, 第 25 题 10 分, 满分 46 分)

19. 解方程: $ax^2 - 2 = 2x^2$

$$\text{【答案】 } a \leq 2 \text{ 时, 方程没有实数解; } a > 2 \text{ 时, } x_1 = -\frac{\sqrt{2a-4}}{a-2}, x_2 = \frac{\sqrt{2a-4}}{a-2}.$$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程—直接开平方法. 先移项得到 $(a-2)x^2 = 2$, 讨论: 当 $a=2$ 时, 方程无解; 当 $a \neq 2$ 时, 方程为一元二次方程, 若 $a-2 < 0$ 时, 方程没有实数解; $a-2 > 0$, 利用直接开平方法解方程.

$$\text{【详解】 解: } ax^2 - 2 = 2x^2,$$

$$(a-2)x^2 = 2,$$

当 $a=2$ 时, 方程无解;

$$\text{当 } a \neq 2 \text{ 时, } x^2 = \frac{2}{a-2},$$

$a-2 < 0$ 时, 即 $a < 2$, 方程没有实数解;

$$a-2 > 0, \text{ 即 } a > 2, x = \pm \sqrt{\frac{2}{a-2}} = \pm \frac{\sqrt{2a-4}}{a-2},$$

$$\text{即 } x_1 = -\frac{\sqrt{2a-4}}{a-2}, x_2 = \frac{\sqrt{2a-4}}{a-2},$$

综上所述, $a \leq 2$ 时, 方程没有实数解; $a > 2$ 时, $x_1 = -\frac{\sqrt{2a-4}}{a-2}, x_2 = \frac{\sqrt{2a-4}}{a-2}.$

$$20. \text{ 解方程组: } \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 & \text{①} \\ x^2 - xy + 4 = 0 & \text{②} \end{cases}.$$

$$\text{【答案】 } \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -4 \end{cases}.$$

【解析】

【分析】首先对方程①进行因式分解, 经分析得: $2x+y=0$ 或 $2x-y=0$, 然后与方程②重新组合成两个方程组, 解这两个方程组即可.

【详解】解: 由方程①, 得 $2x+y=0$ 或 $2x-y=0$.

将它们与方程②分别组成方程组, 得

$$(1) \begin{cases} 2x+y=0 & \text{③} \\ x^2-xy+4=0 & \text{②} \end{cases} \text{ 或 } (2) \begin{cases} 2x-y=0 & \text{④} \\ x^2-xy+4=0 & \text{②} \end{cases}.$$

由③得, $y = -2x$, ⑤

把⑤代入②得, $x^2 + 2x^2 + 4 = 0$,

整理得 $3x^2 + 4 = 0$,

$\therefore$ 方程组 (1) 无实数解;

由④得, $y = 2x$, ⑥

把⑥代入②得, $x^2 - 2x^2 + 4 = 0$,

整理得, $x^2 = 4$,

解得 $x_1 = 2, x_2 = -2$,

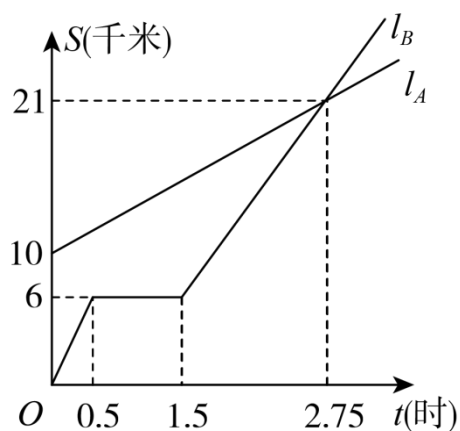
把 $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ 分别代入⑥得, $y_1 = 4$, $y_2 = -4$,

∴ 方程组 (2) 的解是 $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -4 \end{cases}$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -4 \end{cases}$.

【点睛】 本题主要考查解二元二次方程组, 关键在于正确的对原方程组的第一个方程进行因式分解.

21. 如图, l_A 与 l_B 分别是根据小明步行与小亮骑自行车同时出发在同一路上行驶的路程 S 与时间 t 的关系式所作出的图像.



(1) 求 l_A 所在直线的函数解析式;

(2) 假设小亮的自行车没有发生故障, 保持出发时的速度前进, 求出发几小时与小明相遇, 相遇点离小明的出发点多少千米.

【答案】 (1) $S = 4t + 10$

(2) 自行车没有发生故障, 保持出发时的速度前进, $\frac{5}{4}$ 小时与小明相遇, 相遇点离小明的出发点 5 千米.

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的应用, 结合图象及一次函数的性质求解是解题关键.

(1) 设 l_A 的解析式为: $S = kt + b$, 利用待定系数法代入求解即可;

(2) 设自行车不发生故障时, 函数解析式为 $S = k_1 t$, 确定函数解析式为 $S = 12t$, 然后联立两个函数即可求解.

【小问 1 详解】

解: 设 l_A 的解析式为: $S = kt + b$,

由题意得: $\begin{cases} b = 10 \\ 2.75k + b = 21 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} k = 4 \\ b = 10 \end{cases}$,

$\therefore I_A$ 的解析式为: $S = 4t + 10$,

【小问 2 详解】

解: 设自行车不发生故障时, 函数解析式为 $S = k_1 t$,

根据题意得: $6 = 0.5k_1$,

解得: $k_1 = 12$,

$\therefore$ 自行车不发生故障, 函数解析式为 $S = 12t$,

由 $\begin{cases} S = 12t \\ S = 4t + 10 \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} t = \frac{5}{4} \\ S = 15 \end{cases}$.

遇点离小明的出发点 $15 - 10 = 5$ 千米,

$\therefore$ 自行车没有发生故障, 保持出发时的速度前进, $\frac{5}{4}$ 小时与小明相遇, 相遇点离小明的出发点 5 千米.

22. 某公司生产的新产品需要精加工后才能投放市场, 为此王师傅承担了加工 300 个新产品的任务. 在加工了 60 个新产品后, 王师傅接到通知, 要求加快新产品加工的进程, 王师傅在保证加工零件质量的前提下, 平均每天加工新产品的个数比原来多 10 个, 比原计划提前 2 天完成了任务. 问接到通知后, 王师傅平均每天加工多少个新产品?

【答案】接到通知后, 王师傅平均每天加工 40 个新产品.

【解析】

【分析】此题考查了分式方程的应用, 分析题意, 找到关键描述语, 找到合适的等量关系是解决问题的关键.

设接到通知后, 王师傅平均每天加工 x 个新产品, 根据题意列出方程求解即可.

【详解】解: 设接到通知后, 王师傅平均每天加工 x 个新产品.

根据题意, 得 $\frac{300}{x-10} - \left(\frac{300-60}{x} + \frac{60}{x-10} \right) = 2$.

整理得: $x^2 - 10x - 1200 = 0$,

解得: $x_1 = 40$, $x_2 = -30$ (不符合题意, 舍去).

经检验： $x=40$ 是原方程的解，

答：接到通知后，王师傅平均每天加工 40 个新产品.

23. 已知分式方程 $\frac{3kx}{3x+1} + \frac{3k}{x-1} = 1$ 只有一个实数解，求 k 的值和对应方程的解.

【答案】 $k=1$, $x=-\frac{1}{2}$; $k=-\frac{1}{3}$, $x=0$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解，解一元二次方程. 关键是将分式方程转化为整式方程，根据整式方程的特点及题目的条件分类讨论.

去分母，转化为整式方程，根据整式方程为一元一次方程，即 $3k-3=0$ ；为一元二次方程，即 $3k-3 \neq 0$ ，分别求解即可.

【详解】 解：两边同乘 $(3x+1)(x-1)$ ，

得 $3kx(x-1) + 3k(3x+1) = (3x+1)(x-1)$ ，

整理得： $(3k-3)x^2 + (6k+2)x + 3k+1 = 0$ ，

若 $3k-3=0$ ，即 $k=1$ ，则 $8x+4=0$ ，解得： $x=-\frac{1}{2}$ ；

若 $3k-3 \neq 0$ ，由题意，知 $\Delta = (6k+2)^2 - 4(3k-3)(3k+1) = 0$ ，

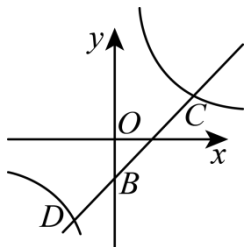
解得 $k = -\frac{1}{3}$ ，

当 $k = -\frac{1}{3}$ 时， $x=0$ ；

$\therefore$ 综上所述可得： $k=1$, $x=-\frac{1}{2}$; $k=-\frac{1}{3}$, $x=0$.

24. 如图，一次函数 $y=ax+b$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点，且 $\angle OAB = 45^\circ$ ，与反比例函数

$y = \frac{k}{x}$ 的图像交于点 C ， $D(m, -4)$ ，且 $BD = AB$.



(1) 求一次函数 $y=ax+b$ 的解析式；

(2) 点 E 在 y 轴负半轴上，当 $\triangle ACE$ 的面积为 4 时，求点 E 的坐标.

【答案】 (1) $y = x - 2$

(2) $E(0, -6)$

【解析】

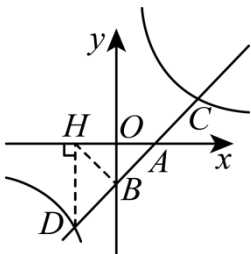
【分析】 本题考查了反比例函数与一次函数的综合问题，涉及待定系数法求函数解析式，函数图象的交点问题，等腰三角形的判定与性质等知识点，正确求出函数解析式是解题的关键.

(1) 过点 D 作 $DH \perp x$ 轴于点 H ，联结 HB ，根据 $\angle OAB = 45^\circ$ ，确定 $\triangle DHA, \triangle ABH, \triangle OAB, \triangle HOB$ 均是等腰直角三角形，继而求出 A, B 坐标，再由待定系数法即可求解；

(2) 先求出点 D 坐标，再求出反比例函数解析式，再联立反比例函数与一次函数解析式求出交点 C 坐标，最后由 $S_{\triangle ACE} = S_{\triangle CBE} - S_{\triangle ABE}$ 即可求解.

【小问 1 详解】

解：过点 D 作 $DH \perp x$ 轴于点 H ，联结 HB ，



$$\because \angle OAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADH = 90^\circ - \angle OAB = 45^\circ = \angle OAB,$$

$$\therefore HD = HA = 4,$$

$$\because BD = BA,$$

$$\because HB \perp AD,$$

$$\because OB \perp HA,$$

$$\therefore OA = OH = \frac{1}{2}AH = 2,$$

$$\therefore A(2, 0)$$

$$\because \angle OAB = 45^\circ,$$

$$\therefore OB = OA = 2,$$

$$\therefore B(0, -2),$$

将 $B(0, -2)$ ， $A(2, 0)$ 代入 $y = ax + b$

$$\text{得: } \begin{cases} 2k + b = 0 \\ b = -2 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} k=1 \\ b=-2 \end{cases}$,

$\therefore$ 一次函数 $y = ax + b$ 的解析式为 $y = x - 2$;

【小问 2 详解】

解: 将 $D(m, -4)$ 代入 $y = x - 2$

得, $m - 2 = -4$,

解得: $m = -2$,

$\therefore D(-2, -4)$,

将 $D(-2, -4)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得, $k = (-2) \times (-4) = 8$,

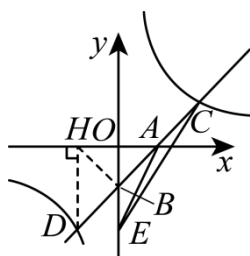
$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y = \frac{8}{x}$,

联立反比例函数和一次函数解析式得 $\begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ y = x - 2 \end{cases}$,

解得: $x = 4$ 或 $x = -2$,

$\therefore C(4, 2)$,

如图:



$$\therefore S_{\triangle ACE} = S_{\triangle CBE} - S_{\triangle ABE},$$

$$\therefore \frac{1}{2} BE \times x_C - \frac{1}{2} BE \times x_A = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{2} BE \times (4 - 2) = 4,$$

$$\therefore BE = 4,$$

又 $\because$ 点 E 在 y 轴负半轴上,

$\therefore E(0, -6)$.

25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中 $AB = AC$, 点 E 为边 BC 上的点 (E 与 B , C 不重合), $\angle EAF = \angle BAC$, 且

$AE = AF$ ，连接 CF ，连接 EF 交 AC 于点 O 。

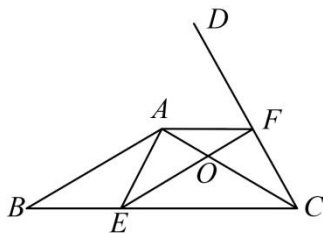


图1

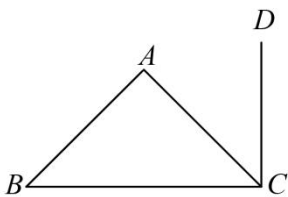


图2

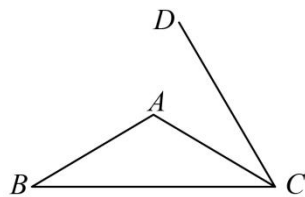


图3

(1) 求证: AC 平分 $\angle BCD$;

(2) 如图 2, 若 $\angle B = 45^\circ$, 且 $AB = AC = 4$, 设线段 BE 为 x , 三角形 AFC 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式;

(3) 如图 3, 若 $\angle B = 30^\circ$, 当 $\triangle AOF$ 是等腰三角形时, 求 $\frac{AO}{OC}$ 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) $y = \sqrt{2}x$

(3) $\frac{AO}{OC} = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{AO}{OC} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 含 30° 度角的直角三角形等知识点, 熟练掌握相关知识点, 是解题的关键:

(1) 等边对等角, 得到 $\angle B = \angle ACB$, 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$, 得到 $\angle B = \angle ACF$, 进而得到 $\angle ACF = \angle ACB$, 即可得证;

(2) 作 $AG \perp CF$, 同 (1) 得到 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$, 得到 $CF = BE = x$, $\angle ACF = \angle B = 45^\circ$, 勾股定理求出 AG 的长, 利用面积公式列出函数关系式即可;

(3) 分 $AO = OF$ 和 $FA = FO$, 两种情况进行讨论求解即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle ACB$,

$\because \angle EAF = \angle BAC$,

$\therefore \angle EAF - \angle CAE = \angle BAC - \angle CAE$,

$\therefore \angle BAE = \angle CAF$,

又 $\because AE = AF$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF$,

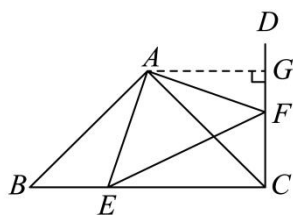
$\therefore \angle B = \angle ACF$,

$\therefore \angle ACF = \angle ACB$,

$\therefore AC$ 平分 $\angle BCD$;

【小问 2 详解】

作 $AG \perp CF$ ，如图：



同 (1) 法可知： $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ ，

$\therefore CF = BE = x$ ， $\angle ACF = \angle B = 45^\circ$ ，

$\therefore AB = AC = 4$ ， $AG \perp CF$ ，

$\therefore AG = CG = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} CF \cdot AG = \frac{1}{2} x \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}x$ ， 即： $y = \sqrt{2}x$ ；

【小问 3 详解】

$\therefore \angle B = 30^\circ$ ， $\angle EAF = \angle BAC$ ， 且 $AE = AF$ ， $AB = AC$ ，

$\therefore \angle AEF = 30^\circ$ ，

$\therefore AE = AF$ ，

$\therefore \angle AFE = \angle AEF = 30^\circ$ ，

同 (1) 法可知： $\angle ACF = \angle B = 30^\circ$ ，

当 $\triangle AOF$ 为等腰三角形时， 分两种情况：

①当 $AO = OF$ 时， 则： $\angle OAF = \angle AFE = 30^\circ$ ，

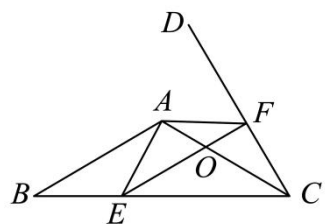
$\therefore \angle FOC = \angle OAF + \angle AFE = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle CFO = 180^\circ - \angle OCF - \angle COF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACF = 30^\circ$ ，

$\therefore OC = 2OF = 2OA$ ，

$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{1}{2}$ ；



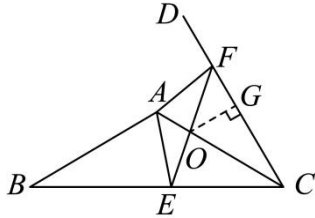
②当 $FA = FO$ 时, 则: $\angle FAO = \angle FOA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AFE) = 75^\circ$,

$$\therefore \angle CFA = 180^\circ - \angle ACF - \angle CAF = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle CFA = \angle CAF, \quad \angle OFC = \angle CFA - \angle AFO = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = CF,$$

作 $OG \perp CF$ 于点 G ,



在 $\text{Rt}\triangle CGO$ 中, $\angle OCG = 30^\circ$,

$$\therefore OC = 2OG,$$

$$\therefore CG = \sqrt{3}OG,$$

在 $\text{Rt}\triangle FGO$ 中, $\angle OFC = 45^\circ$,

$$\therefore FG = OG,$$

$$\therefore AC = CF = CG + FG = (\sqrt{3} + 1)OG,$$

$$\therefore OA = AC - OC = (\sqrt{3} - 1)OG,$$

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2};$$

综上: $\frac{AO}{OC} = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{AO}{OC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.