

华二附初 2024 学年第二学期八年级数学一起作业

(时间: 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

1. 下列函数中, 是一次函数的是 ()

- A. $y = 3x - 5$ B. $y = x^2$ C. $y = \frac{6}{x}$ D. $y = \frac{1}{x-1}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查一次函数的解析式, 熟练掌握一次函数的定义是解题的关键.

一般的, 形如 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), (k, b 为常数) 的函数叫做一次函数, 根据定义判断即可.

【详解】解: A. $y = 3x - 5$, 符合一次函数的一般形式, 符合题意;

B. $y = x^2$, 自变量次数不为 1, 故不是一次函数, 不符合题意;

C. $y = \frac{6}{x}$, 不符合一次函数的一般形式, 不符合题意;

D. $y = \frac{1}{x-1}$, 不符合一次函数的一般形式, 不符合题意;

故选: A.

2. 下列方程有实数解的是 ()

- A. $\sqrt{x+1} + 2 = 0$ B. $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 1$ C. $\sqrt{x+2} = x$ D. $\frac{1}{x^2+2} = 1$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查无理方程和分式方程, 根据二次根式的性质, 解无理方程和分式方程的步骤, 逐一进行计算并判断即可.

【详解】解: A、方程可变为 $\sqrt{x+1} = -2$,

$\because \sqrt{x+1} \geq 0$,

$\therefore \sqrt{x+1} + 2 = 0$ 无实数根; 不符合题意;

B、 $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 1$,

$\therefore \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$,

$\therefore$ 不等式组无解,

∴ 方程无实数根；不符合题意；

C、 $\sqrt{x+2}=x$ ，

两边平方，得： $x+2=x^2$ ，解得： $x=-1$ 或 $x=2$ ，

经检验， $x=2$ 是原方程的根， $x=-1$ 是原方程的增根，舍去；

∴ 方程有实数解，符合题意；

D、 $\frac{1}{x^2+2}=1$

方程去分母，得： $x^2+2=1$ ，

移项，得： $x^2=-1$ ，此方程无实数根，

∴ 原方程无实数根，不符合题意；

故选 C.

3. 若一次函数 $y=ax+b$ 的图像经过第一、二、四象限，则下列不等式中总是成立的是 ()

A. $b < 0$

B. $a-b > 0$

C. $a^2+b > 0$

D. $a+b > 0$

【答案】C

【解析】

【分析】首先判断 a、b 的符号，再一一判断即可解决问题.

【详解】∵ 一次函数 $y=ax+b$ 的图像经过第一、二、四象限，

∴ $a < 0$ ， $b > 0$ ，故 A 错误；

$a-b < 0$ ，故 B 错误；

$a^2+b > 0$ ，故 C 正确，

$a+b$ 不一定大于 0，故 D 错误.

故选：C.

【点睛】本题考查一次函数与不等式，解题的关键是学会根据函数图象的位置，确定 a、b 的符号，属于中考常考题型.

4. 下列关于向量的等式中，正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$

B. $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BA}| = 0$

C. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BA}| = 0$

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}| = \vec{0}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据向量的模的定义，以及零向量的定义，逐项分析判断即可求解.

【详解】解：A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ，故该选项不正确，不符合题意；

B. $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BA}| = 0$ ，故该选项正确，符合题意；

C. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BA}| \neq 0$ ，故该选项不正确，不符合题意；

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}| \neq \vec{0}$ ，故该选项不正确，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了向量的模的定义，以及零向量的定义，熟练掌握平面向量的相关定义是解题的关键.

5. 下列命题中，正确的是（ ）

A. 对角线互相垂直的四边形是菱形

B. 对角线互相垂直的菱形是正方形

C. 对角线相等的平行四边形是矩形

D. 对角线相等的平行四边形是正方形

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了矩形、菱形、正方形的判定，利用特殊四边形的判定方法进行判断即可.

【详解】解：A. 对角线互相垂直平分的四边形是菱形，故选项错误，不符合题意；

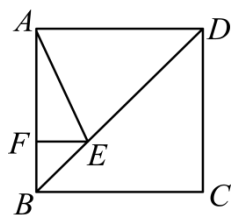
B. 对角线相等的菱形是正方形，故选项错误，不符合题意；

C. 对角线相等的平行四边形是矩形，故选项正确，符合题意；

D. 对角线垂直相等的平行四边形是正方形，故选项错误，不符合题意.

故选：C.

6. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 8，点 E 在对角线 BD 上，且 $\angle BAE = 22.5^\circ$ ， $EF \perp AB$ ，垂足为 F ，则 EF 的长为（ ）



A. 2

B. 4

C. $8 - 4\sqrt{2}$

D. $6\sqrt{2} - 8$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了正方形的性质，等腰直角三角形的性质，等腰三角形的判定和性质，证得 $\triangle DAE$ 是等腰直角三角形是解题的关键.

根据正方形的性质得到 $\angle ABD = \angle ADB = 45^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, 求得 $BD = 8\sqrt{2}$, 根据等腰三角形的判定定理得到 $AD = DE = 8$, 推出 $\triangle DAE$ 是等腰直角三角形, 于是得到结论.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = 45^\circ, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\because AB = AD = 8,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2},$$

$$\because \angle BAE = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle DEA = 180^\circ - 67.5^\circ - 45^\circ = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DEA,$$

$$\therefore AD = DE = 8,$$

$$\therefore BE = BD - DE = 8\sqrt{2} - 8,$$

$$\because EF \perp BC,$$

$$\therefore \triangle DAE \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore BE^2 = EF^2 + BF^2 = 2EF^2,$$

$$\therefore EF = \frac{\sqrt{2}}{2} CE = 8 - 4\sqrt{2},$$

故选: C.

二、填空题 (本大题共 12 个小题, 每小题 2 分, 共 24 分)

7. 直线 $y = 2x - 1$ 的截距是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】根据截距的定义: 直线 $y = kx + b$ 中, b 就是截距, 即可得到答案.

【详解】解: 令 $x = 0$, 得 $y = -1$,

$$\therefore \text{直线 } y = 2x - 1 \text{ 的截距是 } -1,$$

故答案为: -1.

【点睛】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征及一次函数性质, 熟记截距的定义是解题的关键.

8. 已知关于 x 的方程 $2x^2 + mx + 3 = 8$ 是二项方程, 那么 $m =$ _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查高次方程，利用方程的项数得出方程不含一次项是解题的关键.

根据二项方程可得不含 mx 这一项解题即可.

【详解】 解： $\because$ 方程 $2x^2 + mx + 3 = 8$ 是二项方程，

$\therefore mx = 0$ ，即 $m = 0$ ，

故答案为：0.

9. 用换元法解方程 $\frac{x^2+1}{4x} + \frac{4x}{x^2+1} = 2$ 时，如果设 $\frac{x^2+1}{4x} = y$ ，那么原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 2y + 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解法—换元法，换元法的一般步骤为：设元，换元，解元，还原.

根据换元法的步骤进行化简即可.

【详解】 解： 设 $\frac{x^2+1}{4x} = y$ ，

则原方程可化为： $y + \frac{1}{y} = 2$

整理，得 $y^2 - 2y + 1 = 0$

故答案为： $y^2 - 2y + 1 = 0$.

10. 直线 $y = kx + b$ 与 $y = -5x + 1$ 平行，且经过 $(2, 1)$ ，则 $k + b =$ _____.

【答案】 6

【解析】

【详解】 $\because$ 直线 $y = kx + b$ 与 $y = -5x + 1$ 平行，

$\therefore k = -5$ ，

$\because$ 直线 $y = kx + b$ 过 $(2, 1)$ ，

$\therefore -10 + b = 1$ ，

解得： $b = 11$.

$\therefore k + b = -5 + 11 = 6$

11. 已知一次函数 $y = (m+2)x - (m+3)$, y 随 x 的增大而减小, 且图象与 y 轴的交点在 x 轴下方, 则实数 m 的取值范围是_____

【答案】 $-3 < m < -2$

【解析】

【分析】 根据 y 随 x 的增大而减小可知 $(m+2) < 0$, 根据图象与 y 轴的交点在 x 轴下方则 $-(m+3) < 0$, 解不等式组即可求得 m 的取值范围.

【详解】 一次函数 $y = (m+2)x - (m+3)$,

$\because y$ 随 x 的增大而减小,

$$\therefore (m+2) < 0,$$

解得 $m < -2$,

$\because$ 图象与 y 轴的交点在 x 轴下方,

$$\therefore -(m+3) < 0,$$

$$\therefore m > -3,$$

$$\therefore -3 < m < -2.$$

故答案为: $-3 < m < -2$.

【点睛】 本题考查了一次函数图像的性质, 根据增减性和与 y 轴的交点确定参数是解题的关键.

12. 一个多边形的内角和是 1080° , 则这个多边形是_____边形.

【答案】 八

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的内角和公式, 熟记多边形的内角和公式为 $(n-2) \times 180^\circ$ 是解答本题的关键. 根据多边形内角和公式求解即可.

【详解】 设这个多边形是 n 边形,

$$\text{由题意得 } (n-2) \cdot 180^\circ = 1080^\circ,$$

解得 $n = 8$,

$\therefore$ 这个多边形是八边形.

故答案为: 八.

13. 某企业的年产值三年内从 1000 万元增加到 1331 万元, 如果这三年中每年的增长率相同, 在求这三年中每年的增长率时, 如果设这三年中每年的增长率为 x , 那么可以列出的方程是_____.

【答案】 $1000(1+x)^2 = 1331$

【解析】

【详解】由于某企业的年产值三年内从 1000 万元增加到 1331 万元，如果这三年中每年的增长率相同，在求这三年中每年的增长率时设这三年中每年的增长率为 x ，那么第二年变为 $1000(1+x)$ ，然后依此类推即可列出方程.

解：∵企业的年产值三年内从 1000 万元增加到 1331 万元，这三年中每年的增长率相同，

∴设这三年中每年的增长率为 x ，那么可以列出的方程是

$$1000(1+x)^2=1331.$$

14. 已知直线 $y=kx+b$ ($k<0$) 经过点 $(-1,0)$ ，那么不等式 $kx+b>0$ 的解集是_____.

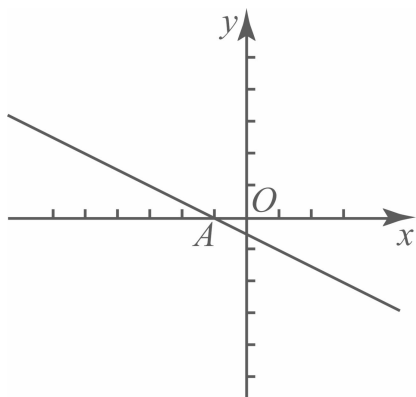
【答案】 $x<-1$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数与一元一次不等式的关系：从函数的角度看，就是寻求使一次函数 $y=kx+b$ 的值大于（或小于）0 的自变量 x 的取值范围；从函数图象的角度看，就是确定直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上(或下)方部分所有的点的横坐标所构成的集合.

不等式 $kx+b>0$ 的解集为直线 $y=kx+b$ 落在 x 轴上方的部分对应的 x 的取值范围.

【详解】解：∵直线 $y=kx+b$ ($k<0$) 经过点 $A(-1,0)$ ，如图所示，

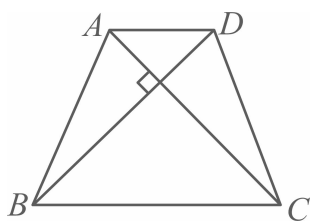


∴不等式 $kx+b>0$ 的解集为直线 $y=kx+b$ 落在 x 轴上方的部分对应的 x 的取值范围，

即 $x<-1$.

故答案为： $x<-1$.

15. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD\parallel BC$ ， $AC\perp BD$ ， 已知 $AC=m$ ， $BD=n$ ， 那么梯形 $ABCD$ 的中位线长是_____（用含 m 、 n 的式子表示）.



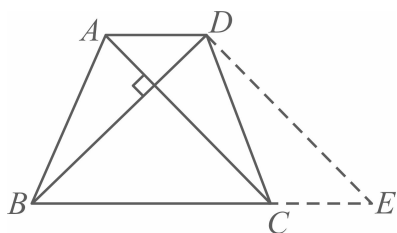
【答案】 $\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的判定与性质，梯形中位线性质，勾股定理，正确作出辅助线构造平行四边形是解题的关键.

过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 于 E ，证明四边形 $ACED$ 是平行四边形，得到 $AD = CE$ ， $DE = AC = m$ ，再证明 $\angle BDE = 90^\circ$ ，然后由勾股定理，求得 $BE = \sqrt{m^2 + n^2}$ ，从而求得 $AD + BC = CE + BC = BE = \sqrt{m^2 + n^2}$ ，然后由梯形的中位线定理求解即可.

【详解】 解：过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 于 E ，如图，



$\because AD \parallel BC$ ， $DE \parallel AC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形，

$\therefore AD = CE$ ， $DE = AC = m$ ，

$\because AC \perp BD$ ， $DE \parallel AC$ ，

$\therefore DE \perp BD$ ，

$\therefore \angle BDE = 90^\circ$ ，

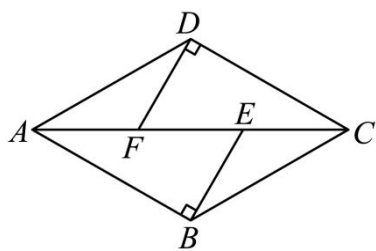
由勾股定理，得 $BE = \sqrt{CE^2 + BD^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$ ，

$\therefore AD + BC = CE + BC = BE = \sqrt{m^2 + n^2}$ ，

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 的中位线长 $= \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$ ，

故答案为： $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$.

16. 如图，菱形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $BE \perp AB$ ， $DF \perp CD$ ，垂足分别为 B ， D ，若 $AB = 6\text{cm}$ ，则 $EF =$ _____ cm .



【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据菱形的性质，含 30° 直角三角形的性质，及三角函数即可得出结果.

【详解】 解：在菱形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle DAB = \angle DCB = 60^\circ, \angle BAC = \angle DAC = \angle DCF = \frac{1}{2}\angle DAB = 30^\circ,$$

$$\because DF \perp CD,$$

$$\therefore \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFC = 90^\circ - \angle DCF = 60^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDF \text{ 中, } DF = \frac{1}{2}CF,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle DFC - \angle DAF = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle ADF,$$

$$\therefore AF = DF = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{3}AC,$$

$$\text{同理, } CE = \frac{1}{3}AC,$$

$$\therefore EF = AC - AF - CE = \frac{1}{3}AC,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AE,$$

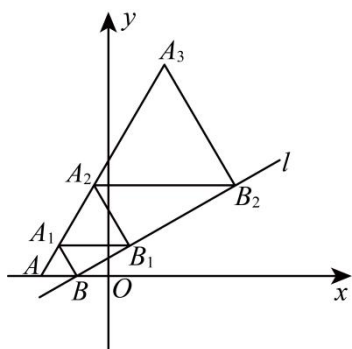
$$\text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 中, } AE = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AE = 2\sqrt{3}.$$

故答案为： $2\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了菱形的性质，含 30° 直角三角形的性质，及三角函数等知识，熟练掌握菱形的性质是解题的关键.

17. 如图，在平面直角坐标系中，点 $A(-2,0)$ ，直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 x 轴交于点 B ，以 AB 为边作等边 $\triangle ABA_1$ ，过点 A_1 作 $A_1B_1 \parallel x$ 轴，交直线 l 于点 B_1 ，以 A_1B_1 为边作等边 $\triangle A_1B_1A_2$ ，过点 A_2 作 $A_2B_2 \parallel x$ 轴，交直线 l 于点 B_2 ，以 A_2B_2 为边作等边 $\triangle A_2B_2A_3$ ，以此类推...，则点 A_{2025} 的纵坐标是_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}(2^{2025}-1)}{2}$

【解析】

【分析】 根据 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ 求出点 B 的坐标，得到 $AB=1$ ，根据等边三角形的性质，分别求得 A_1 、 A_2 、 A_3 的纵坐标，进而得到 A_n 的纵坐标，可得点 A_{2025} 的纵坐标. 本题主要考查了图形规律题，结合一次函数的性质，等边三角形的性质求解是解题的关键.

【详解】 解： $\because$ 直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 x 轴交于点 B ,

把 $y=0$ 代入得： $0 = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$,

解得： $x = -1$,

$\therefore B(-1,0)$,

$\therefore OB = 1$,

$\because A(-2,0)$,

$\therefore OA = 2$,

$\therefore AB = 1$,

$\therefore \triangle ABA_1$ 是等边三角形,

$$\therefore x_{A_1} = -\left(\frac{1}{2}AB + OB\right) = -\left(\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore y_{A_1} = -\sqrt{AA_1^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = -\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore A_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

把 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 代入 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ 得, $x = \frac{1}{2}$,

$$\therefore B_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore A_1B_1 = 2,$$

同理得 $A_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$

把 $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 代入 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ 得, $x = \frac{7}{2}$,

$$\therefore B_2\left(\frac{7}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore A_2B_2 = 4,$$

$$\therefore \text{同理得 } A_3\left(\frac{3}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right),$$

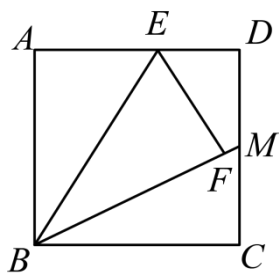
.....,

$$\therefore A_n \text{ 的纵坐标为 } \frac{\sqrt{3}(2^n - 1)}{2},$$

$$\therefore \text{点 } A_{2025} \text{ 的纵坐标是 } \frac{\sqrt{3}(2^{2025} - 1)}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}(2^{2025} - 1)}{2}.$

18. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4\text{cm}$, 点 E 在边 AD 上, 连结 BE , 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 翻折, 点 A 的对应点为点 F . 当直线 BF 恰巧经过 CD 的中点 M 时, AE 的长为_____ cm .



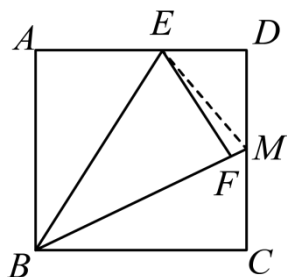
【答案】 $(2\sqrt{5}-2)$

【解析】

【分析】 本题考查正方形的折叠问题，勾股定理，熟练掌握正方形与折叠的性质是解题的关键.

连接 EM ，先由勾股定理求出 $BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = 2\sqrt{5}\text{cm}$ ，再由折叠的性质可知： $AE = EF$ ，
 $AB = BF = 4\text{cm}$ ，则 $FM = BM - BF = (2\sqrt{5} - 4)\text{cm}$ ，设 $AE = EF = x\text{cm}$ ，则 $ED = (4 - x)\text{cm}$ ，由勾股定理得：
 $EM^2 = EF^2 + FM^2 = ED^2 + DM^2$ ，即 $x^2 + (2\sqrt{5} - 4)^2 = (4 - x)^2 + 2^2$ ，解得： $x = 2\sqrt{5} - 2$ ，即可求解.

【详解】 解：连接 EM ，



$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 中， $AB = 4\text{cm}$ ，

$\therefore AD = BC = CD = AB = 4\text{cm}$ ，

$\therefore$ 点 M 是 CD 的中点，

$\therefore CM = DM = 2\text{cm}$ ，

$\therefore BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}(\text{cm})$

由折叠的性质可知： $AE = EF$ ， $AB = BF = 4\text{cm}$ ，

$\therefore FM = BM - BF = (2\sqrt{5} - 4)\text{cm}$ ，

设 $AE = EF = x\text{cm}$ ，则 $ED = (4 - x)\text{cm}$ ，

由勾股定理得： $EM^2 = EF^2 + FM^2 = ED^2 + DM^2$ ，

$\therefore x^2 + (2\sqrt{5} - 4)^2 = (4 - x)^2 + 2^2$ ，

解得: $x = 2\sqrt{5} - 2$,

$$\therefore AE = (2\sqrt{5} - 2)\text{cm},$$

故答案为: $(2\sqrt{5} - 2)$.

三、解答题 (本大题共 8 个小题, 共 58 分)

19. 解方程: $\frac{x}{x-2} - \frac{8}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$.

【答案】原方程的根是 $x = -3$.

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解: 方程两边乘 $(x-2)(x+2)$,

$$\text{得 } x(x+2) - 8 = x - 2,$$

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

$$(x+3)(x-2) = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -3, \quad x_2 = 2.$$

经检验: $x_1 = -3$ 是原方程的根, $x_2 = 2$ 是增根.

$\therefore$ 原方程的根是 $x = -3$.

【点睛】本题考查分式方程的解法, 掌握分式方程的解题的步骤是解题的关键, 注意检验.

20. 解方程: $x + \sqrt{2x-3} = 3$.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】本题考查了因式分解法解一元二次方程. 熟练掌握解一元二次方程是解题的关键.

由 $\sqrt{2x-3} = 3-x$, 可得 $2x-3 = (3-x)^2$, 整理得 $x^2 - 8x + 12 = 0$, 然后计算求出满足要求的解即可.

【详解】解: $x + \sqrt{2x-3} = 3$,

$$\sqrt{2x-3} = 3-x,$$

$$2x-3 = (3-x)^2,$$

$$2x-3 = 9-6x+x^2,$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0,$$

$$(x-2)(x-6) = 0,$$

$$\text{解得, } x_1 = 2, \quad x_2 = 6,$$

$$\text{检验, 当 } x = 2 \text{ 时, } x + \sqrt{2x-3} = 3, \text{ 当 } x = 6 \text{ 时, } x + \sqrt{2x-3} = 9 \neq 3,$$

$\therefore$ 方程的解为 $x = 2$.

$$21. \text{ 解方程组: } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{【答案】} \begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} \\ y_1 = \frac{4}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

【解析】

【分析】根据完全平方公式和平方根的性质，将二元二次方程组变换为二元一次方程组并求解，即可得到答案.

$$\text{【详解】} \because \begin{cases} x + 2y = 5 \\ (x - y)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

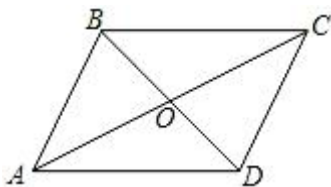
$$\therefore \text{原方程组的解集为 } \begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} \\ y_1 = \frac{4}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查了解二元二次方程组，涉及完全平方公式、平方根、二元一次方程组的知识；解题的关键是熟练掌握完全平方公式、二元一次方程组的性质，从而完成求解.

22. 如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，设 $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DO} = \vec{b}$.

(1) 试用向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示下列向量： $\overrightarrow{BC} =$ _____； $\overrightarrow{CD} =$ _____；

(2) 求作： $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. (保留作图痕迹，写出结果，不要求写作法).



【答案】(1) $\vec{a} - \vec{b}$, $-\vec{a} - \vec{b}$; (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 利用平行四边形的性质以及三角形法则求解即可.

(2) 如图, 延长 BC 到 E , 使得 $CE = BC$, 则 $\overrightarrow{AE}$ 即为所求.

【详解】解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

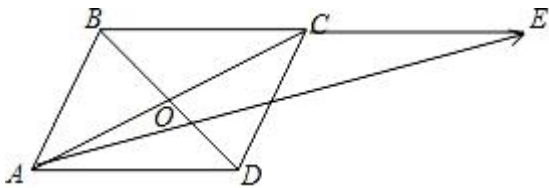
$\therefore BC \parallel AD$, $BC = AD$, $OA = OC$,

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \vec{a} - \vec{b}$,

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = -\vec{a} - \vec{b}$.

故答案为: $\vec{a} - \vec{b}$, $-\vec{a} - \vec{b}$.

(2) 如图, 延长 BC 到 E , 使得 $CE = BC$, 则 $\overrightarrow{AE}$ 即为所求.



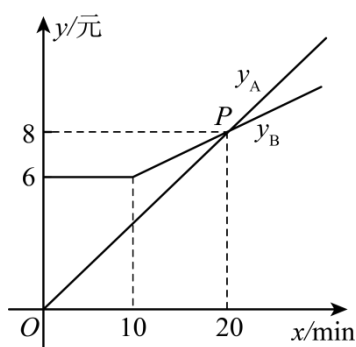
【点睛】本题考查作图-复杂作图, 平行四边形的性质, 平面向量等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

23. 共享电动车是一种新理念下的交通工具, 扫码开锁, 循环共享. 某天早上王老师想骑共享电动车去学校,

有 A , B 两种品牌的共享电动车可选择. 已知: A 品牌电动车骑行 $x \text{ min}$, 收费 y_A 元, 且 $y_A = \frac{2}{5}x$; B 品

牌电动车骑行 $x \text{ min}$, 收费 y_B 元, 且 $y_B = \begin{cases} 6 & (0 < x \leq 10) \\ ax + b & (x > 10) \end{cases}$, A , B 两种品牌电动车所收费用 y 与骑行时间

x 之间的函数图象如图所示.



(1) 说明图中函数 y_A 与 y_B 图象的交点 P 表示的实际意义.

(2) 已知王老师家与学校的距离为 9km ，且王老师骑电动车的平均速度为 300m/min ，那么王老师选择哪种品牌的共享电动车会更省钱？请说明理由.

(3) 请直接写出当 x 为何值时，两种品牌共享电动车收费相差 3 元.

【答案】 (1) 交点 P 表示的实际意义是当骑行时间为 20min 时， A, B 两种品牌的共享电动车收费都为 8 元

(2) 选择 B 品牌共享电动车会更省钱，理由见解析

(3) 7.5 或 35

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的应用，熟练掌握待定系数法和函数图象是解题关键.

(1) 根据点 P 的坐标为 $(20, 8)$ 即可得交点 P 表示的实际意义是当骑行时间为 20min 时， A, B 两种品牌的共享电动车收费都为 8 元；

(2) 先求出王老师从家骑行到学校所需时间为 30min ，再结合函数图象可得当 $x = 30$ 时， $y_A > y_B$ ，由此即可得；

(3) 先利用待定系数法求出当 $x > 10$ 时， $y_B = \frac{1}{5}x + 4$ ，再分三种情况： $0 < x \leq 10$ ， $10 < x \leq 20$ 和 $x > 20$ ，

分别建立方程，解方程即可得.

【小问 1 详解】

解：因为点 P 的坐标为 $(20, 8)$ ，

所以交点 P 表示的实际意义是当骑行时间为 20min 时， A, B 两种品牌的共享电动车收费都为 8 元.

【小问 2 详解】

解：选择 B 品牌共享电动车会更省钱. 理由如下：

$\because$ 王老师家与学校的距离为 9km ，且王老师骑电动车的平均速度为 300m/min ，

∴ 王老师从家骑行到学校所需时间为 $\frac{9000}{300} = 30(\text{min})$,

观察函数图象可知, 当 $x = 30$ 时, $y_A > y_B$,

所以选择 B 品牌共享电动车会更省钱.

【小问 3 详解】

解: 将 $(10, 6)$ 和 $(20, 8)$ 代入 $y_B = ax + b$ 得:
$$\begin{cases} 10a + b = 6 \\ 20a + b = 8 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = 4 \end{cases}$$

则当 $x > 10$ 时, $y_B = \frac{1}{5}x + 4$,

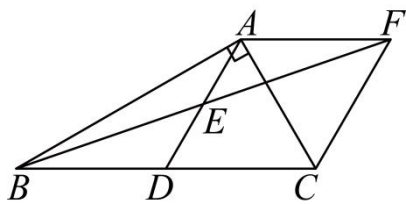
当 $0 < x \leq 10$ 时, 令 $y_B - y_A = 3$, 即 $6 - \frac{2}{5}x = 3$, 解得 $x = 7.5$, 符合题设;

当 $10 < x \leq 20$ 时, 令 $y_B - y_A = 3$, 即 $\frac{1}{5}x + 4 - \frac{2}{5}x = 3$, 解得 $x = 5$, 不符合题设, 舍去;

当 $x > 20$ 时, 令 $y_A - y_B = 3$, 即 $\frac{2}{5}x - \left(\frac{1}{5}x + 4\right) = 3$, 解得 $x = 35$, 符合题设;

综上, 当 x 为 7.5 或 35 时, 两种品牌共享电动车收费相差 3 元.

24. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是斜边 BC 上的中线, 点 E 是 AD 的中点, 过 A 作 $AF \parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F , 连结 CF .



(1) 求证: 四边形 $ADCF$ 是菱形;

(2) 如果 $AC = 6$, 四边形 $ADCF$ 的面积是 30, 求 AB 的长.

【答案】(1) 见详解 (2) $AB = 10$

【解析】

【分析】本题考查了斜边上的中线等于斜边的一半、菱形的判定与性质、平行四边形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 先证明 $\triangle AEF \cong \triangle DEB$, 得 $AF = BD$, 结合斜边上的中线等于斜边的一半, 得出 $AF = DC$, 因为 $AF \parallel BC$, 证明四边形 $ADCF$ 是平行四边形, 因为 $AD = DC$, 所以证明四边形 $ADCF$ 是菱形;

(2) 先证明四边形 $ABDF$ 是平行四边形, 得出 $AB = DF$, 由四边形 $ADCF$ 是菱形, 得出 $\frac{1}{2}AC \times DF = 30$, 把 $AC = 6$ 代入计算, 即可作答.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 E 是 AD 的中点,

$$\therefore AE = DE,$$

$$\because AF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle DBE,$$

$$\because \angle AEF = \angle DEB,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEB,$$

$$\therefore AF = BD,$$

$\because \angle BAC = 90^\circ$, AD 是斜边 BC 上的中线,

$$\therefore AD = BD = CD,$$

$$\therefore AF = DC,$$

$$\because AF \parallel BC,$$

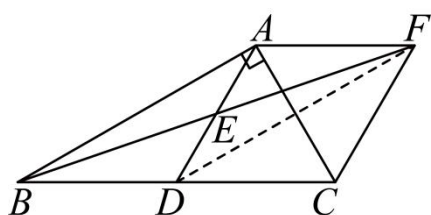
$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形,

$$\because AD = DC,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是菱形;

【小问 2 详解】

解: 连接 DF , 如图所示:



由 (1) 知 $AF = BD$

$$\because AF \parallel BC$$

$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = DF$$

$\because$ 四边形 $ADCF$ 是菱形

$$\therefore AC \perp DF$$

$\because AC = 6$, 菱形 $ADCF$ 的面积是 30,

$$\therefore \frac{1}{2} AC \times DF = \frac{1}{2} \times 6 \times DF = 30$$

$$\therefore DF = 10$$

$$\therefore AB = DF = 10.$$

25. 如图 1, 平面直角坐标系中, 直线 $y = -2x + 4$ 分别与 x 轴、 y 轴相交于 A 、 B 两点, 与直线 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ 交于点 C . 直线 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ 与 y 轴交于点 D .

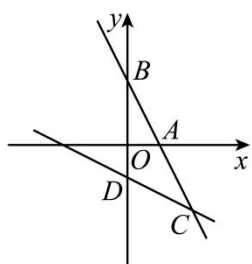


图1

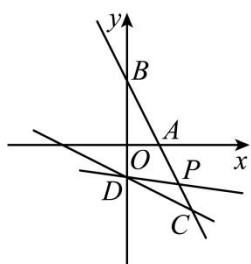


图2

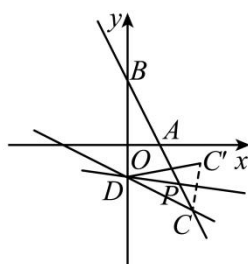


图3

(1) 求点 C , 点 D 的坐标;

(2) 如图 2, P 为直线 BC 上的一个动点, 当 $S_{\triangle PBD} = \frac{1}{4} S_{\triangle CBD}$, 求点 P 坐标;

(3) 如图 3, P 为线段 BC 上的一个动点, 点 C 关于直线 DP 的对称点为 C' , 当 C' 恰好落在 x 轴上时, 直接写出点 P 的坐标.

【答案】 (1) $C(4, -4)$, $D(0, -2)$

(2) $P(1, 2)$ 或 $P(-1, 6)$

(3) $P(3, -2)$ 或 $P(\frac{3}{2}, 1)$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数与几何的综合应用, 熟练掌握一次函数的图象和性质, 利用数形结合和分类讨论的思想进行求解, 是解题的关键:

(1) 联立两个解析式求出 C 点坐标, 令 $x = 0$, 求出 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ 的函数值, 得到 D 点坐标即可;

(2) 求出 B 点坐标, 设 $P(m, -2m + 4)$, 根据 $S_{\triangle PBD} = \frac{1}{4} S_{\triangle CBD}$, 列出方程进行求解即可;

(3) 设 $C'(n, 0)$, 根据对称的性质, 得到 $CD = C'D$ 求出 C' 的坐标, 进而求出 C', C 的中点坐标, 求出直线 DP 的解析式, 联立直线 DP 和直线 $y = -2x + 4$, 求出 P 点坐标即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: 联立} \begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x - 2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = 4 \\ y = -4 \end{cases},$$

$$\therefore C(4, -4),$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 则: } y = -\frac{1}{2}x - 2 = -2,$$

$$\therefore D(0, -2);$$

【小问 2 详解】

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = -2x + 4 = 4,$$

$$\therefore B(0, 4),$$

$$\therefore C(4, -4), D(0, -2),$$

$$\therefore BD = 6,$$

$$\therefore S_{BCD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12,$$

$$\text{设 } P(m, -2m + 4), \text{ 则: } S_{\triangle PBD} = \frac{1}{2} \times 6 \times |m| = \frac{1}{4} S_{\triangle BCD} = 3,$$

$$\therefore |m| = 1,$$

$$\therefore m = 1 \text{ 或 } m = -1,$$

$$\therefore P(1, 2) \text{ 或 } P(-1, 6);$$

【小问 3 详解】

$$\text{设 } C'(n, 0),$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 关于直线 } DP \text{ 的对称点为 } C',$$

$$\therefore CD = C'D,$$

$$\therefore C(4, -4), D(0, -2),$$

$$\therefore n^2 + 4 = 4^2 + (4 - 2)^2,$$

$$\text{解得: } n = \pm 4,$$

$$\therefore C'(4, 0) \text{ 或 } C'(-4, 0),$$

$$\text{当 } C'(4, 0) \text{ 时, } C, C' \text{ 的中点坐标为: } (4, -2),$$

$$\therefore D(0, -2),$$

$$\therefore DP \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore y_P = -2, \text{ 此时 } -2x + 4 = -2, \text{ 解得: } x = 3,$$

$$\therefore P(3, -2),$$

当 $C'(-4, 0)$ 时, C, C' 的中点坐标为: $(0, -2)$, 即为 D 点,

设直线 DP 与 x 轴交于点 $E(a, 0)$, 则: $EC = EC'$,

$$\therefore (a+4)^2 = (4-a)^2 + 4^2, \text{ 解得: } a = 1,$$

$$\therefore E(1, 0),$$

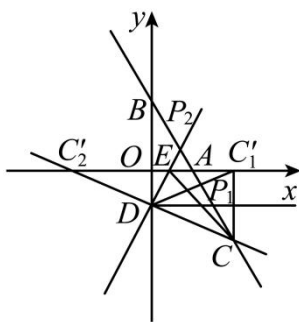
设直线 DE 的解析式为: $y = cx - 2$, 把 $E(1, 0)$ 代入, 得: $0 = c - 2$, 解得: $c = 2$,

$$\therefore y = 2x - 2,$$

$$\text{联立: } \begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = 2x - 2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases},$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, 1\right).$$

综上: $P(3, -2)$ 或 $P\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.



26. 定义: 若四边形有一组对角互补, 一组邻边相等, 且相等邻边的夹角为直角, 像这样的图形称为“角等邻对补”四边形, 简称“直等补”四边形. 根据以上定义, 解决下列问题:

(1) 如图 1, 以菱形 $ABCD$ 的一边 CD 为边向外作正方形 $CDEF$, M 、 N 分别是菱形和正方形的对角线交点, 连接 MN .

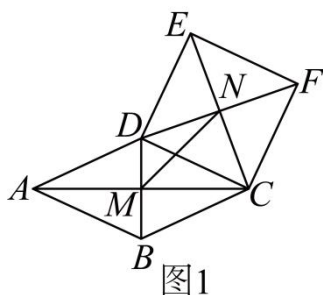


图1

求证：四边形 $DMCN$ 是“直等补”四边形.

②若 $MN = \sqrt{2}$ ，求四边形 $DMCN$ 的面积.

(2) 如图 2, 已知四边形 $ABCD$ 是“直等补”四边形, 其中 $AB = BC = 5$, $CD > AB$, 过点 B 作 $BE \perp CD$ 于点 E 且 $BE = 4$, 连接 BD , 若点 P 是线段 BD 上的动点, 请你直接写出 $\triangle PEC$ 周长的最小值.

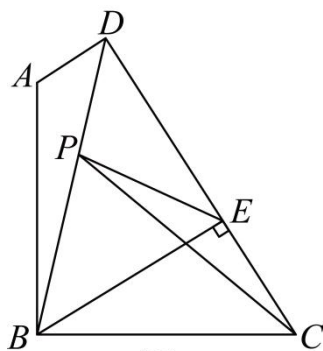


图2

【答案】(1) ①详见解析；②1

(2) $\triangle PEC$ 周长的最小值: $\sqrt{65} + 3$

【解析】

【分析】(1) ①由正方形的性质和菱形的性质可得 $ND = NC$, $\angle DNC = 90^\circ$, $\angle DMC + \angle DNC = 180^\circ$, 即可解答;

②过点 N 作 $NQ \perp CM$ 于点 Q , $NP \perp MD$ 交 MD 的延长线于点 P , “AAS”可证 $\triangle NPD \cong \triangle NQC$, 所以 $S_{\triangle NPD} = S_{\triangle NQC}$, 即 $S_{\text{四边形}DMCN} = S_{\text{正方形}MPNQ}$, 由正方形的面积公式, 即可解答;

(2) 先证四边形 $BEDE'$ 是正方形, 利用勾股定理求出 CE , CE' , 即可解答.

【小问 1 详解】

证明: ①如图 1 中,

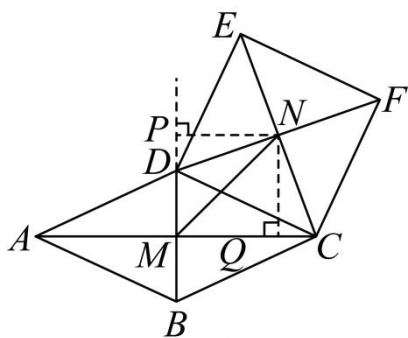


图1

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD$, $\angle DMC = 90^\circ$,

$\because$ 四边形 $CDEF$ 是正方形,

$\therefore DF \perp CE$, $DF = CE$,

$\therefore \angle DNC = 90^\circ$, $ND = NC$,

又 $\because \angle DMC + \angle DNC = 180^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $DMCN$ 是“直等补”四边形;

②如图1中, 过点 N 作 $NQ \perp CM$ 于点 Q , $NP \perp MD$ 交 MD 的延长线于点 P ,

$\because \angle NQM = \angle NPD = \angle PMQ = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $MPNQ$ 是矩形,

$\therefore \angle PNQ = \angle DNC = 90^\circ$,

即 $\angle DNP + \angle DNQ = \angle CNQ + \angle DNQ$,

$\therefore \angle DNP = \angle CNQ$,

在 $\triangle NPD$ 和 $\triangle NQC$ 中,
$$\begin{cases} \angle NPD = \angle NQC \\ \angle PND = \angle QNC, \\ ND = NC \end{cases}$$

$\therefore \triangle NPD \cong \triangle NQC$ (AAS),

$\therefore S_{\triangle NPD} = S_{\triangle NQC}$, $NP = NQ$,

$\therefore$ 四边形 $MPNQ$ 是正方形,

$\therefore S_{\text{四边形}DMCN} = S_{\text{正方形}MPNQ} = \frac{1}{2}MN^2 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 = 1$;

【小问2详解】

$\triangle PEC$ 周长的最小值: $\sqrt{65} + 3$;

延长 DA 到点 F , 过 B 作 $BE' \perp AF$ 于点 E' ,

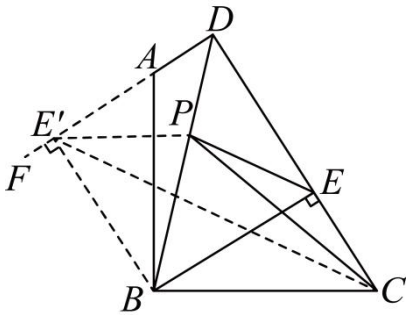


图2

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是“直等补”四边形, $AB = BC$, $CD > AB$,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, 即 $\angle ADC = 90^\circ$,

$\because BE \perp CD$, $BE' \perp AF$,

$\therefore \angle BED = 90^\circ$, $\angle AE'B = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $BEDE'$ 是矩形,

$\therefore \angle E'BE = 90^\circ$,

又 $\because \angle ABE' + \angle ABE = \angle E'BE = 90^\circ$, $\angle CBE + \angle ABE = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABE' = \angle CBE$,

在 $\triangle ABE'$ 和 $\triangle CBE$ 中,
$$\begin{cases} \angle AE'B = \angle BEC = 90^\circ \\ \angle ABE' = \angle CBE \\ AB = BC \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE' \cong \triangle CBE$ (AAS),

$\therefore BE' = BE = 4$,

$\therefore$ 矩形 $BEDE'$ 是正方形,

$\therefore PE' = PE$, $DE' = DE = BE = 4$;

$\therefore PE + PC = PE' + PC \geq CE'$,

即当点 C 、 P 、 E' 三点共线时, $PE + PC$ 的最小值是 CE' ,

在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中, $BC = 5$, $BE = 4$,

$\therefore CE = \sqrt{BE^2 - CE^2} = 3$, $\therefore CD = CE + DE = 7$;

在 $\text{Rt}\triangle CDE'$ 中, $CD = 7$, $DE' = 4$,

$$\therefore CE' = \sqrt{CD^2 + DE'^2} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65},$$

$$\therefore \triangle PEC \text{ 周长的最小值为: } CE' + CE = \sqrt{65} + 3;$$

【点睛】本题是四边形综合题，考查了正方形的性质，菱形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理等知识，添加恰当辅助线构造全等三角形是解题的关键.