

2024 学年第二学期期中诊断评估

(八年级数学学科试卷)

(考试时间: 90 分钟 满分: 100 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列函数中, 一次函数是 ()

A. $y = \frac{1}{2x} + 1$

B. $y = -x$

C. $y = x^2 + 3$

D. $y = kx + b$ (k 、 b 是

常数)

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的识别, 一般地, 形如 $y = kx + b$ (其中 k 、 b 是常数且 $k \neq 0$) 的函数叫做一次函数, 据此可得答案.

【详解】 解: 由一次函数的定义可知, 四个选项中, 只有 B 选项中的函数是一次函数, 故选: B.

2. 直线 $y = -3x + 1$ 不经过第 () 象限.

A. 一

B. 二

C. 三

D. 四

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据 $k = -3 < 0$ 、 $b = 1 > 0$ 利用一次函数图象与系数的关系, 即可得出直线 $y = -3x + 1$ 经过第一、二、四象限, 此题得解.

【详解】 解: 在 $y = -3x + 1$ 中,

$$\because k = -3 < 0, b = 1 > 0,$$

$\therefore$ 直线 $y = -3x + 1$ 经过第一、二、四象限.

$\therefore$ 不经过第三象限.

故选: C.

【点睛】 本题考查了一次函数的图像和性质, 解题的关键是熟练掌握一次函数的性质进行判断.

3. 一个多边形的内角和是它的外角和的 2 倍, 则这个多边形是 ()

A. 五边形

B. 六边形

C. 七边形

D. 八边形

【答案】 B

【解析】

【分析】多边形的外角和是 360° ，则内角和是 $2 \times 360 = 720^\circ$ 。设这个多边形是 n 边形，内角和是 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，这样就得到一个关于 n 的方程，从而求出边数 n 的值。

【详解】解：设这个多边形是 n 边形，根据题意，得

$$(n-2) \times 180^\circ = 2 \times 360,$$

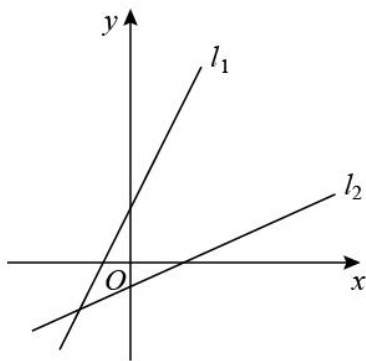
解得： $n = 6$ 。

故这个多边形是六边形。

故选：B。

【点睛】本题考查了多边形的内角和与外角和，熟记内角和公式和外角和定理并列方程是解题的关键。

4. 如图，在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y = k_1x + b_1$ 与 $y = k_2x + b_2$ 的图象分别为直线 l_1 和直线 l_2 ，下列结论正确的是（ ）



- A. $k_1 \cdot k_2 < 0$ B. $k_1 + k_2 < 0$ C. $b_1 - b_2 < 0$ D. $b_1 \cdot b_2 < 0$

【答案】D

【解析】

【分析】先根据两条直线的图象得到 $k_1 > 0$ ， $b_1 > 0$ ， $k_2 > 0$ ， $b_2 < 0$ ，然后再进行判定求解。

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = k_1x + b_1$ 与 $y = k_2x + b_2$ 的图象分别为直线 l_1 和直线 l_2 ，

$$\therefore k_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad b_2 < 0,$$

$$\therefore k_1 \cdot k_2 > 0, \quad k_1 + k_2 > 0, \quad b_1 - b_2 > 0, \quad b_1 \cdot b_2 < 0,$$

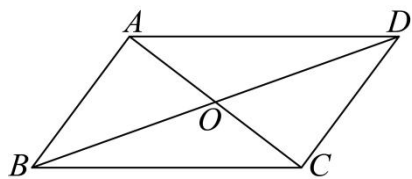
故 A，B，C 项均错误，D 项正确。

故选：D。

【点睛】本题主要考查了一次函数图象与 k 和 b 符号的关系，掌握当直线与 y 轴交于正半轴上时， $b > 0$ ；当直线与 y 轴交于负半轴时， $b < 0$ 是解答关键。

5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O 。下列条件不能判断四边形 $ABCD$ 是平行四

边形的是 ()



A. $AB = DC, AD = BC$;

B. $AB \parallel DC, AD = BC$;

C. $AB \parallel DC, \angle BAD = \angle BCD$;

D. $OA = OC, OB = OD$;

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的判定方法，熟练掌握平行四边形的判定方法是解题的关键．由平行四边形的判定方法分别对各个选项进行判断即可．

【详解】 解： A、 $\because AB = DC, AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故选项 A 不符合题意；

B、 $\because AB \parallel DC, AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 不一定是平行四边形，也可能是等腰梯形，故选项 B 符合题意，

C、 $\because AB \parallel DC$,

$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$.

$\because \angle BAD = \angle BCD$,

$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故选项 C 不符合题意；

D、 $\because OA = OC, OB = OD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故选项 D 不符合题意；

故选： B.

6. 在平面直角坐标系中， O 为坐标原点， 将直线 $y = 3x + 6$ 的图像向右平移 5 个单位长度得到的新的直线分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点， 若点 $P(m, n)$ (m, n 都是整数) 在 AOB 内部 (不包括边界)， 则点 P 的个数是 () 个

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

【答案】 A

【解析】

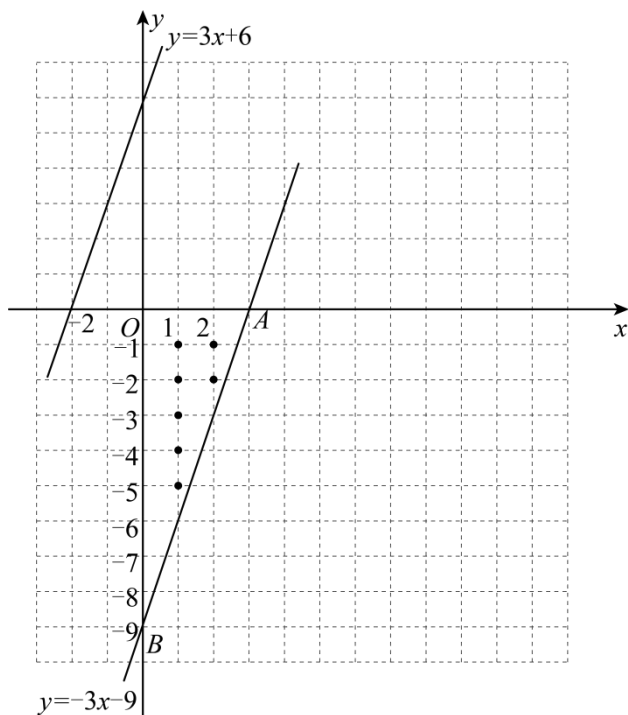
【分析】根据平移规律得到新直线方程是 $y=3(x-5)+6$ ，由此求得点 A 、 B 的坐标，即可求得结论.

【详解】解：根据题意知，平移后直线方程为 $y=3(x-5)+6=3x-9$.

所以 $A(3, 0)$ ， $B(0, -9)$.

当 $x=1$ 时， $y=-6$ ； $x=2$ 时， $y=-3$ ，

若点 $P(m, n)$ (m, n 都是整数) 在 $\triangle AOB$ 内部 (不包括边界)，如图，



则有 $(1, -1)$ ， $(1, -2)$ ， $(1, -3)$ ， $(1, -4)$ ， $(1, -5)$ ， $(2, -1)$ ， $(2, -2)$ 共 7 个，

故选：A.

【点睛】本题主要考查了一次函数图象与几何变换，函数图象平移的法则“左加右减，上加下减”.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分)

7. 直线 $y = -2x + 5$ 的截距是_____.

【答案】5

【解析】

【分析】本题主要考查了求一次函数的截距，一次函数的截距即为一次函数与 y 轴交点的纵坐标，据此求解即可.

【详解】解：在 $y = -2x + 5$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = 5$ ，

$\therefore$ 直线 $y = -2x + 5$ 的截距是 5，

故答案为：5.

8. 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 5\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$, 那么 $\square ABCD$ 的周长等于 _____ cm .

【答案】 24

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行四边形的性质, 根据平行四边形对边相等得到 AD , CD 的长, 再根据平行四边形周长计算公式求解即可.

【详解】 解: $\because$ 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 5\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$,

$\therefore CD = AB = 5\text{cm}$, $AD = BC = 7\text{cm}$,

$\therefore \square ABCD$ 的周长 $= CD + AB + AD + BC = 24\text{cm}$,

故答案为: 24.

9. 已知一次函数 $f(x) = \frac{1}{3}x - 3$, 如果 $f(a) = 2$, 则 a 的值是 _____.

【答案】 15

【解析】

【分析】 本题主要考查了求一次函数自变量的值, 根据题意把 $f(x) = 2$ 代入 $f(x) = \frac{1}{3}x - 3$ 中求出 x 的值即可得到答案.

【详解】 解: $\because f(x) = \frac{1}{3}x - 3$ 且 $f(a) = 2$,

$\therefore \frac{1}{3}a - 3 = 2$,

$\therefore a = 15$,

故答案为: 15.

10. 方程 $(3x - 2)^3 = 64$ 的根是 _____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题利用立方根定义解方程, 直接利用立方根的定义得到方程 $3x - 2 = 4$, 然后解方程即可求解.

【详解】 解: $\because 4^3 = 64$,

$\therefore 3x - 2 = 4$, 解得 $x = 2$,

故该方程的根为 $x = 2$,

故答案为: $x = 2$.

11. 方程 $\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{2-x} = 0$ 的根是 _____.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式有意义的条件，能把无理方程转化成有理方程是解题的关键．先求出使得二次根式有意义的 x 的取值范围，再根据 $a \cdot b = 0$ 时， a, b 至少一个为 0 即可得到答案．

【详解】 解：由题意， $1 - x \geq 0$ 且 $2 - x \geq 0$ 得到 $x \leq 1$ ，

$$\because \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{2-x} = 0,$$

$$\therefore 1-x=0 \text{ 或 } 2-x=0,$$

解得 $x=1$ 或 $x=2$ ，

又 $\because x \leq 1$ ，

$$\therefore x=1,$$

$$\therefore \text{方程 } \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{2-x} = 0 \text{ 的根是 } x=1;$$

故答案为： $x=1$ ．

12. 如果方程 $\sqrt{x} - k = 3$ 无实数解，那么 k 的取值范围是_____．

【答案】 $k < -3$ 或 $-3 > k$

【解析】

【分析】 本题考查算术平方根的非负性、无理方程，由算术平方根的非负性得到 $3+k < 0$ 是解答的关键．根据 $\sqrt{x} \geq 0$ ，结合已知得到 $3+k < 0$ ，然后解不等式即可求解．

【详解】 解： $\because$ 方程 $\sqrt{x} - k = 3$ 即 $\sqrt{x} = 3+k$ 无实数解，

$$\therefore 3+k < 0, \text{ 解得 } k < -3,$$

故答案为： $k < -3$ ．

13. 已知直线 $y = (k-2)x + \frac{1+2k}{3}$ 在 y 轴上的截距为 3，那么该直线与 x 轴的交点坐标为_____．

【答案】 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的图象与性质，熟知一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象在 y 上的截距为 b 是解答的关键．先由已知截距列方程求得 k 值，再令 $y=0$ 解方程求得 x 值即可求解．

【详解】 解： $\because$ 直线 $y = (k-2)x + \frac{1+2k}{3}$ 在 y 轴上的截距为 3，

$$\therefore \frac{1+2k}{3} = 3, \text{ 解得 } k = 4,$$

$$\therefore y = 2x + 3,$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 由 } 2x + 3 = 0 \text{ 得 } x = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{该直线与 } x \text{ 轴的交点坐标为 } \left(-\frac{3}{2}, 0\right),$$

$$\text{故答案为: } \left(-\frac{3}{2}, 0\right).$$

14. 一个多边形从一个顶点出发有 5 条对角线, 那么这个多边形共有_____条对角线.

【答案】 20

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形对角线条数问题, 从一个 n 边形的一个顶点出发有 $(n-3)$ 条对角线, n 边形

公有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线, 据此先求出多边形的边数, 再求出其对角线条数即可.

【详解】 解: 设多边形为 n 边形,

$\therefore$ 从 n 边形的一个顶点出发共有 5 条对角线,

$$\therefore n-3=5,$$

$$\therefore n=8,$$

$\therefore$ 这个多边形的边数为 8,

$$\therefore \text{这个多边形共有 } \frac{8 \times 5}{2} = 20 \text{ 条对角线,}$$

故答案为: 20.

15. 已知一次函数解析式为 $y = 2x - 1$, 求在这个一次函数图像上且位于 x 轴上方的所有点的横坐标的取值范围是_____.

$$\text{【答案】 } x > \frac{1}{2}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与不等式之间的关系, 一次函数的增减性, 先求出函数值为 0 时自变量的值, 再判断出函数的增减性即可得到答案.

$$\text{【详解】 解: 在 } y = 2x - 1 \text{ 中, 当 } y = 2x - 1 = 0 \text{ 时, } x = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 一次函数解析式为 $y = 2x - 1$, $2 > 0$,

∴ y 随 x 增大而增大,

∴ 在这个一次函数图像上且位于 x 轴上方的所有点的横坐标的取值范围是 $x > \frac{1}{2}$,

故答案为: $x > \frac{1}{2}$.

16. 用换元法解方程 $\frac{3x^2-2}{x} - \frac{2x}{3x^2-2} = 1$ 时, 如果设 $y = \frac{3x^2-2}{x}$, 那么原方程可化为关于 y 的整式方程是 _____.

【答案】 $y^2 - y - 2 = 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程, 先根据题意得到 $\frac{2x}{3x^2-2} = \frac{2}{y}$, 则原方程可化为 $y - \frac{2}{y} = 1$, 再把方程 $y - \frac{2}{y} = 1$ 化为整式方程即可得到答案.

【详解】 解: 设 $y = \frac{3x^2-2}{x}$, 则 $\frac{2x}{3x^2-2} = \frac{2}{y}$,

∴ 原方程可以化为 $y - \frac{2}{y} = 1$, 即 $y^2 - y - 2 = 0$,

故答案为: $y^2 - y - 2 = 0$,

故答案为: $y^2 - y - 2 = 0$.

17. 一千官兵一千布, 一官四尺无零数, 四兵才得布一尺, 请问官兵多少? 这首诗的意思是: 一千名官兵分一千尺布, 一名军官分四尺, 四名士兵分一尺, 正好分完, 则军官有 _____ 名, 士兵有 _____ 名.

【答案】 ①. 200 ②. 800

【解析】

【分析】 设军官有 x 名, 士兵 y 名, 根据共有 1000 名, 得方程 $x+y=1000$; 根据共有 1000 尺布, 得方程 $4x + \frac{1}{4}y = 1000$, 联立方程组即可.

【详解】 解: 设军官有 x 名, 士兵 y 名, 根据题意, 得:

$$\begin{cases} x + y = 1000, \\ 4x + \frac{1}{4}y = 1000. \end{cases}$$

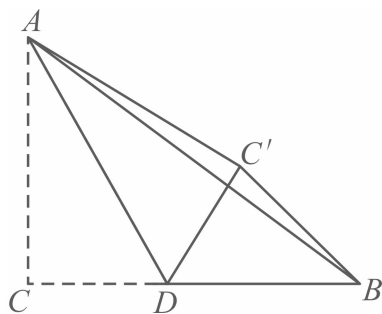
解之，得： $\begin{cases} x = 200, \\ y = 800. \end{cases}$

所以军官有 200 名，士兵有 800 名.

故答案为 200, 800.

【点睛】本题考查了二元一次方程组的应用，关键是找出题目中的等量关系.

18. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$. 点 D 在边 BC 上，将 $\triangle ACD$ 沿直线 AD 翻折，使得点 C 落在同一平面内的点 C' 处，连接 BC' . 当 $\triangle BC'D$ 是直角三角形时， BD 的长为_____.

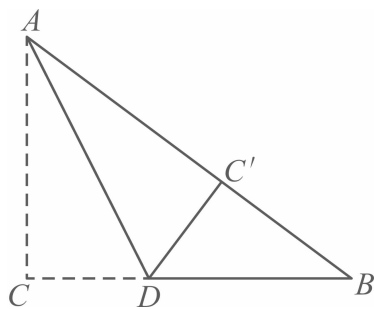


【答案】5 或 2

【解析】

【分析】本题考查勾股定理，折叠问题，正方形的判定和性质，熟练掌握折叠的性质，是解题的关键. 分 $\angle BC'D = 90^\circ$ 和 $\angle BDC' = 90^\circ$ 两种情况进行讨论求解即可.

【详解】①当 $\angle BC'D = 90^\circ$ 时，则 C' 在 AB 上，如图，



$$\because \angle C = 90^\circ, \quad AC = 6, \quad BC = 8,$$

$$\therefore AB = 10,$$

$\because$ 翻折,

$$\therefore CD = C'D, \quad AC = AC' = 6,$$

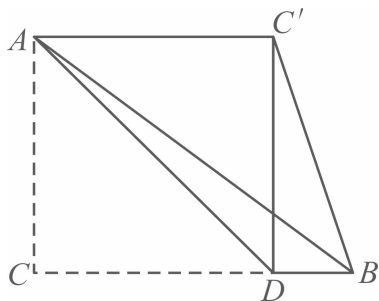
$$\therefore BC' = AB - AC' = 4,$$

设 $BD = x$ ，则： $C'D = CD = BC - BD = 8 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BC'D$ 中，由勾股定理，得： $x^2 = (8 - x)^2 + 4^2$ ，

$\therefore x = 5$ ，即： $BD = 5$ ；

②当 $\angle BDC' = 90^\circ$ ，如图，则： $\angle CDC' = 90^\circ$ ，



$\therefore$ 翻折，

$\therefore \angle AC'D = \angle C = 90^\circ, AC = AC'$ ，

$\therefore$ 四边形 $ACDC'$ 为正方形，

$\therefore CD = AC = 6$ ，

$\therefore BD = BC - CD = 2$ ；

故答案为：5 或 2.

三、简答题：（本大题共 3 题，每题 6 分，满分 18 分）

19. 解方程： $\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{x}{1 - x} = 1$

【答案】 $x = \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程，先把原方程化为整式方程，再解方程并检验即可得到答案.

【详解】 解： $\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{x}{1 - x} = 1$

方程两边同时乘以 $(x + 1)(x - 1)$ 去分母得： $2 - x(x + 1) = (x + 1)(x - 1)$ ，

整理得 $2x^2 - x - 3 = 0$ ，

解得 $x = -1$ 或 $x = \frac{3}{2}$ ，

检验，当 $x = -1$ 时， $(x + 1)(x - 1) = 0$ ，当 $x = \frac{3}{2}$ 时， $(x + 1)(x - 1) \neq 0$ ，

$\therefore x = \frac{3}{2}$ 是原方程的解， $x = -1$ 不是原方程的解.

20. 解方程: $x - \sqrt{2x+6} = 1$

【答案】 $x = 5$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解无理方程，先把原方程变形为 $x - 1 = \sqrt{2x+6}$ ，再把方程两边同时平方后解一元二次方程即可得到答案.

【详解】 解: $\because x - \sqrt{2x+6} = 1$,

$$\therefore x - 1 = \sqrt{2x+6},$$

$$\therefore (x-1)^2 = 2x+6, \text{ 即 } x^2 - 4x - 5 = 0,$$

$$\therefore (x+1)(x-5) = 0,$$

$$\therefore x+1=0 \text{ 或 } x-5=0,$$

解得 $x=5$ 或 $x=-1$,

$$\therefore \begin{cases} x-1 = \sqrt{2x+6} \geq 0, \\ 2x+6 \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore x \geq 1,$$

$$\therefore x = 5.$$

21. 解方程组: $\begin{cases} x^2 - xy - 6y^2 = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解二元二次方程组，先得到 $x = y+1$ ，再把 $x = y+1$ 代入方程 $x^2 - xy - 6y^2 = 0$ 中求出 y 的值，进而求出 x 的值即可得到答案.

【详解】 解: $\begin{cases} x^2 - xy - 6y^2 = 0 \text{ ①} \\ x - y = 1 \text{ ②} \end{cases}$

由②得 $x = y+1$ ③,

把③代入①得 $(y+1)^2 - y(y+1) - 6y^2 = 0$,

整理得 $6y^2 - y - 1 = 0$,

解得 $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{3}$,

当 $y = \frac{1}{2}$ 时, $x = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$,

当 $y = -\frac{1}{3}$ 时, $x = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

四、解答题 (本大题共 5 题, 第 22 题 6 分, 第 23、24、25 题 8 分, 第 26 题 10 分, 满分 40 分)

22. 上海乐高乐园度假区位于金山区枫泾镇, 是全球最大的乐高乐园之一, 它将于 2025 年夏季开园迎客, 乐园提供甲、乙两种规格的乐高积木套装. 甲套装的积木块数比乙套装少 30 块, 但甲套装每块积木的平均价格比乙套装高 2 元. 已知花费 360 元购买甲套装所获得的积木块数, 与花费 300 元购买乙套装所获得的积木块数相等. 求甲、乙两种套装每块积木的平均价格分别是多少?

【答案】 甲种套装每块积木的平均价格为 12 元, 则乙种套装每块积木的平均价格为 10 元

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式方程的实际应用, 设甲种套装每块积木的平均价格为 x 元, 则乙种套装每块积木的平均价格为 $(x-2)$ 元, 根据花费 360 元购买甲套装所获得的积木块数, 与花费 300 元购买乙套装所获得的积木块数相等建立方程求解即可.

【详解】 解: 设甲种套装每块积木的平均价格为 x 元, 则乙种套装每块积木的平均价格为 $(x-2)$ 元,

由题意得, $\frac{360}{x} = \frac{300}{x-2}$,

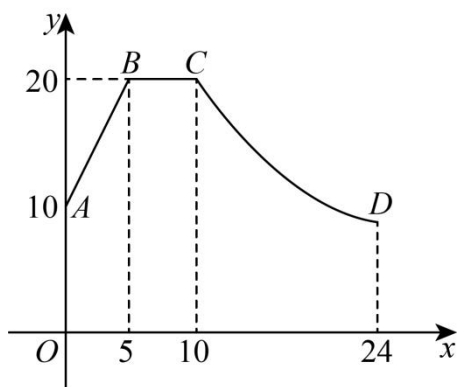
解得 $x = 12$,

经检验, $x = 12$ 是原方程的解, 且符合题意,

$\therefore x-2 = 12-2 = 10$,

答: 甲种套装每块积木的平均价格为 12 元, 则乙种套装每块积木的平均价格为 10 元.

23. 某蔬菜生产基地的气温较低时, 用装有恒温系统的大棚栽培一种新品种蔬菜, 如图是试验阶段的某天恒温系统从开启到关闭后, 大棚内的温度 y ($^{\circ}\text{C}$) 与时间 x (h) 之间的函数关系, 其中线段 AB , BC 表示恒温系统开启阶段, 双曲线的一部分 CD 表示恒温系统关闭阶段. 请根据图中信息解答下列问题:



(1) 求 y 与 x ($10 \leq x \leq 24$) 的函数表达式;

(2) 大棚里栽培的一种蔬菜在温度为 12°C 到 20°C 的条件下最适合生长, 若某天恒温系统开启前的温度是 10°C , 那么这种蔬菜一天内最适合生长的时间有多长?

【答案】 (1) $y = \frac{200}{x} (10 \leq x \leq 24)$

(2) $\frac{47}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的应用, 解答时应注意临界点的应用.

(1) 应用待定系数法求函数解析式即可;

(2) 观察图象可知: 三段函数都有 $y \geq 12$ 的点, 而且 BC 段是恒温阶段, $y = 20$, 所以计算 AB 和 CD 两段当 $y = 12$ 时对应的 x 值, 相减就是结论

【小问 1 详解】

】解: (1) 设双曲线 CD 解析式为: $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

$\because C(10, 20)$,

$\therefore k = 200$,

$\therefore$ 双曲线 CD 的解析式为: $y = \frac{200}{x} (10 \leq x \leq 24)$;

【小问 2 详解】

解: 设 AB 的解析式为: $y = mx + n (0 \leq x \leq 5)$

把 $(0, 10), (5, 20)$ 代入 $y = mx + n$ 中得:

$$\begin{cases} n = 10 \\ 5m + n = 20 \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} m=2 \\ n=10 \end{cases}$

$\therefore AB$ 的解析式为: $y = 2x + 10$

当 $y = 12$ 时, $12 = 2x + 10$, 解得 $x = 1$,

把 $y = 12$ 代入 $y = \frac{200}{x}$,

得 $12 = \frac{200}{x}$

解得: $x = \frac{50}{3}$

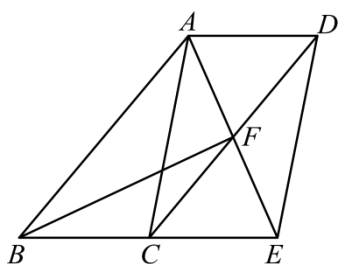
$\therefore \frac{50}{3} - 1 = \frac{47}{3}$

答: 这种蔬菜一天内最适合生长的时间有 $\frac{47}{3}$ 小时;

24. 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle BAD$ 的角平分线 AE 交 CD 于点 F , 交 BC 的延长线于点 E .

(1) 求证: $BE = CD$;

(2) 若 BF 恰好平分 $\angle ABE$, 连接 AC 、 DE , 求证: 四边形 $ACED$ 是平行四边形.



【答案】 (1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据平行四边形的性质得到 $AB = CD$, $\angle DAE = \angle AEB$, 利用 AE 平分 $\angle BAD$, 推出 $\angle BAE = \angle AEB$, 得到 $BE = AB$, 即可得到结论;

(2) 根据 $BE = AB$, BF 平分 $\angle ABE$, 得到 $AF = EF$, 证明 $\triangle ADF \cong \triangle ECF$, 推出 $DF = CF$, 即可得到结论.

【详解】 (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore AD \parallel BC, AB = CD$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAD$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE$$

$$\therefore \angle BAE = \angle AEB$$

$$\therefore BE = AB$$

$$\therefore BE=CD$$

(2) $\because BE=AB$, BF 平分 $\angle ABE$

$$\therefore AF=EF$$

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ECF$ 中

$$\begin{cases} \angle DAE = \angle AEB \\ AF = EF \\ \angle AFD = \angle EFC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ECF$$

$$\therefore DF=CF$$

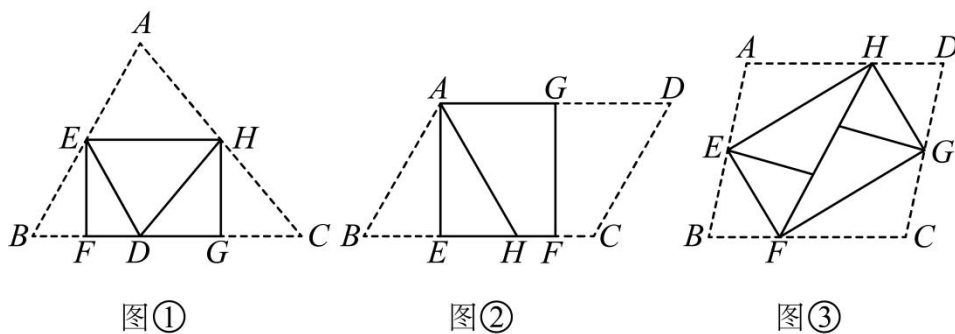
$$\text{又} \because AF=EF$$

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形.

【点睛】此题考查平行四边形的判定及性质，全等三角形的判定及性质，等腰三角形三线合一的性质，熟记各知识点并应用解决问题是解题的关键.

25. 综合与实践

折纸是一项有趣的活动，折纸活动也伴随着我们初中数学的学习. 在折纸过程中，我们可以研究图形的运动和性质，也可以在思考问题的过程中，初步建立几何直观，现在就让我们带着数学的眼光来折纸吧. 定义：将纸片折叠，若折叠后的图形恰能拼合成一个无缝隙、无重叠的矩形，这样的矩形称为完美矩形.



(1) 操作发现:

如图①，将 ABC 纸片按所示折叠成完美矩形 $EFGH$ ，若 ABC 的面积为 12， $BC=6$ ，则此完美矩形的边长 $FG=$ _____，面积为_____.

(2) 类比探究:

如图②，将平行四边形 $ABCD$ 纸片按所示折叠成完美矩形 $AEGF$ ，若平行四边形 $ABCD$ 的面积为 30， $BC=6$ ，则完美矩形 $AEGF$ 的周长为_____.

(3) 拓展延伸:

如图③，将平行四边形 $ABCD$ 纸片按所示折叠成完美矩形 $EFGH$ ，若 $EF:EH=3:4$ ， $AD=20$ ，求此

完美矩形的周长为多少.

【答案】(1) 3; 6

(2) 16

(3) 56

【解析】

【分析】本题是四边形综合题, 考查了平行四边形的性质, 折叠的性质, 矩形的性质, 勾股定理等知识点, 熟悉利用折叠的性质是解题的关键.

(1) 根据折叠的性质和三角形的面积公式分别求出矩形的长和宽, 即可得到矩形的周长;

(2) 根据折叠的性质和三角形的面积公式分别求出矩形的长和宽, 即可得到矩形的周长;

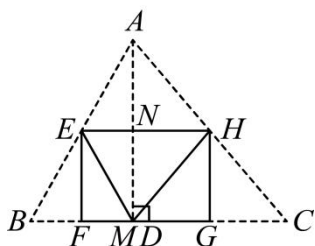
(3) 连接 EG , 根据折叠的性质证出四边形 $AEGD$ 是平行四边形, 设 $EF = 3x$, 则 $EH = 4x$, 利用勾股定理求出矩形的长和宽, 即可得到矩形的周长.

【小问 1 详解】

解: 由折叠可知, $BF = DF$, $CG = DG$, $AH = DH = CH$,

$\therefore FG = DF + DG = BF + CG = \frac{1}{2}BC = 3$, 点 H 是 AC 中点,

过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M , AM 交 EH 于点 N , 如图①所示:



图①

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \times AM = \frac{1}{2} \times 6 \times AM = 12,$$

$$AM = 4,$$

$$\therefore \text{由折叠可知: } MN = AN = 2,$$

$$\therefore EF = HG = MN = 2,$$

$$\therefore \text{完美矩形的面积为: } FG \times EF = 3 \times 2 = 6;$$

【小问 2 详解】

解: 由折叠可得: $BE = HE$, $CF = HF$, $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AHE}$, $S_{\text{四边形}AHFG} = S_{\text{四边形}DCFG}$,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

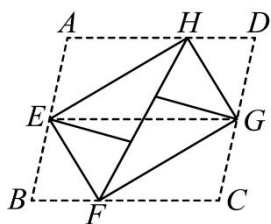
$$\therefore S_{\text{矩形}AEFG} = \frac{1}{2} S_{\text{平行四边形}ABCD} = \frac{1}{2} \times 30 = 15,$$

$$\therefore AE = S_{\text{矩形}AEFG} \div EF = 15 \div 3 = 5,$$

$$\therefore \text{矩形的周长} = 2(5+3) = 16;$$

【小问3详解】

解：连接 EG ，如图所示：



由折叠可得：点 E 和 G 分别是 AB 和 CD 的中点，

$$\therefore AE = DG, \quad AE \parallel DG,$$

$\therefore$ 四边形 $AEGD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = EG = HF,$$

$$\because EF : EH = 3 : 4,$$

$$\therefore \text{设 } EF = 3x, \text{ 则 } EH = 4x,$$

$$\because \text{在 } Rt\triangle HEF \text{ 中, } EF^2 + EH^2 = FH^2,$$

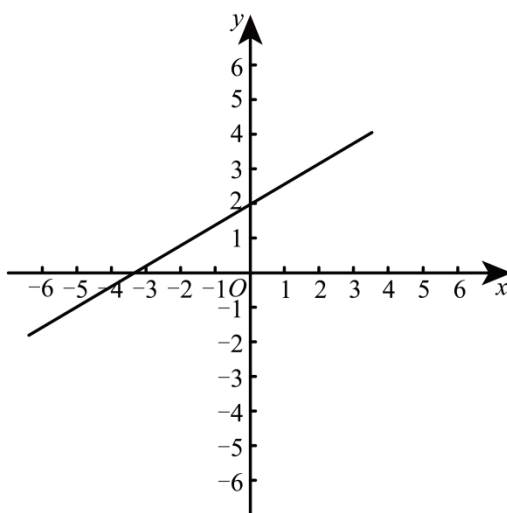
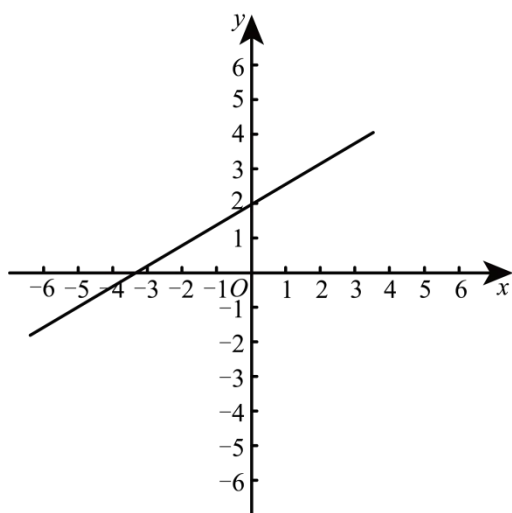
$$\therefore (3x)^2 + (4x)^2 = 20^2,$$

解得： $x = 4$ ，

$$\therefore EF = 12, \quad EH = 16,$$

$$\therefore \text{矩形的周长} = 2(12+16) = 56.$$

26. 已知直线 $y = kx + b$ 的图像与 x 轴， y 轴分别交于 $A(-2\sqrt{3}, 0)$ ， $B(0, 2)$ 两点，以 AB 为边在第二象限作等边三角形 ABC 。



备用图

- (1) 求直线 AB 的解析式;
- (2) 求点 C 的坐标;
- (3) 点 $D(2,0)$, 在直线 AB 上是否存在一点 P 使得三角形 ADP 为等腰三角形? 若存在直接写出点 P 的坐标. 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$

(2) $(-2\sqrt{3}, 4)$

(3) 存在, 点 P 的坐标为 $(3 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 或 $(-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ 或 $(1 - \sqrt{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$ 或 $(3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$

【解析】

【分析】 本题考查待定系数法求函数解析式、等边三角形的性质、等腰三角形的定义、解一元二次方程、全等三角形的判定与性质等知识, 分类讨论求解是解答的关键.

(1) 利用待定系数法求直线解析式即可;

(2) 过点 B 作 $BG \perp AC$ 于点 G , 如图, 先利用等边三角形的性质求得 $AB = AC = BC = 4, \angle ABC = \angle BAC = 60^\circ, \angle ABG = \angle CBG = 30^\circ, CG = AG = \frac{1}{2}AC = 2$, 再证明 $\triangle AOB \cong \triangle BGA$ (HL) 推导出 $AC \perp x$ 轴, 进而可求解;

(3) 由题意, 设 $P\left(m, \frac{\sqrt{3}}{3}m + 2\right)$, 分 $AP = AD$ 、 $PA = PD$ 、 $PD = AD$ 三种情况, 利用两点坐标距离公式和一元二次方程的解法求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y = kx + b$ 的图像与 x 轴, y 轴分别交于 $A(-2\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 2)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} -2\sqrt{3}k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$;

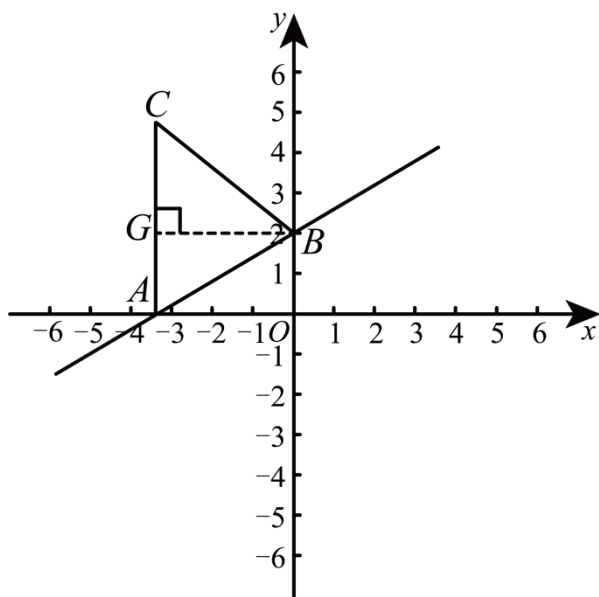
【小问 2 详解】

解: 由 $A(-2\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 2)$ 得 $AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$, $AB = 2$, $OA = 2\sqrt{3}$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB = AC = BC = 4, \angle ABC = \angle BAC = 60^\circ$,

过点 B 作 $BG \perp AC$ 于点 G , 如图,



则 $\angle ABG = \angle CBG = 30^\circ, CG = AG = \frac{1}{2}AC = 2$,

$\therefore OB = AG$,

$\because \angle BOA = \angle AGB = 90^\circ, AB = AB$,

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BGA$ (HL),

$\therefore \angle BAO = \angle ABG = 30^\circ$,

$\therefore \angle OAC = \angle BAO + \angle BAC = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$,

$\therefore AC \perp x$ 轴,

∴ 点 C 坐标为 $(-2\sqrt{3}, 4)$;

【小问 3 详解】

解: 存在. 由题意, 设 $P\left(m, \frac{\sqrt{3}}{3}m + 2\right)$,

∵ $A(-2\sqrt{3}, 0), D(2, 0)$,

$$\therefore AP^2 = (m + 2\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}m + 2\right)^2 = \frac{4}{3}m^2 + \frac{16\sqrt{3}}{3}m + 16,$$

$$PD^2 = (m - 2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}m + 2\right)^2 = \frac{4}{3}m^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 4\right)m + 8,$$

$$AD^2 = (2 + 2\sqrt{3})^2 = 16 + 8\sqrt{3},$$

当 $AP = AD$ 时, 即 $AP^2 = AD^2$,

$$\text{则 } \frac{4}{3}m^2 + \frac{16\sqrt{3}}{3}m + 16 = 16 + 8\sqrt{3},$$

解得: $m = 3 - \sqrt{3}$ 或 $m = -3 - 3\sqrt{3}$

∴ 点 P 的坐标为 $(3 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 或 $(-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$;

当 $PA = PD$ 时, 即 $PA^2 = PD^2$,

$$\text{则 } \frac{4}{3}m^2 + \frac{16\sqrt{3}}{3}m + 16 = \frac{4}{3}m^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 4\right)m + 8,$$

解得: $m = 1 - \sqrt{3}$,

∴ 点 P 的坐标为 $\left(1 - \sqrt{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

当 $PD = AD$ 时, 即 $PD^2 = AD^2$,

$$\text{则 } \frac{4}{3}m^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 4\right)m + 8 = 16 + 8\sqrt{3},$$

解得: $m = 3 + \sqrt{3}$ 或 $m = -2\sqrt{3}$ (与点 A 重合, 舍去),

∴ 点 P 的坐标为 $(3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$;

综上，满足条件的点 P 的坐标为 $(3-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$ 或 $(-3-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$ 或 $(1-\sqrt{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3})$ 或 $(3+\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$.