

娄山中学第二学期八年级

数学学科期中试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分)

1. 下列函数中，一次函数是 ()

A. $y = -2x + 1$

B. $y = x^2 + 2$

C. $y = \frac{1}{x} - 1$

D. $y = \frac{1}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数，形如 $y = kx + b$ (k 、 b 是常数，且 $k \neq 0$) 的函数是一次函数，据此判断即可求解，掌握一次函数的定义是解题的关键.

【详解】 解： A、 $y = -2x + 1$ 是一次函数，该选项符合题意；

B、 $y = x^2 + 2$ 不是一次函数，该选项不合题意；

C、 $y = \frac{1}{x} - 1$ 不是一次函数，该选项不合题意；

D、 $y = \frac{1}{x}$ 不是一次函数，该选项不合题意；

故选：A.

2. 下列方程中，是二项方程的为 ()

A. $x^2 + 2x = 1$

B. $x^2 + x = 0$

C. $x^3 - 8 = 0$

D. $x = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】 二项方程的左边只有两项，其中一项含未知数 x ，另一项是常数项；方程的右边是 0，结合选项进行判断即可.

【详解】 解： A. 不是二项方程，方程右边不等于 0，不符合题意；

B. 不是二项方程，方程左边没有常数项，不符合题意；

C. 是二项方程，符合题意；

D. 不是二项方程，方程左边只有一项，不符合题意；

故选：C.

【点睛】 本题考查二项方程的定义，注意二项方程的左边只有两项，一项含未知数，一项是常数，右边为 0，

熟练掌握二项方程的定义是解决问题的关键.

3. 下列方程中, 有实数解的是 ()

A. $x^6 + 1 = 0$

B. $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2}$

C. $\sqrt{x-2} + 3 = 0$

D. $\sqrt{2-x} = x$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了无理方程: 解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解, 在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法. 用乘方法 (即将方程两边各自乘同次方来消去方程中的根号) 来解无理方程, 往往会产生增根, 应注意验根.

利用乘方的意义可对 A 进行判断; 通过解分式方程可对 B 进行判断; 利用二次根式的性质可对 C 进行判断; 通过解无理方程可对 D 进行判断.

【详解】解: A、 $x^6 \geq 0$, 则 $x^6 + 1 > 0$, 所以方程 $x^6 + 1 = 0$ 没有实数解, 故本选项不符合题意;

B、去分母得: $x = 2$, 此时 $x - 2 = 0$, 原方程无解, 故本选项不符合题意;

C、 $\sqrt{x-2} \geq 0$, 则 $\sqrt{x-2} + 3 > 0$ 所以方程 $\sqrt{x-2} + 3 = 0$ 没有实数解, 故本选项不符合题意;

D、两边平方得 $2 - x = x^2$, 解得: $x_1 = 1, x_2 = -2$, 经检验 $x = 1$ 为原方程的解, 故本选项符合题意;

故选: D

4. 某灾区恢复生产, 计划在一定时间内种 60 亩蔬菜, 实际播种时每天比原计划多种 3 亩, 因此提前一天完成任务, 问实际种了几天? 现设实际种了 x 天, 则可列出方程 ()

A. $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+1} = 3$

B. $\frac{60}{x-1} - \frac{60}{x} = 3$

C. $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+3} = 1$

D. $\frac{60}{x-3} - \frac{60}{x} = 1$

【答案】A

【解析】

【分析】设实际种了 x 天, 则原计划需要 $(x+1)$ 天, 根据题意, 实际每天种的亩数=原计划每天种的亩数=3, 列分式方程即可.

【详解】设实际种了 x 天, 则原计划需要 $(x+1)$ 天, 根据题意, 得

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+1} = 3.$$

故选 A.

【点睛】本题考查了分式方程的应用, 根据题意列出分式方程是解题的关键.

5. 已知平行四边形的一条边长为 14, 下列各组数中, 能分别作它的两条对角线长的是 ()

A. 10 与 16

B. 12 与 16

C. 20 与 22

D. 10 与 18

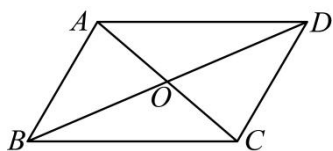
【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了平行四边形的性质，构成三角形的条件，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于点 O ， $AB = 14$ ，则 $OA = \frac{1}{2}AC$ ， $OB = \frac{1}{2}BD$ ，令对角线的长等于对应选项中的值，进而得到 OA ， OB 的长，再判断能否构成三角形 AOB 即可得到答案.

【详解】解：如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于点 O ， $AB = 14$ ，则

$$OA = \frac{1}{2}AC, OB = \frac{1}{2}BD,$$



A、当 $AC = 10$ ， $BD = 16$ 时，则 $OA = 5$ ， $OB = 8$ ，

$\therefore OA + OB = 13 < AB$ ，即此时不能构成三角形 AOB ，故此选项不符合题意；

B、当 $AC = 12$ ， $BD = 16$ 时，则 $OA = 6$ ， $OB = 8$ ，

$\therefore OA + OB = 14 = AB$ ，即此时不能构成三角形 AOB ，故此选项不符合题意；

C、当 $AC = 20$ ， $BD = 22$ 时，则 $OA = 10$ ， $OB = 11$ ，

$\therefore OA + OB = 21 > AB$ ，即此时能构成三角形 AOB ，故此选项符合题意；

D、当 $AC = 10$ ， $BD = 18$ 时，则 $OA = 5$ ， $OB = 9$ ，

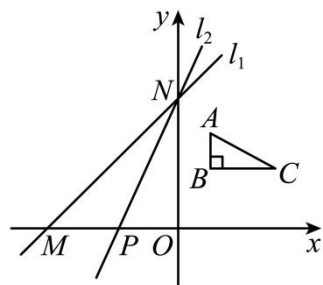
$\therefore OA + OB = 14 = AB$ ，即此时不能构成三角形 AOB ，故此选项不符合题意；

故选：C.

6. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $l_1: y = x + 4$ 的图象与 x 轴、 y 轴交于点 M ， N ，直线 $l_2: y = kx + b$

经过点 N ，且与 x 轴交于 OM 的中点 P ，以 $A(1,3)$ ， $B(1,2)$ ， $C(3,2)$ 为顶点的 ABC 在第一象限内，将

ABC 向左平移 n 个单位，若 ABC 的各边始终与直线 l_1 或直线 l_2 有交点，则 n 的取值范围是 ()



A. $\frac{3}{2} \leq n \leq 3$

B. $\frac{3}{2} \leq n \leq 5$

C. $2 \leq n \leq 5$

D. $2 \leq n \leq 3$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图象上点的坐标特征、一次函数的性质及坐标与图形变化 - 平移，根据题意得出，当点 A 在直线 l_2 上时， n 取得最小值，当点 C 在直线 l_1 上时， n 取得最大值，据此可解决问题.

【详解】 解：由题知，将 $x=0$ 代入 $y=x+4$ 得， $y=4$ ，

所以点 N 的坐标为 $(0,4)$ ，

将 $y=0$ 代入 $y=x+4$ 得， $x=-4$ ，

所以点 M 的坐标为 $(-4,0)$ ，

因为点 P 为 OM 的中点，

所以点 P 的坐标为 $(-2,0)$ ，

将点 N 和点 P 的坐标代入 $y=kx+b$ 得，

$$\begin{cases} b=4 \\ -2k+b=0 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k=2 \\ b=4 \end{cases},$

所以直线 l_2 的函数解析式为 $y=2x+4$ ，

根据所给平移方式可知，平移后各点坐标为 $A(1-n,3)$ ， $B(1-n,2)$ ， $C(3-n,2)$ ，

当点 A 在直线 l_2 上时， n 取得最小值，此时将 $A(1-n,3)$ 代入 $y=2x+4$ 得，

$$2(1-n)+4=3,$$

解得 $n=\frac{3}{2}$ ；

当点 C 在直线 l_1 上时， n 取得最大值，将 $C(3-n,2)$ 代入 $y=x+4$ 得，

$$3-n+4=2,$$

解得 $n=5$ ，

所以 n 的取值范围是： $\frac{3}{2} \leq n \leq 5$.

故选：B.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 一次函数 $y = -x - 2$ 在 y 轴上的截距是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 一次函数 $y = -x - 2$ 在 y 轴上的截距即一次函数与 y 轴交点的纵坐标.

【详解】 解： 令 $x = 0$ ， 则 $y = -2$ ， 所以一次函数 $y = -x - 2$ 在 y 轴上的截距是 -2 .

故答案为： -2

【点睛】 本题考查的是一次函数 $y = -x - 2$ 与 x, y 轴的交点坐标， 掌握求函数与 x, y 轴的交点坐标是解题关键.

8. 已知一次函数 $y = (k - 1)x - 2$ ， y 随 x 的增大而减小， 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 1$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质， 属于基本题型， 熟练掌握一次函数的性质是解题关键.

一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)， 当 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小. 据此列式解答即可.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = (k - 1)x - 2$ ， y 随 x 的增大而减小，

$$\therefore k - 1 < 0,$$

$$\therefore k < 1.$$

故答案为： $k < 1$

9. 一次函数 $y = 4x - 1$ 与 $y = 2x + 3$ 的图象的交点坐标为_____.

【答案】 $(2, 7)$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数图象交点坐标. 根据两条直线的交点坐标， 就是由这两条直线相对应的一次函数表达式所组成的二元一次方程组的解， 联立方程组求解即可.

【详解】 解： 联立方程组：
$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 4x - 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases},$$

∴ 交点坐标为 $(2, 7)$.

故答案为: $(2, 7)$.

10. 将二元二次方程 $x^2 - xy - 12x = 0$ 化为二个一次方程为_____.

【答案】 $x = 0$ 和 $x - y - 12 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解的应用, 利用提公因式法因式分解即可求解, 掌握因式分解的方法是解题的关键.

【详解】 解: ∵ $x^2 - xy - 12x = 0$,

$$\therefore x(x - y - 12) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x - y - 12 = 0,$$

$$\therefore \text{化为的二个一次方程为 } x = 0 \text{ 和 } x - y - 12 = 0,$$

故答案为: $x = 0$ 和 $x - y - 12 = 0$.

11. 用换元法解分式方程 $\frac{x-2}{x} - \frac{3x}{x-2} - 2 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x-2}{x} = y$, 则原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 2y - 3 = 0$;

【解析】

【分析】 如果设 $\frac{x-2}{x} = y$, 那么 $\frac{x}{x-2} = \frac{1}{y}$, 原方程变为: $y - \frac{3}{y} - 2 = 0$, 方程两边乘最简公分母 y , 可以把分式方程转化为整式方程.

【详解】 解: 设 $\frac{x-2}{x} = y$,

$$\text{原方程变为 } y - \frac{3}{y} - 2 = 0,$$

$$\text{方程两边都乘 } y \text{ 得 } y^2 - 2y - 3 = 0.$$

故原方程可化为关于 y 的整式方程是 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

故答案为 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

【点睛】 本题考查用换元法使分式方程简便. 换元后再在方程两边乘最简公分母可以把分式方程转化为整式方程. 应注意换元后的字母系数.

12. “通过等价变换, 化陌生为熟悉, 化未知为已知” 是数学学习中解决问题的基本思维方, 如: 解方程 $x - \sqrt{x} = 0$, 就可以利用该思维方式, 设 $\sqrt{x} = y$, 将原方程转化为: $y^2 - y = 0$ 这个熟悉的关于 y 的一元二次方程, 解出 y , 再求 x , 这种方法又叫“换元法”, 请你用这种思维方式和换元法解方程:

$x^2 + 4x + 4\sqrt{x^2 + 4x} - 5 = 0$. 方程的解为 _____.

【答案】 $x_1 = -2 + \sqrt{5}$, $x_2 = -2 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 设 $\sqrt{x^2 + 4x} = y$, 则原方程化为 $y^2 + 4y - 5 = 0$, 求出 y 的值, 当 $y = -5$ 时, $\sqrt{x^2 + 4x} = -5$, 根据算术平方根具有非负性得出此时方程无解; 当 $y = 1$ 时, $\sqrt{x^2 + 4x} = 1$, 求出 x , 最后进行检验即可.

【详解】 解: $x^2 + 4x + 4\sqrt{x^2 + 4x} - 5 = 0$,

设 $\sqrt{x^2 + 4x} = y$, 则原方程化为:

$$y^2 + 4y - 5 = 0,$$

$$(y + 5)(y - 1) = 0,$$

解得: $y_1 = -5$, $y_2 = 1$,

当 $y = -5$ 时, $\sqrt{x^2 + 4x} = -5$,

∵ 算术平方根具有非负性, 所以此方程无解;

当 $y = 1$ 时, $\sqrt{x^2 + 4x} = 1$,

方程两边平方, 得 $x^2 + 4x = 1$,

解得: $x_1 = -2 + \sqrt{5}$, $x_2 = -2 - \sqrt{5}$,

经检验 $x_1 = -2 + \sqrt{5}$, $x_2 = -2 - \sqrt{5}$ 都是原方程的解.

故答案为: $x_1 = -2 + \sqrt{5}$, $x_2 = -2 - \sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了无理方程, 解一元二次方程, 用换元法解方程等知识点, 能正确换元是解此题的关键, 注意: 解无理方程一定要进行检验.

13. 关于 x 的方程 $b(x - 2) = 4 (b \neq 0)$ 的解是_____.

【答案】 $x = \frac{4}{b} + 2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次方程，去括号，再移项，最后系数化为1即可求解，掌握解一元一次方程的步骤是解题的关键.

【详解】 解：去括号，得 $bx - 2b = 4$,

移项，得 $bx = 4 + 2b$,

系数化为1，得 $x = \frac{4}{b} + 2$,

故答案为： $x = \frac{4}{b} + 2$.

14. 如果一个多边形的每一个内角都是 140° ，那么这个多边形是_____边形

【答案】 九

【解析】

【分析】 先求出每一个外角的度数，再用 360° 除即可求出边数.

【详解】 解： $\because$ 多边形的每一个内角都等于 140° ,

$\therefore$ 多边形的每一个外角都等于 $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$,

$\therefore$ 边数 $n = 360^\circ \div 40^\circ = 9$.

故答案是：九.

【点睛】 本题主要考查了多边形的内角与外角的关系，求出每一个外角的度数是关键.

15. 在 $\square ABCD$ 中，若 $\angle A = 3\angle B$ ，则 $\angle D$ 为_____度.

【答案】 45

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行四边形的性质，熟练掌握平行四边形的对角相等，对边平行是解题的关键.

根据平行四边形的性质，可得 $AD \parallel BC$ ， $\angle B = \angle D$ ，再结合 $\angle A = 3\angle B$ ，可得到 $\angle B = 45^\circ$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $\angle B = \angle D$ ，

$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$ ，

$\because \angle A = 3\angle B$ ，

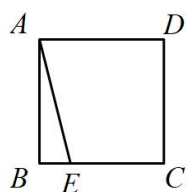
$\therefore 3\angle B + \angle B = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle B = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle D = 45^\circ$.

故答案为：45

16. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E 为 BC 上一点， $BE = 1$ ，点 P 为正方形 $ABCD$ 边上一点，且 $BP = AE$ ，则 AP 的长等于_____.



【答案】1 或 $\sqrt{5}$ 或 1

【解析】

【分析】根据题意，分两种情况进行讨论①当点 P 在 AD 边上时，通过证明 $\triangle ABE \cong \triangle BAP$ (SAS)，即可求解；②当点 P 在 CD 边上时，通过证明 $\triangle ABE \cong \triangle BCP$ (SAS) 可得 $CP = BE = 1$ ，即可求出 $DP = DC - CP = 3$ ，最后根据勾股定理求解即可.

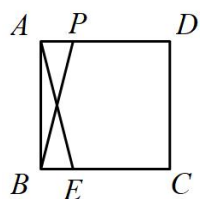
【详解】解：①当点 P 在 AD 边上时，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BAP$ 中，

$$\begin{cases} AB = BA \\ \angle ABE = \angle BAP, \\ AE = BP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BAP \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AP = BE = 1;$$



②当点 P 在 CD 边上时，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCP$ 中，

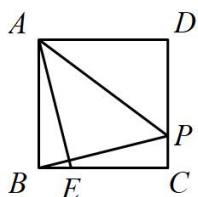
$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABE = \angle BCP, \\ AE = BP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCP \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CP = BE = 1;$$

$$\therefore DP = DC - CP = 3,$$

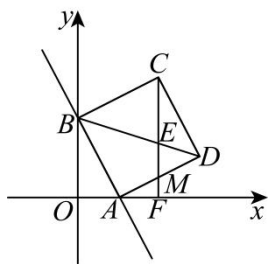
在 $\text{Rt}\triangle ADP$ 中, 根据勾股定理可得: $AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = 5,$



故答案为: 1 或 5.

【点睛】 本题主要考查了正方形的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 解题的关键是根据题意进行分类讨论, 确定点 P 的位置.

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 与 x 轴和 y 轴分别交于点 A 和点 B , 以 AB 为边在直线右侧作正方形 $ABCD$, 连接 BD , 过点 C 作 $CF \perp x$ 轴, 垂足为点 F , 交 BD 于点 E , 连接 AE , 则三角形 AFE 的周长为_____.



【答案】 16

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质与判定, 正方形的性质与判定, 求一次函数与坐标轴的交点坐标, 解本题的关键在熟练掌握相关的性质与判定定理.

首先通过一次函数解析式, 得到点 A 和 B 的坐标, 进而即可得出 AO , BO 的长, 再过点 B 作 BN 平行于 OF , 交 CF 于 N , 证明 $\triangle CBN \cong \triangle ABO$, 得出 $BN = BO = 8$, $CN = OA = 6$, 再证明四边形 $OBNF$ 为正方形, 得到 $OF = NF = OB = 8$, 则 $CF = CN + NF = 14$ $AF = OF - OA = 2$, 再证明 $\triangle CDE \cong \triangle ADE$, 进而得到 $AE = CE$, 所以 $AE + EF = CE + EF = CF$, 即可算出三角形 AFE 的周长.

【详解】 解: 在 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 中, 当 $y = -\frac{4}{3}x + 8 = 0$ 时, $x = 6$, 当 $x = 0$ 时, $y = -\frac{4}{3}x + 8 = 8$,

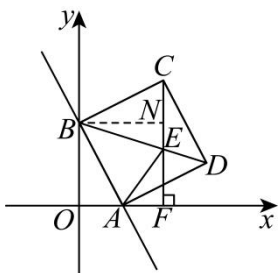
$$\therefore A(6,0), B(0,8),$$

$$\therefore AO = 6, BO = 8,$$

过点 B 作 BN 平行于 OF , 交 CF 于 N ,

$$\because CF \perp x \text{ 轴}$$
$$\therefore CF \parallel y \text{ 轴}$$
$$\therefore \angle NBO = 180^\circ - \angle BNF = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle ABO + \angle ABN = 90^\circ;$$
$$\therefore CF \perp OF,$$
$$\therefore BN \perp CF,$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC, \quad \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBN + \angle ABN = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle CBN = \angle ABO,$$

在 $\triangle CBN$ 和 $\triangle ABO$ 中,

$$\begin{cases} \angle CBN = \angle ABO \\ \angle BNC = \angle BOA = 90^\circ \\ BC = BA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CBN \cong \triangle ABO \text{ (AAS)},$$
$$\therefore BN = BO = 8, \quad CN = OA = 6 \quad ,$$
$$\therefore \angle BOF = \angle CFO = \angle OBN = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OBNF$ 为矩形,

$\therefore$ 矩形 $OBNF$ 为正方形,

$$\therefore OF = NF = OB = 8,$$
$$\therefore CF = CN + NF = 14$$
$$\therefore AF = OF - OA = 2,$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore CD = AD, \quad \angle CDE = \angle ADE,$$

在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle ADE$ 中,

$$\begin{cases} CD = AD \\ \angle CDE = \angle ADE, \\ DE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle ADE (\text{SAS}),$$

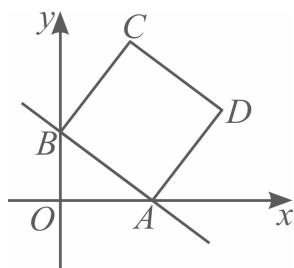
$$\therefore AE = CE,$$

$$\therefore AE + EF = CE + EF = CF,$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 周长} = AE + EF + AF = CF + AF = 14 + 2 = 16.$$

故答案为: 16.

18. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = -\frac{3}{4}x + b$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B , 且点 A 的坐标为 $(4, 0)$, 四边形 $ABCD$ 是正方形. 点 M 是线段 AB 上的一个动点 (点 A 、 B 除外), 点 N 在 x 轴的上方, 以 O 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形, 则点 N 的坐标为_____.



【答案】 $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{72}{25}, \frac{96}{25}\right)$

【解析】

【分析】 先求出直线 AB 得解析式, 可得到点 B 的坐标, 然后分两种情况: 当四边形 $OMBN$ 为菱形时, 当四边形 $BOMN$ 为菱形时, 即可求解.

【详解】 解: 把点 $(4, 0)$ 代入 $y = -\frac{3}{4}x + b$ 得:

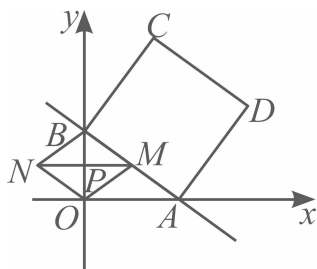
$$-\frac{3}{4} \times 4 + b = 0, \text{ 解得: } b = 3,$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 得解析式为 } y = -\frac{3}{4}x + 3,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 3,$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (0, 3),$$

如图, 当四边形 $OMBN$ 为菱形时,



$\therefore MN$ 垂直平分 OB ,

$\therefore$ 点 M, N 的纵坐标均为 $\frac{3}{2}$, 且点 M, N 关于 y 轴对称,

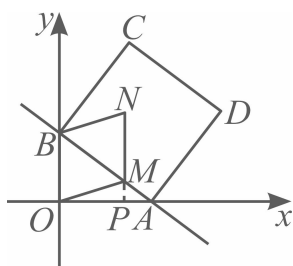
把 $y = \frac{3}{2}$ 代入 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 得:

$$\frac{3}{2} = -\frac{3}{4}x + 3, \text{ 解得: } x = 2,$$

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$,

此时点 N 的坐标为 $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$;

如图, 当四边形 $BOMN$ 为菱形时, 延长 NM 交 x 轴于点 P , 此时 $OB = BN = NM = MO = 3$, $MN \parallel y$ 轴,



设点 M 的坐标为 $\left(m, -\frac{3}{4}m + 3\right)$, 则 $PM = -\frac{3}{4}m + 3, OP = m$,

$\therefore MN \parallel y$ 轴,

$\therefore MN \perp x$ 轴,

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $\left(m, -\frac{3}{4}m + 3 + 3\right)$, 即 $\left(m, -\frac{3}{4}m + 6\right)$

在 $\text{Rt}\triangle OPM$ 中, $OP^2 + PM^2 = OM^2$,

$$\therefore m^2 + \left(-\frac{3}{4}m + 3\right)^2 = 3^2,$$

解得: $m = \frac{72}{25}$,

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $\left(\frac{72}{25}, \frac{96}{25}\right)$.

综上所述, 点 N 的坐标为 $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{72}{25}, \frac{96}{25}\right)$.

故答案为: $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{72}{25}, \frac{96}{25}\right)$

【点睛】此题主要考查待定系数法求函数解析式、正方形的性质、菱形的性质、勾股定理, 主要掌握方程思想、分类讨论思想与数形结合思想的应用.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 58 分)

19. 解方程 (组)

(1) 解方程: $\sqrt{-2x+3} = x$

(2) 解方程组: $\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0 & \text{①} \\ x + y = 2 & \text{②} \end{cases}$

(3) 解方程: $x^2 - 2x - \frac{6}{x^2 - 2x} = 1$

【答案】(1) $x = 1$

(2) $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

(3) $x = 3$ 或 $x = -1$

【解析】

【分析】本题主要考查了解无理方程, 解二元二次方程, 解分式方程, 熟知相关解方程的方法是解题的关键.

(1) 把方程两边同时平方得到一个一元二次方程, 解方程即可得到答案;

(2) 先把方程①的左边利用十字相乘法分解因式, 再由②得 $x = 2 - y$, 把 $x = 2 - y$ 代入①分解因式的方程中求出 y 的值, 进而求出 x 的值即可;

(3) 设 $x^2 - 2x = t$, 则原方程可化为 $t - \frac{6}{t} = 1$, 再去分母得到整式方程, 解方程并验证和检验即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: $\because \sqrt{-2x+3}=x,$

$$\therefore -2x+3=x^2,$$

$$\therefore x^2+2x-3=0,$$

$$\therefore (x+3)(x-1)=0,$$

$$\therefore x+3=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$\therefore x=1 \text{ 或 } x=-3 \text{ (舍去, 算术平方根的非负性);}$$

【小问 2 详解】

解:
$$\begin{cases} x^2+5xy+6y^2=0 \text{ ①} \\ x+y=2 \text{ ②} \end{cases}$$

由①得: $(x+2y)(x+3y)=0$ ③,

由②得: $x=2-y$ ④,

把④代入③中得: $(2-y+2y)(2-y+3y)=0,$

$$\therefore y+2=0 \text{ 或 } 2y+2=0,$$

解得 $y=-2$ 或 $y=-1,$

当 $y=-2$ 时, $x=2-(-2)=4,$

当 $y=-1$ 时, $x=2-(-1)=3,$

$$\therefore \text{原方程组的解为 } \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}.$$

【小问 3 详解】

解: 设 $x^2-2x=t$, 则原方程可化为 $t-\frac{6}{t}=1,$

$$\therefore t^2-t-6=0,$$

$$\therefore (t-3)(t+2)=0,$$

$$\therefore t-3=0 \text{ 或 } t+2=0,$$

$$\therefore t=3 \text{ 或 } t=-2,$$

$$\therefore x^2-2x=3 \text{ 或 } x^2-2x=-2,$$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ 或 } x^2 - 2x + 2 = 0,$$

解方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 得 $x = 3$ 或 $x = -1$, 解方程 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 可得原方程无解,

经检验, $x = 3$ 和 $x = -1$ 都是原方程的解,

$\therefore$ 原方程的解为 $x = 3$ 或 $x = -1$.

20. 已知一次函数 $y = kx - 4$, 当 $x = 2$ 时, $y = -3$.

(1) 求一次函数的表达式;

(2) 将该函数的图像向上平移 6 个单位长度, 求平移后的图像与 x 轴交点的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x - 4$. (2) $(-4, 0)$.

【解析】

【分析】 (1) 把点 $(2, -3)$ 代入解析式即可求出 k ;

(2) 先得出函数图像向上平移 6 单位的函数关系式, 再令 $y=0$, 即可求出与 x 轴交点的坐标.

【详解】 解: (1) 将 $x = 2$, $y = -3$ 代入 $y = kx - 4$, 得 $-3 = 2k - 4$. $\therefore k = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y = \frac{1}{2}x - 4$.

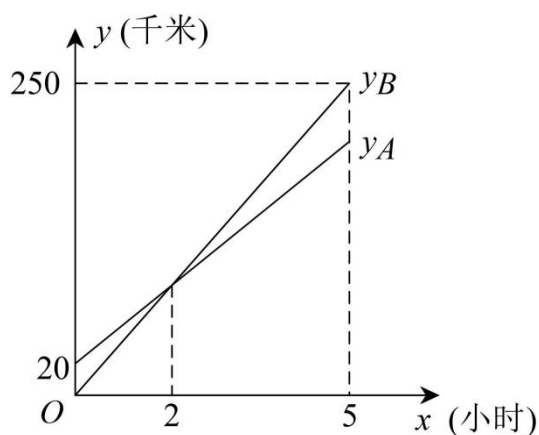
(2) 将 $y = \frac{1}{2}x - 4$ 的图像向上平移 6 个单位长度得 $y = \frac{1}{2}x + 2$.

当 $y = 0$ 时, $x = -4$.

$\therefore$ 平移后的图像与 x 轴交点的坐标为 $(-4, 0)$.

【点睛】 此题主要考查一次函数的解析式的求法与在坐标轴方向上的平移.

21. A 团队接到抗疫任务, 乘坐巴士从甲地出发赶往乙地执行任务, 甲乙两地距离为 340 千米. 他们出发后不久, B 专家也接到命令须赶往当地进行支援, 他乘坐轿车前往. 设 A 团队走的路程为 y_A (千米), B 专家走的路程为 y_B (千米), 他们前进的时间 (从 B 出发开始计时) 为 x (小时), y_A 、 y_B 与 x 之间的部分函数图像如图所示.



- (1) 在 B 专家出发时, A 团队已经行进了 ____ 千米; B 专家的速度是每小时 ____ 千米.
- (2) 当 $0 \leq x \leq 5$ 时, 求 y_A 关于 x 的函数解析式;
- (3) 如果 5 个小时后, B 专家保持之前的速度继续前进, A 团队提高速度去追赶 B , 提速后的速度是每小时 70 千米, 请问 A 团队能否在 B 专家到达乙地之前追上他? 如果能够追上, 求出此时他们离乙地的距离; 如果不能, 请说明理由.

【答案】 (1) 20, 50;

(2) $y = 40x + 20$;

(3) A 团队能在 B 专家到达乙地之前追上他, 此时他们离乙地的距离是 15 千米.

【解析】

【分析】 (1) 根据图像可知: B 专家出发时, A 团队已经行进了 20 千米, 然后再求出 B 专家的速度即可;

(2) 由图像可知, B 专家出发后 2 小时追上 A 团队, 此时离甲地 $2 \times 50 = 100$ (千米), 然后再运用待定系数法求得一次函数的解析式即可;

(3) 先根据题意求出 A 团队的速度, 进而求得 A 团队走的路程为 y_A , B 专家走的路程为 y_B , 再求得 A 团队追上 B 专家所需的时间, 然后求出追上时 B 专家走的路程, 最后用总路程减去即可.

【小问 1 详解】

解: (1) 由图像可知: B 专家出发时, A 团队已经行进了 20 千米,

B 专家的速度是 $250 \div 5 = 50$ (千米/小时),

故答案为: 20, 50.

【小问 2 详解】

解: 由图像可知, B 专家出发后 2 小时追上 A 团队, 此时离甲地 $2 \times 50 = 100$ (千米),

设当 $0 \leq x \leq 5$ 时, y_A 关于 x 的函数解析式是 $y = kx + 20$, 将 $(2, 100)$ 代入得:

$$2k + 20 = 100,$$

解得 $k = 40$,

∴ 当 $0 \leq x \leq 5$ 时, y_A 关于 x 的函数解析式是 $y = 40x + 20$.

【小问 3 详解】

解: 由题意得, A 团队的速度是 $(100 - 20) \div 2 = 40$ (千米/小时),

当 $x = 5$ 时, $y_A = 40 \times 5 + 20 = 220$, $y_B = 250$,

所以 A 团队追上 B 专家所需的时间为 $30 \div (70 - 50) = 1.5$ (小时),

当 $x = 1.5 + 5 = 6.5$ 时, $y_B = 50 \times 6.5 = 325$,

$340 - 325 = 15$ (千米),

答: A 团队能在 B 专家到达乙地之前追上他, 此时他们离乙地的距离是 15 千米.

【点睛】 本题主要考查了一次函数的应用、一次函数的图像等知识点, 正确从一次函数图像获取信息成为解答本题的关键.

22. 今年新型“和谐号”高速列车正式投入沪宁线运行, 已知上海到南京全程约为 300 公里, 如果新型“和谐号”高速列车行驶的平均速度比原来“和谐号”动车行驶的平均速度每分钟快 2 公里, 那么从上海到南京比原来“和谐号”动车少用 40 分钟, 问新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要多少分钟?

【答案】 60 分钟

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式方程的实际应用, 设新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 x 分钟, 根据已知上海到南京全程约 300 公里, 如果新型“和谐号”高速列车行驶的平均速度比原来的“和谐号”动车行驶的平均速度每分钟快 2 公里, 那么从上海到南京比原来“和谐号”动车少用 40 分钟, 可列方程求解.

【详解】 解: 设新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 x 分钟, 则原来“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 $(x + 40)$ 分钟,

由题意得, $\frac{300}{x} - \frac{300}{x + 40} = 2$,

解得 $x = 60$ 或 $x = -100$ (舍去),

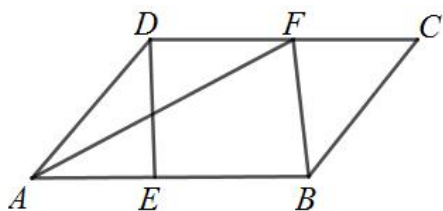
经检验, $x = 60$ 是原方程的解, 且符合题意,

答: 新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 60 分钟.

23. 在平行四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AB, DC 上的点, 且 $AE = CF$, 连接 DE, BF, AF .

(1) 求证: 四边形 $DEBF$ 是平行四边形;

(2) 若 AF 平分 $\angle DAB$, $AE = 3$, $DE = 4$, $BE = 5$, 求 AF 的长.



【答案】(1) 见解析；(2) $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质得到 $\angle A = \angle C$, $AD = CB$, 根据全等三角形的性质和平行四边形的判定定理即可得到结论；

(2) 根据平行线的性质和角平分线的定义得到 $\angle DAF = \angle AFD$, 求得 $AD = DF$, 根据勾股定理的逆定理和勾股定理即可得到结论.

【详解】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle A = \angle C, AD = CB,$$

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle BCF$ 中

$$\begin{cases} AD = CB \\ \angle A = \angle C \\ AE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle BCF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore DE = BF,$$

$$\because AB = CD, AE = CF,$$

$$\therefore AB - AE = CD - CF,$$

$$\text{即 } DF = BE,$$

$$\therefore DE = BF, BE = DF,$$

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形;

(2) 解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle DFA = \angle BAF,$$

$$\because AF \text{ 平分 } \angle DAB,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle BAF,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle AFD,$$

$$\therefore AD = DF,$$

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形,

$$\therefore DF = BE = 5, \quad BF = DE = 4,$$

$$\therefore AD = 5,$$

$$\therefore AE = 3, \quad DE = 4,$$

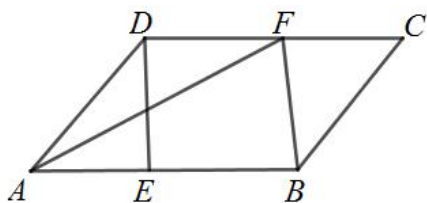
$$\therefore AE^2 + DE^2 = AD^2,$$

$$\therefore \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \parallel BF,$$

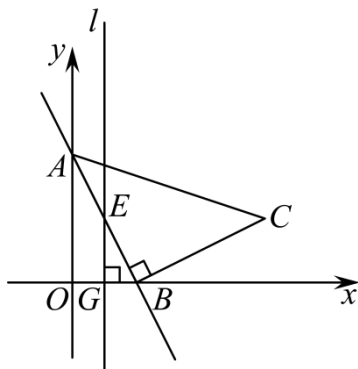
$$\therefore \angle ABF = \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$$



【点睛】本题考查了全等三角形的判定和性质，平行四边形的性质和判定，勾股定理及逆定理，能综合运用知识点进行推理是解题的关键.

24. 已知一次函数 $y = -2x + 4$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别交于点 B、A. 以 AB 为边在第一象限内作等腰直角三角形 ABC, 且 $\angle ABC = 90^\circ$, $BA = BC$, 作 OB 的垂直平分线 l , 交直线 AB 与点 E, 交 x 轴于点 G.



(1) 求点 C 的坐标;

(2) 在 OB 的垂直平分线 l 上有一点 M, 且点 M 与点 C 位于直线 AB 的同侧, 使得 $2S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC}$, 求点 M 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 联结 CE、CM, 判断 $\triangle CEM$ 的形状, 并给予证明;

【答案】(1) C (6, 2); (2) M(1, 7); (3) 见解析.

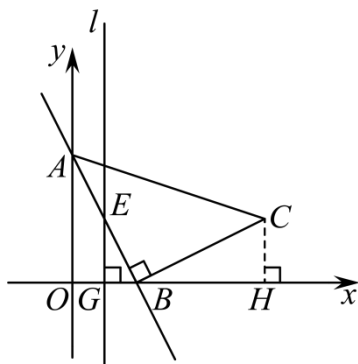
【解析】

【分析】(1) 过点 C 作 x 轴的垂线, 交 x 轴于点 H, 通过“角边角”易证 $\triangle AOB \cong \triangle HCB$, 得到 $BH = AO = 4$, $CH = OB = 2$, 即可得到 C 点坐标;

(2) 根据题意可设点 $M(1, a)$ ，根据 $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AEM} + S_{\triangle EMB}$ 可得关于 m 的方程，然后求解方程即可；

(3) 由 (2) 可得 $CE=5, EM=5, CM=5\sqrt{2}$ ，根据勾股定理的逆定理即可得到 $\triangle EMC$ 是等腰直角三角形.

【详解】解：(1) 过点 C 作 x 轴的垂线，交 x 轴于点 H ，



$$\because y = -2x + 4,$$

$$\therefore A(0, 4), B(2, 0),$$

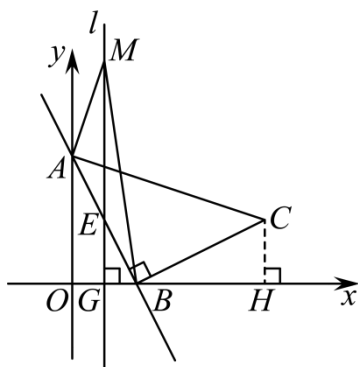
$$\because BA=BC,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle HCB \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BH=AO=4, CH=OB=2,$$

$$\therefore C(6, 2)$$

(2) 如图，由题意可知点 $G(1, 0)$ ，点 $E(1, 2)$ ，



$$\because AB=BC=2\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 10,$$

$$\because 2S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABM} = 5,$$

$$\text{而 } S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AEM} + S_{\triangle EMB},$$

$$(3) \frac{AO}{OC} = \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{AO}{OC} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，含 30° 度角的直角三角形等知识点，熟练掌握相关知识点，是解题的关键：

(1) 等边对等角，得到 $\angle B = \angle ACB$ ，证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ ，得到 $\angle B = \angle ACF$ ，进而得到 $\angle ACF = \angle ACB$ ，即可得证；

(2) 作 $AG \perp CF$ ，同 (1) 得到 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ ，得到 $CF = BE = x$ ， $\angle ACF = \angle B = 45^\circ$ ，勾股定理求出 AG 的长，利用面积公式列出函数关系式即可；

(3) 分 $AO = OF$ 和 $FA = FO$ ，两种情况进行讨论求解即可．

【小问 1 详解】

证明： $\because AB = AC$ ，

$$\therefore \angle B = \angle ACB,$$

$$\because \angle EAF = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle EAF - \angle CAE = \angle BAC - \angle CAE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAF,$$

又 $\because AE = AF$ ，

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF,$$

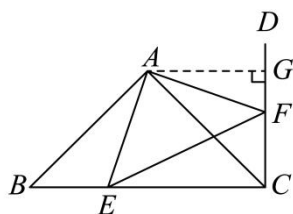
$$\therefore \angle B = \angle ACF,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle ACB,$$

$$\therefore AC \text{ 平分 } \angle BCD;$$

【小问 2 详解】

作 $AG \perp CF$ ，如图：



同 (1) 法可知： $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ ，

$$\therefore CF = BE = x, \quad \angle ACF = \angle B = 45^\circ,$$

$$\because AB = AC = 4, \quad AG \perp CF,$$

$$\therefore AG = CG = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} CF \cdot AG = \frac{1}{2} x \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}x, \text{ 即: } y = \sqrt{2}x;$$

【小问3 详解】

$$\because \angle B = 30^\circ, \angle EAF = \angle BAC, \text{ 且 } AE = AF, AB = AC,$$

$$\therefore \angle AEF = 30^\circ,$$

$$\because AE = AF,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle AEF = 30^\circ,$$

$$\text{同 (1) 法可知: } \angle ACF = \angle B = 30^\circ,$$

当 $\triangle AOF$ 为等腰三角形时, 分两种情况:

$$\text{①当 } AO = OF \text{ 时, 则: } \angle OAF = \angle AFE = 30^\circ,$$

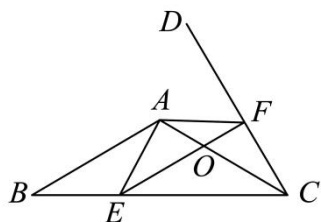
$$\therefore \angle FOC = \angle OAF + \angle AFE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CFO = 180^\circ - \angle OCF - \angle COF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = 30^\circ,$$

$$\therefore OC = 2OF = 2OA,$$

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{1}{2};$$



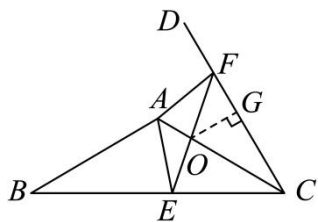
$$\text{②当 } FA = FO \text{ 时, 则: } \angle FAO = \angle FOA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AFE) = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle CFA = 180^\circ - \angle ACF - \angle CAF = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle CFA = \angle CAF, \angle OFC = \angle CFA - \angle AFO = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = CF,$$

作 $OG \perp CF$ 于点 G ,



在 $\text{Rt}\triangle CGO$ 中, $\angle OCG = 30^\circ$,

$$\therefore OC = 2OG,$$

$$\therefore CG = \sqrt{3}OG,$$

在 $\text{Rt}\triangle FGO$ 中, $\angle OFG = 45^\circ$,

$$\therefore FG = OG,$$

$$\therefore AC = CF = CG + FG = (\sqrt{3} + 1)OG,$$

$$\therefore OA = AC - OC = (\sqrt{3} - 1)OG,$$

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2};$$

综上: $\frac{AO}{OC} = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{AO}{OC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.