

上海市延安初级中学 2024 学年第二学期初二年级数学学科期中阶段性 测试试卷

(测试时间：90 分钟 满分：100 分)

一、选择题 (每题 2 分, 共 12 分)

1. 已知一次函数 $y = 2x + 1$ 的图像经过 ()

A. 第一、二、三象限

B. 第一、三、四象限

C. 第一、二、四象限

D. 第二、三、四象限

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查判断一次函数的图像经过的象限, 根据 k, b 的符号, 进行判断即可.

【详解】解: $\because y = 2x + 1, 2 > 0, 1 > 0,$

$\therefore$ 一次函数 $y = 2x + 1$ 的图像经过第一、二、三象限;

故选 A.

2. 刘师傅给客户加工一个平行四边形 $ABCD$ 的零件, 他要检查这个零件是否为平行四边形, 用下列方法不能检查的是 ()

A. $AB \parallel CD, AB = CD$

B. $\angle B = \angle D, \angle A = \angle C$

C. $AB \parallel CD, AD = BC$

D. $AB = CD, BC = AD$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定方法: 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形, 两组对角分别相等的四边形是平行四边形, 两组对边分别相等的四边形是平行四边形, 即可得 A, B, D 可以判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 不能通过一组对边平行另一组对边相等得到平行四边形, 也可以是等腰梯形; 即可求得答案.

【详解】A. $AB \parallel CD, AB = CD$, 根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形, 可知本选项正确, 但不符合题意;

B. $\angle B = \angle D, \angle A = \angle C$, 根据两组对角分别相等的四边形是平行四边形, 可知本选项正确, 但不符合题意;

C. $AB \parallel CD, AD = BC$, 可知四边形 $ABCD$ 可以是平行四边形, 也可以是等腰梯形; 故本选项错误, 符合题意;

D. $AB = CD$, $BC = AD$, 根据两组对边分别相等的四边形是平行四边形, 可知本选项正确, 但不符合题意;

故选: C.

【点睛】此题考查了平行四边形的判定. 此题比较简单, 注意熟记平行四边形的判定定理是解此题的关键.

3. 已知点 $A(a, y_1)$, 点 $B(a+1, y_2)$ 都在直线 $y = -\frac{4}{3}x - 7$ 上, 则 y_1, y_2 的大小关系 ()

- A. $y_1 > y_2$ B. $y_1 = y_2$ C. $y_1 < y_2$ D. 无法确定

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的性质, 熟练掌握一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$, 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小是解题的关键. 根据 $a < a+1$, 以及直线 $y = -\frac{4}{3}x - 7$ 中 y 随 x 的增大而减小, 即可得到答案.

【详解】解: 对于 $y = -\frac{4}{3}x - 7$ 来说,

$$\because -\frac{4}{3} < 0,$$

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

$\because$ 点 $A(a, y_1)$, 点 $B(a+1, y_2)$ 都在直线 $y = -\frac{4}{3}x - 7$ 上, 且 $a < a+1$,

$$\therefore y_1 > y_2,$$

故选: A.

4. 下列关于向量说法错误的是 ()

- A. 既有大小, 又有方向的量叫做向量 B. 向量的大小叫做向量的模
C. 长度为零的向量叫做零向量 D. 零向量是没有方向的

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量的相关定义, 逐项分析判断即可求解.

【详解】A. 既有大小, 又有方向的量叫做向量, 故该选项正确, 符合题意;

B. 向量的大小叫做向量的模, 故该选项正确, 符合题意;

C. 长度为零的向量叫做零向量, 故该选项正确, 符合题意;

D. 零向量有方向的, 但方向不是确定的, 故该选项不正确, 不符合题意;

故选: D.

【点睛】 本题考查了向量的相关定义，熟练掌握向量的定义是解题的关键.

5. 已知一个四边形的对角线互相垂直，那么顺次连接这个四边形的四边中点所得的四边形是 ().

- A. 矩形 B. 菱形 C. 梯形 D. 正方形

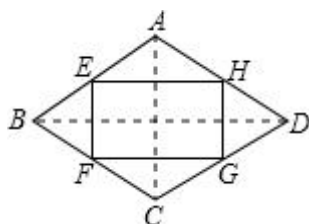
【答案】 A

【解析】

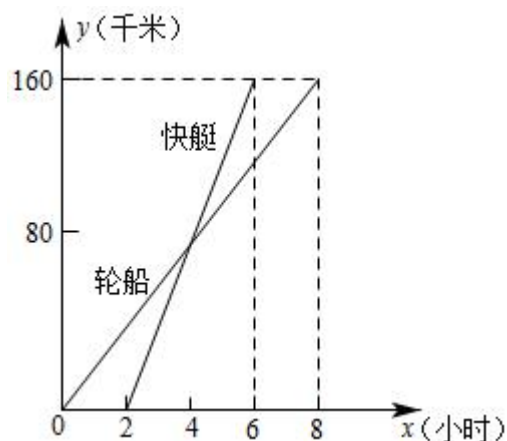
【详解】 如图，菱形 ABCD 中，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、AD 的中点，

$\therefore EH \parallel FG \parallel BD$, $EF=FG=\frac{1}{2}BD$; $EF \parallel HG \parallel AC$, $EF=HG=\frac{1}{2}AC$, 故四边形 EFGH 是平行四边形,

又 $\because AC \perp BD$, $\therefore EH \perp EF$, $\angle HEF=90^\circ \therefore$ 边形 EFGH 是矩形. 故选 A.



6. 一艘轮船和一艘快艇沿相同路线从甲港出发到乙港，行驶过程随时间变化的图象如图所示，下列结论错误的是 ()



A. 轮船的速度为 20 千米/小时

B. 快艇的速度为 $\frac{80}{3}$ 千米/小时

C. 轮船比快艇先出发 2 小时

D. 快艇比轮船早到 2 小时

【答案】 B

【解析】

【分析】 先计算轮船和快艇的速度，再结合图象，逐一判断.

【详解】 解： 轮船的速度为： $160 \div 8 = 20$ 千米/小时，

快艇的速度为： $160 \div (6 - 2) = 40$ 千米/小时，

故 A 正确，B 错误；由函数图象可知，C、D 正确.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了函数图象的读图能力和函数与实际问题结合的应用，解题的关键是要能根据函数图象的性质和图象上的数据分析得出函数表示的实际意义，再结合实际意义得到正确的结论.

二、填空题 (每题 3 分，共 36 分)

7. 直线 $y = -\frac{1}{2}x - 5$ 的截距是_____.

【答案】 -5

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的截距的定义，熟练掌握定义是解题的关键. 根据题意，求得当 $x = 0$ 时，对应 y 的即可得到答案.

【详解】解：当 $x = 0$ 时， $y = -\frac{1}{2} \times 0 - 5 = -5$,

$\therefore$ 直线 $y = -\frac{1}{2}x - 5$ 的截距为 -5 ,

故答案为： -5 .

8. 已知点 $A(4, m)$ 在一次函数 $y = 2x + 1$ 的图像上，那么 $m =$ _____.

【答案】 9

【解析】

【分析】本题考查了求一次函数图像上点的坐标特征，熟练掌握一次函数图像上点的坐标特征是解题的关键. 根据题意点点 $A(4, m)$ 在一次函数 $y = 2x + 1$ 的图像上，可知 $m = 2 \times 4 + 1$ 即可得到答案.

【详解】解： $\because$ 点 $A(4, m)$ 在一次函数 $y = 2x + 1$ 的图像上，

$\therefore m = 2 \times 4 + 1 = 9$,

故答案为： 9.

9. 如果一次函数 $y = (m - 2)x - 8$ 的函数值 y 随 x 的值增大而增大，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 2$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的性质，熟练掌握一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，当 $k > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小是解题的关键. 根据题意可知 $m - 2 > 0$ ，解之即可得到答案.

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = (m - 2)x - 8$ 的函数值 y 随 x 的值增大而增大，

$\therefore m - 2 > 0$,

$\therefore m > 2$,

故答案为: $m > 2$.

10. 如果梯形的中位线长为 4, 一条底边长为 2, 那么另外一条底边长为_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查梯形中位线定理, 掌握“梯形的中位线等于两底和的一半”是解题的关键.

根据“梯形的中位线等于两底和的一半”即可求解.

【详解】 解: $\because$ 梯形的中位线长为 4, 一条底边长为 2,

$\therefore$ 另外一条底边长为 $2 \times 4 - 2 = 6$,

故答案为: 6.

11. 如果一个多边形的每一个内角都等于 120° , 那么这个多边形是_____边形

【答案】 正六

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形的内角和定理, 根据多边形的内角和定理列出方程, 求出答案即可.

【详解】 设这个多边形为 n 边形, 根据题意, 得

$$120^\circ \times n = (n - 2) \times 180^\circ,$$

解得 $n = 6$,

所以这个多边形是正六边形.

故答案为: 正六.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{CB} =$ _____. (结果用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的式子表示)

【答案】 $-\vec{b} - \vec{a}$

【解析】

【分析】 本题考查平面向量的知识与平行四边形的性质. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 再根据

$\overrightarrow{CB} = -(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})$ 计算解题.

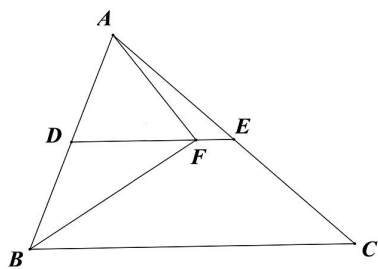
【详解】 解: $\because ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{CB} = -(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = -\vec{b} - \vec{a},$$

故答案为: $-\vec{b} - \vec{a}$.

13. 如图, DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 点 F 在 DE 上, 且 $\angle AFB=90^\circ$, $AB=6$, $BC=10$, 则 $EF=$ _____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 根据三角形中位线定理求出 DE , 根据直角三角形的性质求出 DF , 计算即可.

【详解】 解: $\because DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC = 5,$$

$\because \angle AFB = 90^\circ$, D 是 AB 的中点,

$$\therefore DF = \frac{1}{2}AB = 3,$$

$$\therefore EF = DE - DF = 5 - 3 = 2,$$

故答案为: 2

【点睛】 本题考查的是三角形中位线定理、直角三角形的性质, 掌握三角形的中位线平行于第三边, 且等于第三边的一半是解题的关键.

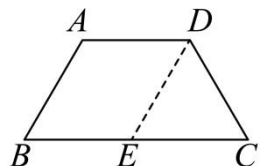
14. 已知等腰梯形一个底角是 60° , 它的两底分别是 6 和 10, 那么它的腰长是_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 过 D 作 $DE \parallel AB$, 交 BC 于 E , 得出四边形 $ABED$ 是平行四边形, 推出 $AB=DE=DC$, $AD=BE=6$, 求出 CE , 由等腰梯形的性质得到 $\angle C = \angle B = 60^\circ$, 进而得到 $\triangle DEC$ 是等边三角形, 求出 $CE=DC$ 即可求出答案.

【详解】 过 D 作 $DE \parallel AB$, 交 BC 于 E ,



$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形,

$$\therefore AB=DE, AD=BE=6,$$

$$\therefore CE=BC-BE=10-6=4,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$$\therefore \angle C=\angle B=60^\circ, AB=DC=DE,$$

$\therefore \triangle DEC$ 是等边三角形,

$$\therefore DC=CE=4,$$

故答案为: 4.

【点睛】 本题考查了等腰梯形性质, 平行四边形性质和判定, 等边三角形的性质和判定, 关键是把梯形转化成平行四边形和等腰三角形.

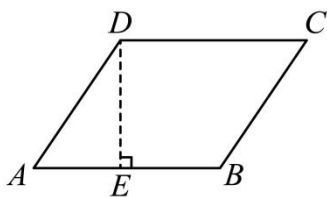
15. 已知一个菱形的周长为 24, 一个锐角为 60° , 则这个菱形的面积为_____.

【答案】 $18\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查菱形的性质, 根据菱形的性质求出菱形的边长, 根据含 30° 度角的直角三角形的性质求出菱形的高, 利用面积公式进行计算即可.

【详解】 解: 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle A=60^\circ$, 过点 D 作 $DE \perp AB$, 则: $\angle ADE=30^\circ$,



$\therefore$ 菱形的周长为 24,

$$\therefore AB=AD=\frac{1}{4} \times 24=6,$$

$$\therefore \angle ADE=30^\circ,$$

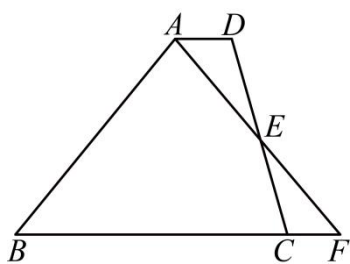
$$\therefore AE=\frac{1}{2} AD=3,$$

$$\therefore DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=3\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{菱形的面积为 } 6 \times 3\sqrt{3}=18\sqrt{3};$$

故答案为: $18\sqrt{3}$.

16. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 如果 $AD=2$, $BC=10$, 梯形 $ABCD$ 的面积为 48. 取 CD 的中点 E , 连接 AE 并延长, 与 BC 的延长线交于点 F . 如果 $\angle DAF=\angle ABC$, 那么 AB 的长是_____.



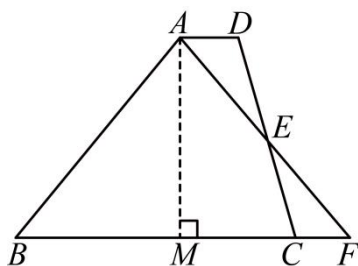
【答案】10

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，勾股定理，熟练掌握以上知识点是解题的关键。过点A作 $AM \perp BC$ 于点M，根据梯形的面积可求得AM，然后利用AAS可证得

$\triangle DAE \cong \triangle CFE$ ，得到 $S_{\triangle DAE} = S_{\triangle CFE}$ ，进而可推出 $S_{\triangle ABF} = 48$ ，即可求得BF，然后由 $\angle DAF = \angle ABC$ ，可知 $\angle ABC = \angle AFB$ ，根据等角对等边可知 $\triangle ABF$ 为等腰三角形，然后利用三线合一和勾股定理即可求得AB。

【详解】解：过点A作 $AM \perp BC$ 于点M，如图所示，



$\because AD = 2$ ， $BC = 10$ ，梯形ABCD的面积为48，

$$\therefore \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AM = 48, \text{ 即 } \frac{1}{2}(2 + 10) \cdot AM = 48,$$

$$\therefore AM = 8,$$

$\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle DAE = \angle CFE, \angle ADE = \angle FCE,$$

又 $\because$ 点E为CD的中点，

$$\therefore DE = CE,$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle CFE (\text{AAS}),$$

$$\therefore S_{\triangle DAE} = S_{\triangle CFE},$$

$$\therefore S_{\text{梯形}ABCD} = S_{\text{四边形}ABCE} + S_{\triangle DAE} = S_{\text{四边形}ABCE} + S_{\triangle CFE} = S_{\triangle ABF} = 48,$$

$$\therefore \frac{1}{2}BF \cdot AM = 48, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 8 \times BF = 48,$$

$$\therefore BF = 12,$$

$$\because \angle DAF = \angle ABC, \quad \angle DAE = \angle CFE,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle AFB,$$

$$\therefore AB = AF,$$

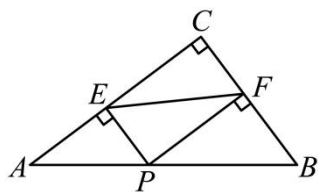
$$\because AM \perp BF,$$

$$\therefore BM = MF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2} \times 12 = 6,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

故答案为：10.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，点 P 为斜边 AB 上一动点，过点 P 作 $PE \perp AC$ ， $PF \perp BC$ ，垂足分别为点 E 、 F ，连接 EF ，则线段 EF 的最小值为_____.



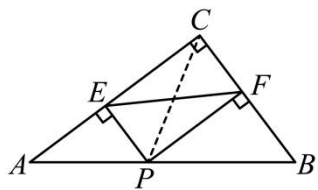
【答案】 2.4

【解析】

【分析】连接 PC ，当 $CP \perp AB$ 时， PC 最小，利用三角形面积解答即可.

本题主要考查的是矩形的判定与性质，关键是根据矩形的性质和三角形的面积公式解答.

【详解】解：解：连接 PC ，



$$\because PE \perp AC, \quad PF \perp BC,$$

$$\therefore \angle PEC = \angle PFC = \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ECFP$ 是矩形,

$$\therefore EF = PC,$$

$\therefore$ 当 PC 最小时， EF 也最小，

即当 $CP \perp AB$ 时， PC 最小，

$$\because AC = 4, \quad BC = 3,$$

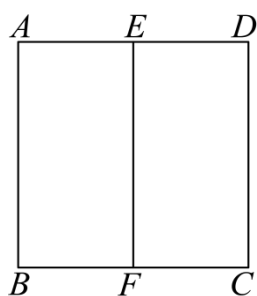
$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$$\therefore PC \text{ 的最小值为: } \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4.$$

$\therefore$ 线段 EF 长的最小值为 2.4,

故答案为: 2.4.

18. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别为边 AD 、 BC 的中点, 点 P 在边 CD 上, 如果将 $\triangle BPC$ 沿直线 BP 翻折后, 点 C 恰好落在线段 EF 上的点 Q 处, 线段 EQ 的长为 1, 那么正方形 $ABCD$ 的边长为_____.



【答案】 $4 + 2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3} + 4$

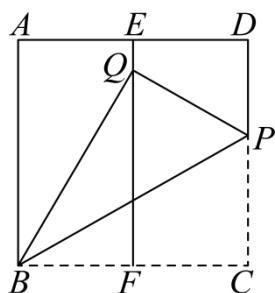
【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质, 勾股定理, 折叠的性质, 解一元二次方程, 解题的关键是掌握正方形的性质和折叠的不变性.

先得到四边形 $AEFB$ 为矩形, 根据正方形的性质以及折叠的性质得到可设 $BQ = BC = AB = EF = 2x$,

$BF = x$, $FQ = 2x - 1$, 在 $\text{Rt}\triangle BFQ$ 中由勾股定理建立方程 $x^2 + (2x - 1)^2 = (2x)^2$, 即可求解.

【详解】 解: 如图:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AD = BC = AB$, $\angle A = 90^\circ$, $AD \parallel BC$,

$\because$ 点 E 、 F 分别为边 AD 、 BC 的中点,

$\therefore AE = BF$,

$\therefore$ 四边形 $AEFB$ 为平行四边形,

$\because \angle A = 90^\circ$,

∴ 四边形 $AEFB$ 为矩形,

∴ $EF = AB$, $EF \perp BC$,

∴ 翻折,

∴ $BQ = BC$,

设正方形的边长为 $2x$, 则 $BQ = BC = AB = EF = 2x$, $BF = x$, $FQ = 2x - 1$,

∴ 在 $\text{Rt}\triangle BFQ$ 中, 由勾股定理得: $x^2 + (2x - 1)^2 = (2x)^2$,

解得: $x = 2 + \sqrt{3}$ 或 $x = 2 - \sqrt{3}$ (舍),

∴ 正方形的边长为 $2x = 4 + 2\sqrt{3}$,

故答案为: $4 + 2\sqrt{3}$.

三、解答题 (6+6+6+8+7+9+10, 共 52 分)

19. 已知一次函数 $y = kx + b$ 平行于直线 $y = -4x$, 且与函数 $y = -\frac{4}{x}$ 有一个交点 $A(2, m)$, 求:

(1) 一次函数的解析式.

(2) 此一次函数与两坐标轴围成的三角形面积.

【答案】(1) $y = -4x + 6$

(2) $\frac{9}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查了待定系数法求一次函数解析式, 一次函数与反比例函数的交点问题, 求一次函数与坐标轴围成的图形面积.

(1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 先求得直线与坐标轴的交点坐标, 再利用三角形面积公式求解即可.

【小问 1 详解】

解: ∵ 一次函数 $y = kx + b$ 平行于直线 $y = -4x$,

∴ $k = -4$,

把 $A(2, m)$ 代入 $y = -\frac{4}{x}$ 得: $m = -\frac{4}{2} = -2$,

∴ $A(2, -2)$,

∴ 一次函数 $y = kx + b$ 与函数 $y = -\frac{4}{x}$ 有一个交点 $A(2, -2)$,

∴把 $A(2, -2)$ 代入 $y = -4x + b$ 得: $-4 \times 2 + b = -2$,

解得: $b = 6$,

∴一次函数的解析式为 $y = -4x + 6$.

【小问 2 详解】

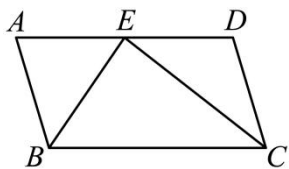
解: 令 $y = 0$, 则 $-4x + 6 = 0$, 解得: $x = \frac{3}{2}$,

令 $x = 0$, 则 $y = 6$,

∴一函数 $y = -4x + 6$ 与 y 轴的交点为 $(0, 6)$, 与 x 轴的交点为 $(\frac{3}{2}, 0)$,

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

20. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 为 AD 中点, 把图中的线段都画成有向线段.



(1) 填空: 在这些有向线段表示的向量中, 与 $\overrightarrow{DE}$ 相等的向量是_____, 与 $\overrightarrow{DE}$ 互为相反向量的向量是_____;

(2) 在图中求作: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DE}$. (不写作法, 保留作图痕迹, 写出结论)

【答案】(1) $\overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{ED}$ 、 $\overrightarrow{AE}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了向量的加减法, 相等向量、相反向量的定义, 掌握相关知识点是解题的关键.

(1) 根据两个向量模一样, 方向一样即为相等向量, 两个向量模一样, 方向相反即为相反向量进行求解即可;

(2) 由题意得 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD}$, 则 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DE}$ 化为 $\overrightarrow{BD}$, 即可作图.

【小问 1 详解】

解: ∵点 E 为 AD 中点,

$$\therefore AE = DE,$$

∴ $\overrightarrow{EA}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 方向相同, 且模一样

∴与 $\overrightarrow{DE}$ 相等的向量是 $\overrightarrow{EA}$,

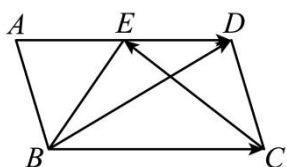
$\therefore \overrightarrow{ED}$ 、 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 方向相反，且模一样，

$\therefore$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 互为相反向量的向量是 $\overrightarrow{ED}$ 、 $\overrightarrow{AE}$ ，

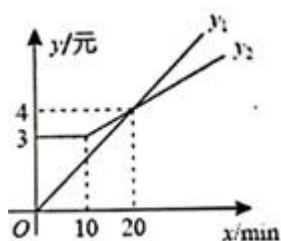
故答案为： $\overrightarrow{EA}$ ； $\overrightarrow{ED}$ 、 $\overrightarrow{AE}$ ；

【小问 2 详解】

解：如图： $\overrightarrow{BD}$ 即为所求：



21. 共享电动车是一种新理念下的交通工具，主要面向 $3 \sim 10\text{km}$ 的出行市场现有 A 、 B 品牌的共享电动车，收费与骑行时间之间的函数关系如图所示，其中 A 品牌收费方式对应 y_1 ， B 品牌的收费方式对应 y_2 。



(1) 请求出两个函数关系式。

(2) 如果小明每天早上需要骑行 A 品牌或 B 品牌的共享电动车去工厂上班，已知两种品牌共享电动车的平均行驶速度均为 20km/h ，小明家到工厂的距离为 6km ，那么小明选择哪个品牌的共享电动车更省钱呢？

(3) 直接写出第几分钟，两种收费相差 1.5 元。

【答案】(1) $y_1 = 0.2x (x > 0)$ ， $y_2 = \begin{cases} 3 (0 < x \leq 10) \\ 0.1x + 2 (x > 10) \end{cases}$

(2) 小明选择 A 品牌的共享电动车更省钱

(3) 第 7.5 分钟或 35 分钟时，两种收费相差 1.5 元

【解析】

【分析】(1) 把点 $(20, 4)$ 代入 $y_1 = k_1x$ 中，求出 y_1 ，再根据图象得到 y_2 为分段函数，自变量的取值范围确定为：骑行时间不超过 10min 时，骑行时间超过 10min 时，算出其函数解析式即可；

(2) 先利用速度和路程计算出时间，再根据时间所在的范围比较两个函数值的大小，进行选择即可；

(3) 根据费用差，分时间段讨论，骑行时间低于 10min ，则得到 $y_1 = 0.2x = 1.5$ ，当骑行时间超过 10min 时，得到 $0.2x - 0.1x - 2 = 1.5$ ，最后计算出结果即可。

【小问 1 详解】

解：设 $y_1 = k_1 x$ ，把点 $(20, 4)$ 代入 $y_1 = k_1 x$ 中，得：

$$k_1 = 0.2.$$

$$\therefore y_1 = 0.2x (x > 0);$$

由图象可知，当 $0 < x \leq 10$ 时， $y_2 = 3$ ，

当 $x > 10$ 时，设 $y_2 = k_2 x + b$ ，把点 $(10, 3)$ 和点 $(20, 4)$ 代入 $y_2 = k_2 x + b$ 中，

$$\text{得：} \begin{cases} 10k_2 + b = 3 \\ 20k_2 + b = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_2 = 0.1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore y_2 = \begin{cases} 3 (0 < x \leq 10) \\ 0.1x + 2 (x > 10) \end{cases},$$

【小问 2 详解】

$$6 \div 20 = 0.3(\text{h}), \quad 0.3\text{h} = 18\text{min},$$

$$\therefore 18 < 20,$$

由图象可知，当骑行时间不足 20min 时， $y_1 < y_2$ ，即骑行 A 品牌的共享电动车更省钱.

$\therefore$ 小明选择 A 品牌的共享电动车更省钱.

【小问 3 详解】

①当骑行时间不超过 10min 时，

$$\therefore 3 - 1.5 = 1.5 \text{ (元)},$$

$$\therefore y_1 = 0.2x = 1.5,$$

$$\therefore x = 7.5,$$

②当骑行时间超过 10min 时，

$$\text{当 } y_2 > y_1 \text{ 时：} (0.1x + 2) - 0.2x = 1.5,$$

$$\text{解得：} x = 5,$$

$$\therefore \text{骑行时间超过 } 10\text{min},$$

$$\therefore x = 5, \text{ 不符合题意，舍去},$$

当 $y_2 < y_1$ 时: $0.2x - (0.1x + 2) = 1.5$,

解得: $x = 35$,

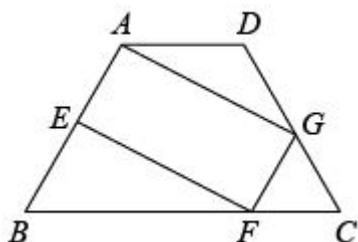
$\therefore$ 第 7.5 分钟或 35 分钟时, 两种收费相差 1.5 元.

【点睛】 本题主要考查了一次函数的实际应用, 关键在于熟悉待定系数法、分段函数的特点, 在解题时注意分类讨论.

22. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = \angle C$. 点 E 、 F 、 G 分别在边 AB 、 BC 、 CD 上, $AE = GF = GC$.

(1) 求证: 四边形 $AEFG$ 是平行四边形;

(2) 当 $\angle FGC = 2\angle EFB$ 时, 求证: 四边形 $AEFG$ 是矩形.



【答案】 (1) 见详解; (2) 见详解

【解析】

【详解】 证明: (1) $\because FG = GC$

$$\therefore \angle GFC = \angle C$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形

$$\therefore \angle B = \angle C$$

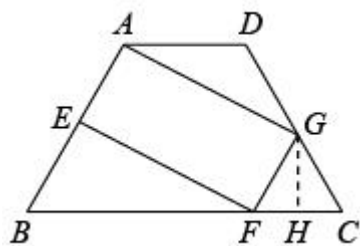
$$\therefore \angle GFC = \angle C$$

$$\therefore GF \parallel AE$$

$$\because GF = AE$$

$\therefore$ 四边形 $AEFG$ 是平行四边形

(2) 作 $GH \perp FC$



$$\because GF = GC$$

$$\therefore \angle FGC = 2\angle GFH$$

$$\therefore \angle FGC = 2\angle EFB$$

$$\therefore \angle FGH = \angle EFB$$

$$\therefore \angle GFH + \angle FGH = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EFB + \angle GFH = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EFG = 90^\circ$$

$\therefore \square AEFG$ 是矩形

23. 我们知道平行四边形是中心对称图形. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 如图所示, 请只用一把无刻度的直尺, 按要求作出相应的图形. (不写作法, 保留作图痕迹)

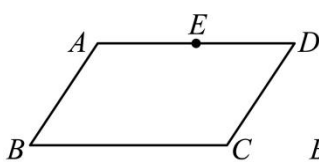


图1

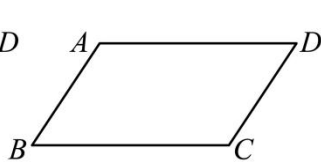


图2

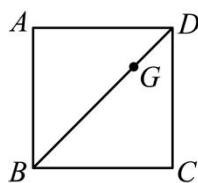


图3

- (1) 如图 1, 点 E 是边 AD 的中点, 作出边 BC 的中点 F ;
- (2) 如图 2, 在平行四边形 $ABCD$ 的四边上各作一点, 分别记为 M 、 N 、 P 、 Q , 使得四边形 $MNPQ$ 是平行四边形;
- (3) 如图 3, 若四边形 $ABCD$ 为正方形, 点 G 在对角线 BD 上一点 ($BG > GD$), 作一个菱形, 使得 AG 为菱形的一边.

【答案】 (1) 图见解析

(2) 图见解析 (3) 图见解析

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的判定和性质, 正方形的性质, 菱形的判定, 无刻度直尺作图:

- (1) 连接 AC, BD , 连接 E 和线段 AC, BD 的交点, 并延长, 交 BC 于点 F 即可, 根据平行四边形的性质, 易证 $\triangle AOE \cong \triangle COF$, 得到 $AE = CF$, 即可;
- (2) 连接 AC, BD 交于点 O , 分别过点 O 作线段, 交平行四边形的四边于 M, N, P, Q , 同 (1) 可得全等三角形, 进而推出 MP, NQ 互相平分, 进而得到四边形 $MNPQ$ 是平行四边形;
- (3) 连接 AC 交 BD 于点 O , 延长 AG 交 CD 于一点, 连接该点于点 O 并延长, 交 AB 于一点, 连接该点和点 C 交 BD 于点 H , 连接 CG 并延长交 AD 于一点, 连接 AH 并延长 BC 于一点, 同 (2) 可得两个平行四边形, 进而得到四边形 $AHCG$ 的两组对边平行, 得到四边形 $AHCG$ 是平行四边形, 易得 $\triangle ADG \cong \triangle CDG$,

得到 $AG = CG$ ，根据邻边相等的平行四边形是菱形，即可得到四边形 $AHCG$ 为菱形.

【小问 1 详解】

解：如图，点 F 即为所求；

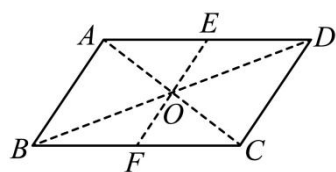


图1

【小问 2 详解】

如图，四边形 $MNPQ$ 即为所求；

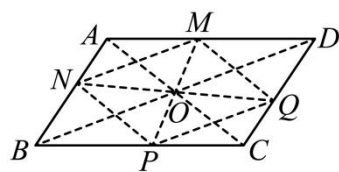


图2

【小问 3 详解】

如图，菱形 $AHCG$ 即为所求；

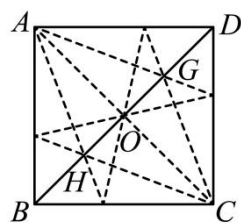
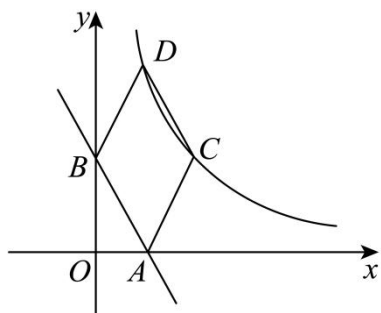


图3

24. 如图，直线 $y = -2x + b$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 $B(0, 2)$ ，将直线 AB 向右平移 $m(m > 0)$ 个单位，交反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在第一象限的图像于 C, D 两点，联结 AC, BD 。



(1) 求点 A 坐标；

(2) 如果 $m = 2$ ，且满足 $AB = AC$ ，求 k 的值；

(3) 延长 DC 交 x 轴于点 E ，如果 $k = \frac{4}{3}$ ，且四边形 $ABDE$ 为等腰梯形，求 m 的值.

【答案】 (1) $A(1, 0)$

(2) 4 (3) $\frac{5}{6}$

【解析】

【分析】(1) 先由待定系数法求出函数解析式，再令 $y=0$ ，解方程即可；

(2) 先根据平移求出直线 CD 表达式，设出点 C 的参数坐标，再由 $AB=AC$ ，根据两点间距离公式建立方程求解；

(3) 延长 DB 交 x 轴于点 I ，由等腰梯形的性质结合平行线导角得到 $IB=IA$ ，设 $I(i,0)$ ，则 $(1-i)^2=i^2+4$ ，求得 $I\left(-\frac{3}{2},0\right)$ ，求出直线 BD 表达式为 $y=\frac{4}{3}x+2$ ，与反比例函数解析式联立求出 $D\left(\frac{1}{2},\frac{8}{3}\right)$ ，再直线 CD

表达式为： $y=-2x+\frac{11}{3}$ ，则 $E\left(\frac{11}{6},0\right)$ ，那么 $m=\frac{11}{6}-1=\frac{5}{6}$ 。

【小问 1 详解】

解：由题意得，将 $B(0,2)$ 代入 $y=-2x+b$ 得 $b=2$ ，

$\therefore$ 直线的解析式为 $y=-2x+2$ ，

当 $y=0$ 时， $-2x+2=0$ ，

解得： $x=1$ ，

$\therefore A(1,0)$ ；

【小问 2 详解】

解：由题意得将 $A(1,0)$ 向右平移 2 个单位后的点为 $(3,0)$ ， $k_{AB}=k_{CD}=-2$ ，

$\therefore$ 设直线 CD 表达式为： $y=-2x+n$ ，

代入 $(3,0)$ 得， $-6+n=0$ ，

解得： $n=6$ ，

$\therefore$ 直线 CD 表达式为 $y=-2x+6$ ，

设 $C(c,-2c+6)$ ，

$\because AB=AC$ ，

$\therefore 1^2+2^2=(c-1)^2+(-2c+6)^2$ ，

解得： $c=\frac{16}{5}$ (舍) 或 $c=2$ ，

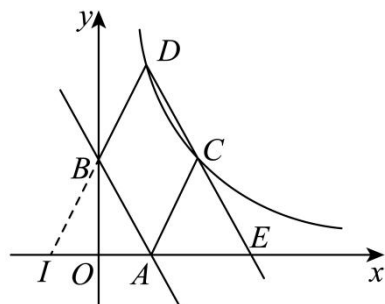
$\therefore C(2,2)$ ，

将 $C(2,2)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得, $k = 2 \times 2 = 4$,

反比例函数解析式为: $y = \frac{4}{x}$;

【小问 3 详解】

解: 延长 DB 交 x 轴于点 I



$\because$ 四边形 $ABDE$ 是等腰梯形,

$\therefore \angle BDE = \angle AED$, $AB \parallel DE$,

$\therefore \angle IBA = \angle BDE$, $\angle IAB = \angle AED$,

$\therefore \angle IBA = \angle IAB$,

$\therefore IB = IA$,

设 $I(i, 0)$,

则 $(1-i)^2 = i^2 + 4$,

解得: $i = -\frac{3}{2}$,

$\therefore I\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$,

设直线 BD 表达式为: $y = px + q$,

代入 $I\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $B(0, 2)$ 得: $\begin{cases} -\frac{3}{2}p + q = 0 \\ q = 2 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} p = \frac{4}{3} \\ q = 2 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 BD 表达式为 $y = \frac{4}{3}x + 2$,

与反比例函数解析式联立:
$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x + 2 \\ y = \frac{4}{3x} \end{cases},$$

解得: $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = -2$ (舍),

$\therefore D\left(\frac{1}{2}, \frac{8}{3}\right),$

将 $D\left(\frac{1}{2}, \frac{8}{3}\right)$ 代入 $y = -2x + n$ 得, $-2 \times \frac{1}{2} + n = \frac{8}{3},$

解得: $n = \frac{11}{3},$

$\therefore$ 直线 CD 表达式为: $y = -2x + \frac{11}{3},$

当 $y = 0, -2x + \frac{11}{3} = 0,$

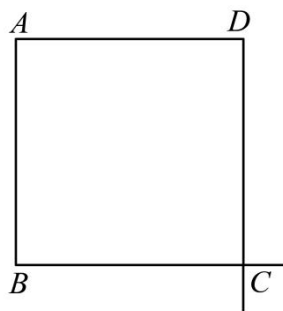
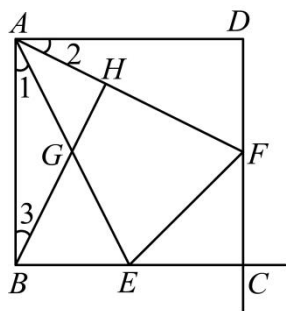
解得: $x = \frac{11}{6},$

$\therefore E\left(\frac{11}{6}, 0\right),$

$\therefore m = \frac{11}{6} - 1 = \frac{5}{6}.$

【点睛】 本题考查了反比例函数与几何综合, 涉及待定系数法求函数解析式, 一次函数的平移问题, 解一元二次方程, 两点间距离公式, 等腰梯形的性质, 等腰三角形的判定等知识点, 熟练掌握各知识点并灵活运用是解题的关键.

25. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别为射线 BC 、射线 DC 上的点, 且满足 $BE = DF$, 联结 AE 、 AF , 点 G 为 AE 的中点, 射线 BG 交 AF 于点 H .



备用图

(1) 如图, 当点 E 在线段 BC 上时,

①证明: $BH \perp AF$;

②联结 FG , 当 $FG \parallel BC$ 时, 求: 四边形 $BEFG$ 的面积与正方形 $ABCD$ 的面积之比.

(2) 当 $AB = 4$, $\frac{GH}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 时, 求: BE 的值.

【答案】(1) ①见解析; ② $\frac{5}{16}$

(2) $8 - 4\sqrt{3}$ 或 $8 + 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) ①先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ (SAS), $\angle 1 = \angle 2$, 由直角三角形斜边中线得到 $GA = GB$, 则 $\angle 1 = \angle 3$, 那么 $\angle 2 = \angle 3$, 由 $\angle 2 + \angle BAH = 90^\circ$, 可得 $\angle 3 + \angle BAH = 90^\circ$, 即可求证;

②延长 FG 交 AB 于点 K , 可得 $CF = BK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$, $KF = BC$, 设正方形边长为 $2x$, 则

$BE = DF = EC = CF = x$, 而 GK 为 $\triangle ABE$ 的中位线, 则 $GK = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}x$, 那么 $GF = KF - KG = \frac{3}{2}x$,

最后由 $\frac{S_{\text{四边形}BEFG}}{S_{\text{正方形}ABCD}} = \frac{(FG + BE) \times FC \times \frac{1}{2}}{AB \times BC}$ 即可求解;

(2) 当点 E 在线段 BC 上时, 在 AF 上截取 $HK = HA$, 则 GH 为 $\triangle AEK$ 的中位线, 那么

$GH \parallel EK$, $GH = \frac{1}{2}EK$, 则 $\frac{\frac{1}{2}EK}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 即 $\frac{EK}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 可得 $\frac{KF}{EF} = \frac{1}{2}$, 根据 30° 角直角三角形的性质

逆定理可得 $\angle KEF = 30^\circ$, 导角得到 $\angle FAD = 15^\circ$, 在 AD 上取点 T , 连接 FT , 使得 $TA = TF$, 则

$\angle DTF = 30^\circ$, 那么 $TF = 2DF$, 设 $TA = TF = 2n$, 则 $DF = n$, 则 $DT = \sqrt{TF^2 - DF^2} = \sqrt{3}n$, 有

$AT + TD = AD$, 得 $\sqrt{3}n + 2n = 4$, 即可求解; 当点 E 在线段 BC 延长线上时, 在 AF 上截取 $HK = HA$,

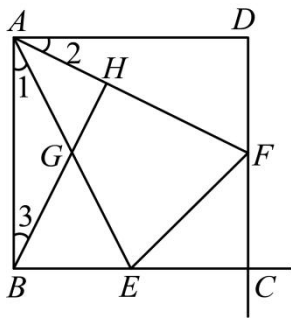
同理可得: $\angle EFK = 60^\circ$, $\angle CFE = 45^\circ$, 则 $\angle AFD = \angle KFE - \angle CFE = 15^\circ$, 在 DF 上取点 R , 连接 AR ,

使得 $RA = RF$, 同理可得: $\angle ARD = 30^\circ$, 同理可得 $AR = 2AD = 8$, $DR = \sqrt{3}AD = 4\sqrt{3}$, 那么

$DF = DR + RF = 8 + 4\sqrt{3}$.

【小问 1 详解】

证明: ①如图:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB = AD, \angle ABE = \angle ADF = \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ,$

$\because BE = DF,$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$ (SAS),

$\therefore \angle 1 = \angle 2,$

$\because G$ 为 AE 的中点, $\angle ABE = 90^\circ,$

$\therefore GA = GB,$

$\therefore \angle 1 = \angle 3,$

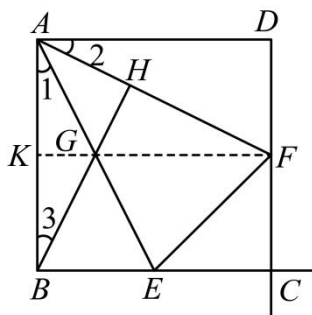
$\therefore \angle 2 = \angle 3,$

$\because \angle 2 + \angle BAH = 90^\circ,$

$\therefore \angle 3 + \angle BAH = 90^\circ,$

$\therefore BH \perp AF;$

② 延长 FG 交 AB 于点 K ,



$\because GF \parallel BC,$

$\therefore \angle FKB = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ,$

即 $FK \perp AB,$

$\because GA = GB,$

$\therefore$ 点 K 为 AB 中点,

$\therefore \angle FKB = \angle ABC = \angle BCF = 90^\circ,$

∴ 四边形 $KBCF$ 为矩形,

$$\therefore CF = BK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD, KF = BC,$$

$$\therefore BE = DF = EC = CF,$$

设正方形边长为 $2x$, 则 $BE = DF = EC = CF = x$,

∵ K, G 为 AB, AE 的中点,

∴ GK 为 $\triangle ABE$ 的中位线,

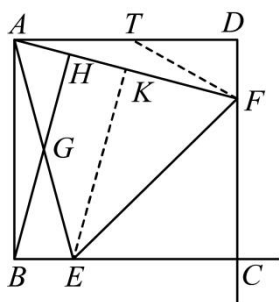
$$\therefore GK = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore GF = KF - KG = \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore \frac{S_{\text{四边形}BEFG}}{S_{\text{正方形}ABCD}} = \frac{(FG + BE) \times FC \times \frac{1}{2}}{AB \times BC} = \frac{\left(\frac{3}{2}x + x\right) \cdot \frac{1}{2}x}{4x^2} = \frac{5}{16};$$

【小问 2 详解】

解: 当点 E 在线段 BC 上时, 在 AF 上截取 $HK = HA$,



∵ G 为 AE 的中点,

∴ GH 为 $\triangle AEK$ 的中位线,

$$\therefore GH \parallel EK, GH = \frac{1}{2}EK,$$

$$\therefore \angle EKA = \angle BHA = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{GH}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}EK}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \frac{EK}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

设 $EK = \sqrt{3}m$, 则 $EF = 2m$,

$$\therefore KF = \sqrt{EF^2 - EK^2} = m ,$$

$$\therefore \frac{KF}{EF} = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore \angle KEF = 30^\circ ,$$

$$\therefore \angle EFK = 90^\circ - \angle KEF = 60^\circ ,$$

$$\therefore BE = DF, BC = CD ,$$

$$\therefore CE = CF ,$$

$$\text{又} \therefore \angle C = 90^\circ ,$$

$$\therefore \triangle CEF \text{ 为等腰直角三角形,}$$

$$\therefore \angle CFE = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle AFD = 180^\circ - \angle CFE - \angle KEF = 75^\circ ,$$

$$\therefore \angle FAD = 15^\circ ,$$

在 AD 上取点 T , 连接 FT , 使得 $TA = TF$,

$$\therefore \angle TAF = \angle TFA = 15^\circ ,$$

$$\therefore \angle DTF = 30^\circ ,$$

$$\therefore TF = 2DF ,$$

设 $TA = TF = 2n$, 则 $DF = n$,

$$\therefore DT = \sqrt{TF^2 - DF^2} = \sqrt{3}n ,$$

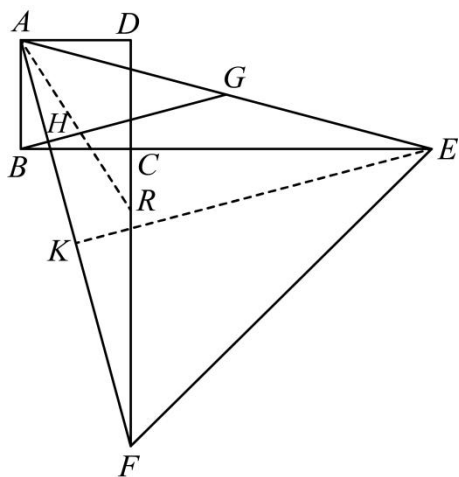
$$\therefore AT + TD = AD ,$$

$$\therefore \sqrt{3}n + 2n = 4 ,$$

$$\text{解得: } n = 8 - 4\sqrt{3} ,$$

$$\therefore BE = DF = 8 - 4\sqrt{3} ;$$

当点 E 在线段 BC 延长线上时, 在 AF 上截取 $HK = HA$,



同理可得： $\angle EFK = 60^\circ$ ， $\angle CFE = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle AFD = \angle KFE - \angle CFE = 15^\circ,$$

在 DF 上取点 R ，连接 AR ，使得 $RA = RF$ ，

同理可得： $\angle ARD = 30^\circ$ ，

$$\therefore \text{同理可得 } AR = 2AD = 8, \quad DR = \sqrt{3}AD = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore DF = DR + RF = 8 + 4\sqrt{3},$$

$$\therefore BE = DF = 8 + 4\sqrt{3},$$

综上： BE 的值 $8 - 4\sqrt{3}$ 或 $8 + 4\sqrt{3}$ 。

【点睛】 本题考查了正方形的性质，勾股定理， 30° 直角三角形的性质及其逆定理，全等三角形的判定与性质，三角形的中位线定理，难度较大，解题的关键在于正确构造辅助线。