

上海科技大学附属学校 2024-2025 学年第二学期期中测评

八年级数学学科

(测试时间 100 分钟, 满分 150 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分)

1. 下列函数中, 为一次函数的是 ()

A. $y = \frac{k}{x} + 1$

B. $y = -2x$

C. $y = x^2 + 1$

D. $y = kx + 1$ (k 是任意常数).

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的定义, 一般地, 形如 $y = kx + b$ ($k \neq 0$, k 、 b 是常数) 的函数, 叫做一次函数, 熟练掌握一次函数的定义是解题的关键.

根据一次函数的定义对各项进行分析即可得到答案.

【详解】 解: A. $y = \frac{k}{x} + 1$ 中, 自变量在分母上, 不是一次函数, 故此选项不符合题意;

B. $y = -2x$ 是一次函数, 故此选项符合题意;

C. $y = x^2 + 1$ 中, 自变量 x 的次数为 2, 不是一次函数, 故此选项不符合题意;

D. $y = kx + 1$ (k 是任意常数), 当 $k \neq 0$ 时, 是一次函数, $k = 0$ 时, 不是一次函数, 故此选项不符合题意;

故选: B.

2. 在下列方程中, 有实数解的方程是 ()

A. $\sqrt{x-1} + 1 = 0$

B. $x^2 + 1 = 0$

C. $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = 0$

D. $x^2 + x + 4 = 0$

【答案】 C

【解析】

【分析】 此题考查了无理方程的解, 根据二次根式和平方的非负性, 解分式方程和一元二次方程的判别式逐项求解判断即可.

逐一分析各选项是否存在实数解.

【详解】选项 A: $\because \sqrt{x-1} \geq 0$

$\therefore \sqrt{x-1} + 1 \geq 1$, 无法等于 0, 无实数解;

选项 B: $\because x^2 + 1 = 0$.

$\therefore x^2 = -1$, 平方数非负, 无实数解;

选项 C: $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = 0$.

去分母得, $x^2 - 9 = 0$, 解得 $x = 3$ 或 $x = -3$.

将 $x = 3$ 代入 $x^2 + 3x = 18 \neq 0$, 符合题意;

将 $x = -3$ 代入 $x^2 + 3x = 0$, 不符合题意, 舍去;

$\therefore x = 3$ 是唯一实数解, 方程有解;

选项 D: $x^2 + x + 4 = 0$.

判别式 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 4 = -15 < 0$, 无实数解.

故选: C.

3. 一次函数 $y = x - 3$ 的图象不经过 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象的性质, 根据 k 和 b 的符号判断图象所经过的象限.

【详解】 $\because k = 1 > 0$, 说明图象从左向右上升, $b = -3 < 0$, 说明图象与 y 轴交于负半轴.

$\therefore$ 图象经过第一、第三、第四象限, 不经过第二象限.

故选 B.

4. 甲队为 A 小区安装 60 台热水器, 乙队为 B 小区安装 66 台热水器, 两队同时开工恰好同时完工, 乙队比甲队每天多安装 2 台, 设乙队每天安装 x , 则下列方程正确的是 ()

A. $\frac{66}{x} = \frac{60}{x-2}$

B. $\frac{66}{x-2} = \frac{60}{x}$

C. $\frac{66}{x} = \frac{60}{x+2}$

D. $\frac{66}{x+2} = \frac{60}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的应用，设乙队每天安装 x 台，则甲队每天安装 $(x-2)$ 台，根据题意列出方程 $\frac{66}{x} = \frac{60}{x-2}$ 即可，读懂题意，找出等量关系，列出方程是解题的关键.

【详解】 解：设乙队每天安装 x 台，则甲队每天安装 $(x-2)$ 台，

根据题意得： $\frac{66}{x} = \frac{60}{x-2}$ ，

故选：A.

5. 已知四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AD \parallel BC$ ，下列判断中错误的是（ ）

- A. 如果 $AB=CD$ ， $AC=BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是矩形
- B. 如果 $AB \parallel CD$ ， $AC=BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是矩形
- C. 如果 $AD=BC$ ， $AC \perp BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是菱形
- D. 如果 $OA=OC$ ， $AC \perp BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是菱形

【答案】A

【解析】

【分析】 根据平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定方法逐项进行分析判定即可得答案.

【详解】 解：A、如果 $AB=CD$ ， $AC=BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，不一定是矩形也就不一定是平行四边形，故 A 选项错误，符合题意；

B、如果 $AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，又 $AC=BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是矩形，故 B 选项正确，不符合题意；

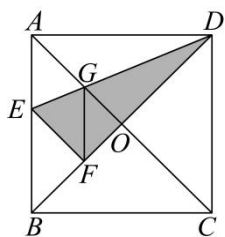
C、如果 $AD \parallel BC$ ， $AD=BC$ ，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，又 $AC \perp BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是菱形，故 C 选项正确，不符合题意；

D、如果 $AD \parallel BC$ ， $OA=OC$ ，则可以证得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，又 AC 垂直平分 BD ，那么四边形 $ABCD$ 是正方形，故 D 选项正确，不符合题意，

故选 A.

【点睛】 本题考查了平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定，熟练掌握各图形的判定方法是解题的关键.

6. 如图，在正方形纸片 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，折叠正方形纸片 $ABCD$ ，使 AD 落在 BD 上，点 A 恰好与 BD 上的点 F 重合，展开后，折痕 DE 分别交 AB 、 AC 于点 E 、 G ，连接 GF ，下列结论：① $\angle AGD = 112.5^\circ$ ；② $\frac{AD}{AE} = 2$ ；③ $S_{\triangle AGD} = S_{\triangle OGD}$ ；④ 四边形 $AEFG$ 是菱形；⑤ $BE = 2OG$ ，其中正确结论有（ ）个



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】①由四边形 $ABCD$ 是正方形，可得 $\angle GAD = \angle ADO = 45^\circ$ ，又由折叠的性质，可求得 $\angle ADG$ 的度数；②由 $AE = EF < BE$ ，可得 $AD > 2AE$ ；③由 $AG = GF > OG$ ，可得 $\triangle AGD$ 的面积 $>$ $\triangle OGD$ 的面积；④由折叠的性质与平行线的性质，易得 $\triangle EFG$ 是等腰三角形，即可证得 $AE = GF$ ，易证得四边形 $AEFG$ 是菱形；⑤由菱形性质，等腰直角三角形的性质，勾股定理，即可得 $BE = 2OG$ 。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\angle GAD = \angle ADO = 45^\circ,$$

$$\text{由折叠的性质可得：}\angle ADG = \frac{1}{2}\angle ADO = 22.5^\circ$$

故 $\angle AGD = 180^\circ - 45^\circ - 22.5^\circ = 112.5^\circ$ ，故①正确。

∵ 由折叠的性质可得： $AE = EF$ ， $\angle EFD = \angle EAD = 90^\circ$ ，

$$\angle AE = EF < BE,$$

$$\angle AE < \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} > 2,$$

$\therefore AD > 2AE$ ，故②错误。

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\angle AG = FG > OG, \triangle AGD \text{ 与 } \triangle OGD \text{ 同高},$$

$$\therefore S_{\triangle AGD} > S_{\triangle OGD}, \text{ 故③错误.}$$

$$\because \angle EFD = \angle AOF = 90^\circ,$$

$$\therefore EF \parallel AC,$$

$$\angle FEG = \angle AGE,$$

$$\because \angle AGE = \angle FGE,$$

$$\angle FEG = \angle FGE,$$

$$\therefore EF = GF,$$

$$\because AE = EF,$$

$$\therefore AE = GF,$$

$$\because AE = EF = GF, \quad AG = GF,$$

$$\therefore AE = EF = GF = AG,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFG$ 是菱形,

故四边形 $AEFG$ 是菱形, 故④正确.

$\because$ 四边形 $AEFG$ 是菱形,

$$\therefore \angle OGF = \angle OAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OGF = \angle OFG = 45^\circ,$$

$$\therefore OF = OG,$$

$$\therefore EF = GF = \sqrt{OF^2 + OG^2} = \sqrt{2}OG,$$

同理可得 $BE = \sqrt{2}EF = \sqrt{2} \times \sqrt{2}OG = 2OG$. 故⑤正确.

故选: C.

【点睛】此题考查的是折叠的性质, 正方形的性质, 等腰直角三角形的性质以及菱形的判定与性质等知识. 此题综合性较强, 难度较大, 注意掌握折叠前后图形的对应关系, 注意数形结合思想的应用.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 方程 $\sqrt{x-1} - 2 = 0$ 的解是_____.

【答案】5

【解析】

【分析】本题考查解二次根式方程、二次根式有意义的条件, 先求得 $x \geq 1$, 再进行移项, 再把等号两边平方转化成一元一次方程求解即可.

【详解】解: $\because x-1 \geq 0$,

$$\therefore x \geq 1,$$

$$\sqrt{x-1} - 2 = 0,$$

$$\text{移项得, } \sqrt{x-1} = 2,$$

$$\text{两边平方得, } x-1 = 4,$$

$$\therefore x = 5,$$

故答案为: 5.

8. 如果把直线 $y = 3x + 5$ 向下平移 4 个单位, 那么得到的直线的表达式为_____.

【答案】 $y = 3x + 1$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的图象的平移，熟练掌握平移的规律是解题的关键. 根据上下移动改变的是 y ，左右移动改变的是 x ，规律是上加下减，左加右减，即可求解.

【详解】 解：由题意得，直线 $y = 3x + 5$ 向下平移 4 个单位，

则所得新直线的表达式为： $y = 3x + 5 - 4$ ，即为 $y = 3x + 1$.

故答案为： $y = 3x + 1$.

9. 如果 n 边形的内角和是它外角和的 3 倍，则 n 等于_____

【答案】 8

【解析】

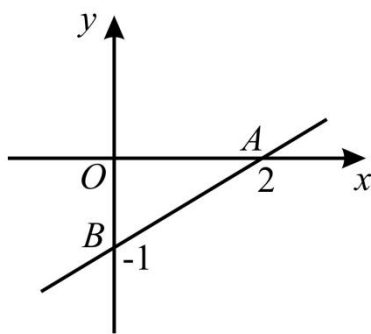
【分析】 此题主要考查了多边形内角和与外角和及一元一次方程的应用，要结合多边形的内角和公式与外角和的关系来寻求等量关系，构建方程即可求解. 根据多边形内角和公式 $180^\circ(n-2)$ 和外角和为 360° 可得方程 $180(n-2) = 360 \times 3$ ，再解方程即可.

【详解】 解：由题意得： $180(n-2) = 360 \times 3$ ，

解得： $n = 8$ ，

故答案为： 8.

10. 如图，一次函数 $y = kx + b$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别相交于 A 、 B 两点，那么当 $y < 0$ 时，自变量 x 的取值范围是_____.



【答案】 $x < 2$

【解析】

【分析】 直接根据直线与 x 轴的交点坐标即可得出结论.

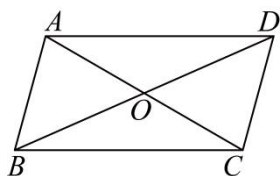
【详解】 解：由函数图象可知，直线与 x 轴的交点坐标为 $(2, 0)$ ，

$\therefore$ 当 $y < 0$ 是, $x < 2$.

故答案为: $x < 2$.

【点睛】本题考查的是一次函数图象上点的坐标特点, 能利用函数图象直接得出 x 的取值范围是解答此题的关键.

11. 如图, 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O , $AC = 12$, $BD = 16$, 且 AOB 的周长为 19, 则 CD 的长为_____.



【答案】 5

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质, 根据平行四边形得到 $OA = 6$, $OB = 8$, 再根据周长得到 $AB = CD = 5$.

【详解】解: $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O , $AC = 12$, $BD = 16$,

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = 6, \quad OB = \frac{1}{2}BD = 8, \quad AB = CD,$$

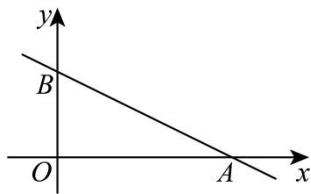
$\because AOB$ 的周长为 19,

$$\therefore CD = AB = 19 - OA - OB = 19 - 6 - 8 = 5,$$

故答案为: 5.

12. 直角坐标系中一次函数的图像与坐标轴围成的三角形, 叫做此一次函数的坐标三角形. 例如, 图中的一次函数图像与 x 、 y 轴分别交于点 A 、 B , 则 $\triangle ABO$ 为此一次函数的坐标三角形. 由以上可知, 一次函数

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ 的坐标三角形的面积是_____.



【答案】 9

【解析】

【分析】本题考查在直角坐标系中求三角形的面积、一次函数与坐标轴的交点问题, 分别令 $y = 0$ 、 $x = 0$ 求得 $A(6, 0)$ 、 $B(0, 3)$, 再利用面积公式求解即可.

【详解】解：把 $y=0$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 得， $-\frac{1}{2}x+3=0$ ，解得 $x=6$ ，

$\therefore A(6,0)$ ，

把 $x=0$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 得， $y=3$ ，

$\therefore B(0,3)$ ，

$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ ，

故答案为：9.

13. 换元法是把方程中某些量看作一个整体，再整体代入方程的一种方法. 用换元法解方程

$\frac{3x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = \frac{5}{2}$ 时，若设 $\frac{x}{x^2-1} = y$ ，则原方程变形后可以表示为关于 y 的一元二次方程的一般式是

_____.

【答案】 $6y^2 - 5y + 2 = 0$

【解析】

【分析】此题考查了换元法解方程. 根据题意将 $\frac{x}{x^2-1} = y$ 直接换元即可得到答案.

【详解】解：设 $\frac{x}{x^2-1} = y$ ，则 $\frac{x^2-1}{x} = \frac{1}{y}$ ，

则可将原方程变形为 $3y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$ ，

化为一般形式为 $6y^2 - 5y + 2 = 0$ 。

故答案为： $6y^2 - 5y + 2 = 0$ 。

14. 梯形的上下底分别为 3 和 7，一腰长为 6，则另一腰长 x 的取值范围是_____.

【答案】 $2 < x < 10$

【解析】

【分析】本题主要考查平行四边形的判定和性质，三角形三边关系. 作辅助线：平移一腰，构造一个三角形，再根据三角形的三边关系：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，从而求得答案.

【详解】解：如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD=3$ ， $BC=7$ ， $AB=6$ ， $CD=x$ ，
过 D 作 $DE \parallel AB$ ，交 BC 于 E 点，

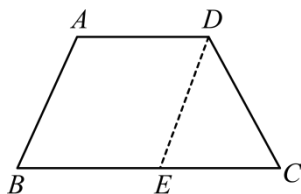
$\therefore AD \parallel BC$ ， $DE \parallel AB$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形，

$$\therefore BE = AD = 3,$$

$$\therefore CE = BC - BE = 4,$$

根据题意得： $6 - 4 < x < 6 + 4$ ，即 $2 < x < 10$ 。



故答案为： $2 < x < 10$ 。

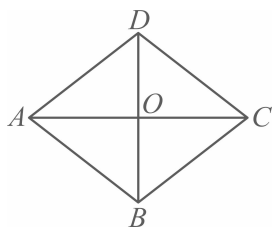
15. 菱形的边长为 5cm ，两条对角线之比为 $3:4$ ，则菱形一边上的高的长度为_____ cm 。

【答案】 $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查菱形的性质，勾股定理，如图，令 $BD = 6x\text{cm}$ ，则 $AC = 8x\text{cm}$ ，先利用菱形的性质及勾股定理求出 $BD = 6\text{cm}$ ， $AC = 8\text{cm}$ ，设菱形 $ABCD$ 一边上的高的长度为 $h\text{ cm}$ ，再根据菱形的面积公式和平行四边形的面积公式求出 h 即可。

【详解】 解：如图：菱形 $ABCD$ 中， $BD : AC = 3 : 4$ ，



令 $BD = 6x\text{cm}$ ，则 $AC = 8x\text{cm}$ ，

$$\therefore OB = OD = \frac{1}{2}BD = 3x\text{cm}, \quad OA = OC = \frac{1}{2}AC = 4x\text{cm},$$

$\therefore ABCD$ 为菱形，边长为 5cm ，

$$\therefore AB = BC = CD = AD = 5\text{cm}, \quad AC \perp BD,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AOB \text{ 中}, \quad AB^2 = OA^2 + OB^2,$$

$$\therefore 5^2 = (4x)^2 + (3x)^2,$$

解得 $x = 1$ 或 $x = -1$ （负值舍去），

$$\therefore BD = 6\text{cm}, \quad AC = 8\text{cm},$$

设菱形 $ABCD$ 一边上的高的长度为 $h\text{ cm}$ ，

$$\therefore \text{菱形 } ABCD \text{ 的面积} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = 5h,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 5h,$$

$$\text{解得 } h = \frac{24}{5},$$

即菱形一边上的高的长度为 $\frac{24}{5} \text{ cm}$,

故答案为: $\frac{24}{5}$.

16. 已知点 P 在直线 $y = x$ 上, P 到 $(0, 1)$ 的距离和到直线 $y = -1$ 的距离相等, 则点 P 的坐标为_____.

【答案】 $(0, 0)$ 或 $(4, 4)$

【解析】

【分析】 本题考查两点之间的距离公式, 设 $P(m, m)$, 根据题意列方程求解即可.

【详解】 解: $\because$ 点 P 在直线 $y = x$ 上,

$\therefore$ 设 $P(m, m)$,

$\therefore P$ 到 $(0, 1)$ 的距离为 $\sqrt{m^2 + (m-1)^2}$, 到直线 $y = -1$ 的距离为 $|-1 - m|$,

$\therefore P$ 到 $(0, 1)$ 的距离和到直线 $y = -1$ 的距离相等,

$$\therefore m^2 + (m-1)^2 = (-1 - m)^2,$$

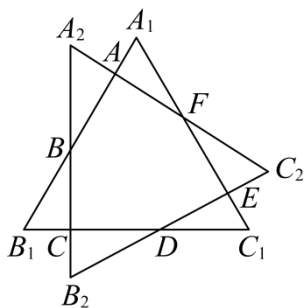
整理得 $m^2 - 4m = 0$,

解得 $m = 0$ 或 $m = 4$,

$\therefore P(0, 0)$ 或 $(4, 4)$,

故答案为: $(0, 0)$ 或 $(4, 4)$.

17. 如图: 边长为 1 的等边 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心为 O (垂直平分线的交点), 将正 $\triangle A_1B_1C_1$ 绕中心 O 旋转到 $\triangle A_2B_2C_2$, 使得 $A_2B_2 \perp B_1C_1$. 则两三角形的公共部分 (即六边形 $ABCDEF$) 的面积为_____.



【答案】 $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$

【解析】

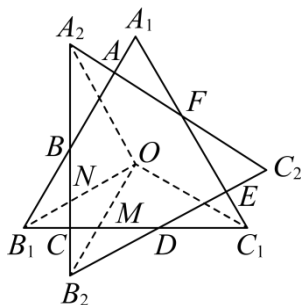
【分析】 本题考查了旋转的性质，等边三角形的性质. 连接 OB_1 、 OC_1 、 OA_2 、 OB_2 ，根据 O 为等边三角形的中心，得出 $\angle A_2OB_2 = \angle B_1OC_1 = 120^\circ$ ，求出 $\angle A_2ON = \angle C_1OM$ ，根据 ASA 证 $\triangle A_2ON \cong \triangle C_1OM$ ，推出 $ON = OM$ ，推出 $B_1N = B_2M$ ，设 $B_1N = B_2M = x$ ，根据 $\angle OB_1B = \angle OB_1C = 30^\circ = \angle B_1BN$ ，求出

$$BN = x, \text{ 推出 } CN = \frac{1}{2}x, \quad B_1C = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad BB_1 = 2B_1C = \sqrt{3}x, \quad \text{同理 } CD = BC = x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x,$$

$C_1D = BB_1 = \sqrt{3}x$ ，依题意列方程 $B_1C_1 = B_1C + CD + DC_1 = 1$ ，求 x 的值，根据

$$S_{\text{六边形}ABCDEF} = S_{\triangle A_2B_2C_2} - 3S_{\triangle B_2CD} \text{ 求解.}$$

【详解】 解：连接 OB_1 、 OC_1 、 OA_2 、 OB_2 ，



$\because O$ 为等边三角形的中心，

$$\therefore \angle A_2OB_2 = \angle B_1OC_1 = 120^\circ,$$

$$\therefore \text{都减去 } \angle B_1OB_2 \text{ 得: } \angle A_2ON = \angle C_1OM,$$

在 $\triangle A_2ON$ 和 $\triangle C_1OM$ 中

$$\therefore \begin{cases} \angle A_2ON = \angle C_1OM \\ OA_2 = OC \\ \angle OA_2N = \angle OC_1M = 30^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle A_2ON \cong \triangle C_1OM,$$

$$\therefore ON = OM,$$

$$\therefore OB_2 = OB_1,$$

$$\therefore B_1N = B_2M,$$

$$\text{设 } B_1N = B_2M = x,$$

$$\because A_2B_2 \perp B_1C_1, \quad \angle A_2 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABA_2 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABA_2 = \angle B_1BN = 30^\circ,$$

$$\because \angle OB_1B = \angle OB_1C = 30^\circ = \angle B_1BN,$$

$$\therefore BN = x,$$

$$\therefore CN = \frac{1}{2}x, \quad B_1C = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad BB_1 = 2B_1C = \sqrt{3}x,$$

$$\text{同理 } CD = BC = x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x, \quad C_1D = BB_1 = \sqrt{3}x,$$

$$\text{依题意 } B_1C_1 = B_1C + CD + DC_1 = 1,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}x + \sqrt{3}x = 1,$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}(\sqrt{3}-1),$$

$$\therefore B_2C = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (\sqrt{3}-1) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad CD = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}(\sqrt{3}-1) = \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \right),$$

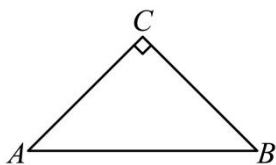
$$\therefore S_{\text{六边形}ABCDEF} = S_{\triangle A_2B_2C_2} - 3S_{\triangle B_2CD}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \right)$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3-\sqrt{3}}{4}.$$

18. 如图, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2$, E 为射线 CB 上一点, 将 $\triangle AEB$ 沿着 AE 翻折, 点 B 的对应点为点 B' , 且 B' 落在 ABC 的对称轴上, 则 $CE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理，折叠的性质，轴对称的性质，等边三角形的判定与性质，连接 $B'B$ ，过 C 作直线 $CD \perp AB$ 交 AB 于 D ，过 B' 作 $B'F \perp BC$ 交 BC 于 F ，根据折叠和轴对称的性质得到

$BB' = AB = AB' = 2$ ，则 $\triangle ABB'$ 是等边三角形，得到 $\angle AB'D = \frac{1}{2} \angle AB'B = 30^\circ$ ，

$B'D = \sqrt{B'A^2 - AD^2} = \sqrt{3}$ ，在根据 E 与边 BC 的位置关系分情况讨论，分别求出 CB' ，

$FB' = FC = \frac{\sqrt{2}}{2} CB'$ ， $\angle B'EF = 30^\circ$ ，得 $EF = \sqrt{3}B'F = \sqrt{3}FC$ ，最后根据图形求出 CE 即可。

【详解】 解：连接 $B'B$ ，过 C 作直线 $CD \perp AB$ 交 AB 于 D ，过 B' 作 $B'F \perp BC$ 交 BC 于 F ，

$\because$ 在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ，

$\therefore$ 直线 CD 是 ABC 的对称轴， $CD = AD = BD = \frac{1}{2} AB = 1$ ， $\angle CAB = \angle CBA = \angle DCB = 45^\circ$ ，

$\therefore$ 将 $\triangle AEB$ 沿着 AE 翻折，点 B 的对应点为点 B' ，

$\therefore AB = AB' = 2$ ， $\angle AB'E = \angle ABE = 45^\circ$ ，

$\because B'$ 落在 ABC 的对称轴上，

$\therefore B'$ 落在 CD 上， $BB' = AB' = 2$ ，

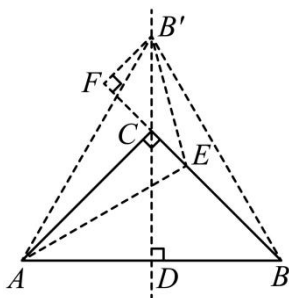
$\therefore BB' = AB = AB' = 2$ ，

$\therefore \triangle ABB'$ 是等边三角形，

$\therefore \angle AB'B = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle AB'D = \frac{1}{2} \angle AB'B = 30^\circ$ ， $B'D = \sqrt{B'A^2 - AD^2} = \sqrt{3}$ ，

当 E 在边 BC 上时，如图， $\angle DCB = \angle FCB' = 45^\circ$ ， $CB' = B'D - CD = \sqrt{3} - 1$ ，



$$\therefore \angle CB'E = \angle AB'E - \angle AB'D = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ, \quad FB' = FC = \frac{\sqrt{2}}{2} CB' = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1),$$

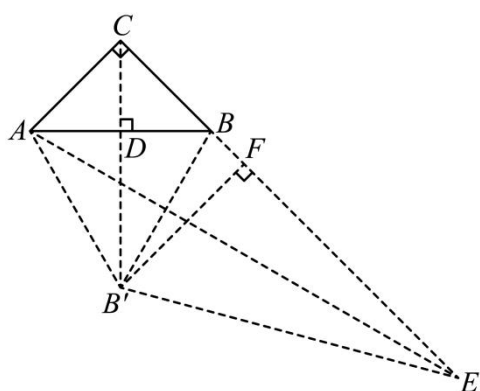
$$\therefore \angle B'EF = \angle FCB' - \angle CB'E = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore B'E = 2FB',$$

$$\therefore EF = \sqrt{B'E^2 - B'F^2} = \sqrt{3} B'F = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1),$$

$$\therefore CE = EF - FC = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2} - \sqrt{6};$$

当 E 在边 BC 外时, 如图, $\angle ABE = \angle AB'E = 135^\circ$, $CB' = B'D + CD = \sqrt{3} + 1$,



$$\therefore \angle CB'E = \angle AB'E - \angle AB'D = 135^\circ - 30^\circ = 105^\circ, \quad FB' = FC = \frac{\sqrt{2}}{2} CB' = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} + 1),$$

$$\therefore \angle B'EF = 180^\circ - \angle FCB' - \angle CB'E = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore B'E = 2FB',$$

$$\therefore EF = \sqrt{B'E^2 - B'F^2} = \sqrt{3} B'F = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} + 1),$$

$$\therefore CE = EF + FC = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{2} + \sqrt{6};$$

综上所述, $CE = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}$,

故答案为: $2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}$.

三、简答题 (本大题共 4 题, 每题 8 分, 满分 32 分)

19. 解方程: $\frac{x-5}{x^2-1} + 1 = \frac{3}{x+1}$

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解：方程两边同时乘以 $x^2 - 1$ 得： $x - 5 + x^2 - 1 = 3x - 3$,

整理得： $(x - 3)(x + 1) = 0$,

解得： $x_1 = 3$, $x_2 = -1$,

经检验 $x = -1$ 是增根，

$\therefore$ 分式方程的解为 $x = 3$.

【点睛】此题考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解. 解分式方程一定要注意要验根.

20. 解方程： $\sqrt{2x^2 - 1} + x - 2 = 0$.

【答案】 $x = 1$ 或 $x = -5$

【解析】

【分析】本题主要考查了解无理方程，先把原方程变形为 $\sqrt{2x^2 - 1} = -x + 2$ ，再把方程两边同时平方得到 $x^2 + 4x - 5 = 0$ ，解方程并检验即可得到答案.

【详解】解： $\because \sqrt{2x^2 - 1} + x - 2 = 0$,

$$\therefore \sqrt{2x^2 - 1} = -x + 2,$$

$$\therefore 2x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4,$$

$$\therefore x^2 + 4x - 5 = 0,$$

$$\therefore (x + 5)(x - 1) = 0,$$

$$\therefore x + 5 = 0 \text{ 或 } x - 1 = 0,$$

解得 $x = 1$ 或 $x = -5$,

$$\therefore \begin{cases} -x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 1 \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore x \leq 2 \text{ 且 } x^2 \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore x = 1 \text{ 或 } x = -5.$$

21. 解方程组： $\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0. \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

【解析】

【分析】先对 $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 分解因式转化为两个一元一次方程，然后联立①，组成两个二元一次方程组，解之即可.

【详解】将方程 $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 的左边因式分解，得 $x - 2y = 0$ 或 $x - y = 0$.

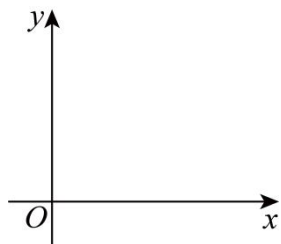
原方程组可以化为 $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 0. \end{cases}$

解这两个方程组得 $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

【点睛】本题考查了高次方程组，将高次方程化为一次方程是解题的关键.

22. 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过点 $A(0, m)$ 和点 $B(6, 4)$.



(1) 若一次函数的函数值随着 x 的增大而增大，则 m 满足的条件是_____.

(2) 在 x 轴上有一点 $P(3, 0)$ ，且 $\angle BPA = 90^\circ$ ，求点 A 的坐标.

【答案】 (1) $m < 4$

(2) $\left(0, \frac{9}{4}\right)$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的图象与性质，待定系数法求函数解析式，勾股定理.

(1) 先利用待定系数法，用 m 表示出 k ， b ，再根据一次函数的性质得出 $k = \frac{4-m}{6} > 0$ ，解不等式即可；

(2) 由已知，根据勾股定理得 $BP^2 + AP^2 = AB^2$ ，即可得关于 m 的方程，解方程即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过点 $A(0, m)$ 和点 $B(6, 4)$,

$$\therefore \begin{cases} b = m \\ 6k + b = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{4-m}{6}, \\ b = m \end{cases},$$

$\because$ 一次函数的函数值随着 x 的增大而增大,

$$\therefore k = \frac{4-m}{6} > 0,$$

解得 $m < 4$,

即若一次函数的函数值随着 x 的增大而增大, 则 m 满足的条件是 $m < 4$,

故答案为: $m < 4$;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 在 x 轴上有一点 $P(3,0)$, 且 $\angle BPA = 90^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BPA$ 中, $BP^2 + AP^2 = AB^2$,

$\because P(3,0)$, $A(0,m)$, $B(6,4)$,

$$\therefore BP^2 = (6-3)^2 + (4-0)^2 = 25, \quad AP^2 = (3-0)^2 + (0-m)^2 = m^2 + 9,$$

$$AB^2 = (6-0)^2 + (4-m)^2 = m^2 - 8m + 52,$$

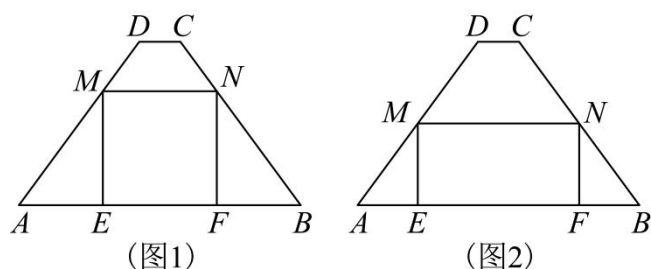
$$\therefore 25 + m^2 + 9 = m^2 - 8m + 52,$$

$$\text{解得 } m = \frac{9}{4},$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $\left(0, \frac{9}{4}\right)$.

四、解答题 (本大题共 3 题, 每题各 12 分, 满分 36 分)

23. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 7$, $CD = 1$, $AD = BC = 5$. 点 M 、 N 分别在边 AD 、 BC 上运动, 并保持 $MN \parallel AB$, $ME \perp AB$, $NF \perp AB$, 垂足分别为 E 、 F .



(1) 求梯形 $ABCD$ 的面积;

(2) 若 M 、 N 分别是 AD 、 BC 的中点, 连接 AN 、 DN , 求 $\triangle ADN$ 的面积.

【答案】(1) 16 (2) 8

【解析】

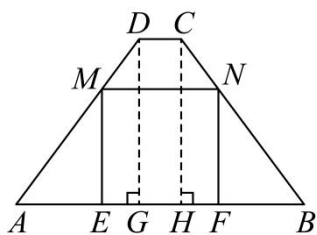
【分析】 本题考查梯形的性质, 勾股定理, 梯形的中位线;

(1) 分别过 D 、 C 两点作 $DG \perp AB$ 于点 G , $CH \perp AB$ 于点 H . 得到四边形 $DGHC$ 为矩形, $GH = CD = 1$, 再证明 $\text{Rt}\triangle AGD \cong \text{Rt}\triangle BHC$ (HL), 得到 $AG = BH = \frac{1}{2} \times (7-1) = 3$, 利用勾股定理求出 $DG = 4$, 最后根据梯形面积公式计算即可;

(2) 由 M 、 N 分别是 AD 、 BC 的中点得到, MN 是梯形 $ABCD$ 中位线, 则 $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$, $AB \parallel MN \parallel CD$, 根据直角三角形斜边中线得到 $MQ = MD = AM = \frac{1}{2}AD$, 再根据等腰三角形三线合一得到 $DP = PQ = \frac{1}{2}DQ$, 最后根据 $S_{\triangle ADN} = S_{\triangle DMN} + S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}DP \cdot MN + \frac{1}{2}PQ \cdot MN = \frac{1}{2}S_{\text{梯形}ABCD}$ 求解即可.

【小问 1 详解】

解: 分别过 D 、 C 两点作 $DG \perp AB$ 于点 G , $CH \perp AB$ 于点 H .



$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore DG \perp CH$, $DG \parallel CH$,

$\therefore$ 四边形 $DGHC$ 为矩形, $GH = CD = 1$,

$\therefore DG = CH$, $AD = BC$, $\angle AGD = \angle BHC = 90^\circ$,

$\therefore \text{Rt}\triangle AGD \cong \text{Rt}\triangle BHC$ (HL),

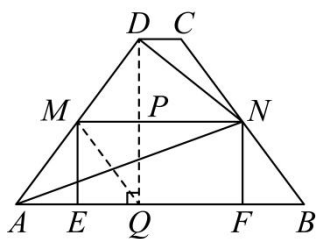
$\therefore AG = BH = \frac{1}{2} \times (7-1) = 3$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AGD$ 中, $DG = \sqrt{AD^2 - AG^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 的面积为: $\frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DG = \frac{1}{2} \times (1+7) \times 4 = 16$;

【小问 2 详解】

解: 如图, 连接 AN 、 DN , 过点 D 作 $DQ \perp AB$ 于点 Q , 连接 MQ ,



$\because M、N$ 分别是 $AD、BC$ 的中点,

$\therefore MN$ 是梯形 $ABCD$ 中位线, $MD = AM$

$\therefore MN = \frac{1}{2}(AB + CD), AB \parallel MN \parallel CD,$

$\therefore DQ \perp AB,$

$\therefore \angle DQA = \angle DPM = 90^\circ, MQ = MD = AM = \frac{1}{2}AD,$

$\therefore DP = PQ = \frac{1}{2}DQ,$

$\therefore S_{\triangle ADN} = S_{\triangle DMN} + S_{\triangle AMN}$

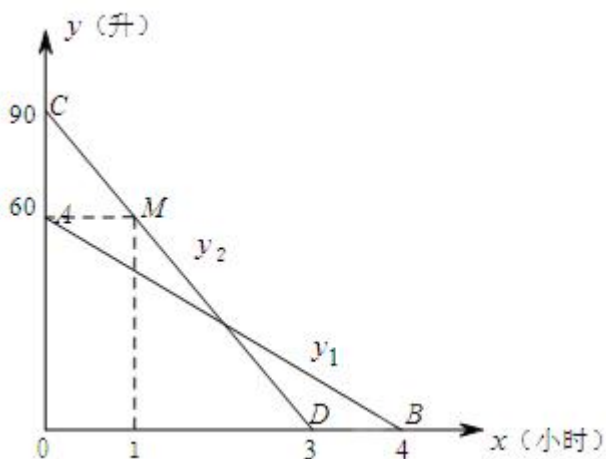
$= \frac{1}{2}DP \cdot MN + \frac{1}{2}PQ \cdot MN$

$= \frac{1}{2}DQ \cdot MN$

$= \frac{1}{2}DQ \cdot \frac{1}{2}(AB + CD)$

$= \frac{1}{2}S_{\text{梯形}ABCD} = 8.$

24. 如图, 线段 AB, CD 分别是一辆轿车和一辆客车在行驶过程中油箱内的剩余油量 y_1 (升)、 y_2 (升) 关于行驶时间 x (小时) 的函数图象.



(1) 分别求 $y_1、y_2$ 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

(2) 如果两车同时从相距 300 千米的甲、乙两地出发, 相向而行, 匀速行驶, 已知轿车的行驶速度比客车的行驶速度快 30 千米/小时, 且当两车在途中相遇时, 它们油箱中所剩余的油量恰好相等, 求两车的行驶速

度.

【答案】(1) $y_1 = -15x + 60$, 定义域为 $0 \leq x \leq 4$. $y_2 = -30x + 90$, 定义域为 $0 \leq x \leq 3$; (2) 客车 60 千米/小时, 轿车 90 千米/小时.

【解析】

【详解】试题分析: (1) 根据题意设出函数关系式 $y = kx + b$, 再根据图象所经过的点利用待定系数法代入可以直接求出函数关系式;

(2) 设客车的速度为 x km/时, 则小轿车的速度为 $(x+30)$ km/时, 先根据相遇问题表示出相遇时间, 再由图象可以求出客车和小轿车每小时的耗油量, 再根据剩余的油相等建立方程求出其解就可以了.

试题解析: (1) 设 $y_1 = k_1x + 60$, $y_2 = k_2x + 90$.

由题意, 得 $4k_1 + 60 = 0$,

$3k_2 + 90 = 0$.

解得 $k_1 = -15$, $k_2 = -30$.

所以 $y_1 = -15x + 60$, 定义域为 $0 \leq x \leq 4$.

$y_2 = -30x + 90$, 定义域为 $0 \leq x \leq 3$.

(2) 设客车的速度为 x km/时, 则小轿车的速度为 $(x+30)$ km/时,

所以两车的相遇时间为: $\frac{300}{x(x+30)}$,

轿车每小时的耗油量为 $60 \div 4 = 15$ 升, 客车每小时耗油量为 $90 \div 3 = 30$ 升.

$\therefore$ 相遇时, 它们油箱中所剩余的油量恰好相等,

$$\therefore 90 - 30 \times \frac{300}{x(x+30)} = 60 - 15 \times \frac{300}{x(x+30)},$$

解得: $x = 60$,

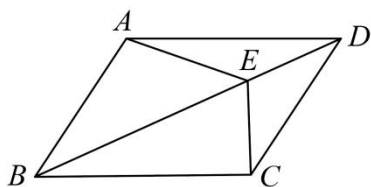
经检验, $x = 60$ 是原方程的解,

轿车的速度为: $60 + 30 = 90$ 千米/时.

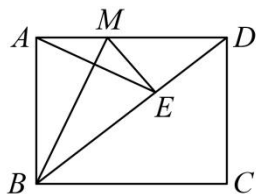
答: 客车 60 千米/小时, 轿车 90 千米/小时.

考点: 一次函数的应用.

25. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, E 为对角线 BD 上任一点.



(图1)



(图2)

(1) 连接 EA 、 EC ，若 $EA = EC$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2) 若 M 在 AD 上，连接 EA 、 ME ，若 $\angle BEM = \angle C$ ， $\angle DME = \angle EDC$ ，判断四边形 $ABCD$ 的形状并证明.

【答案】 (1) 见解析 (2) 四边形 $ABCD$ 是矩形，理由见解析

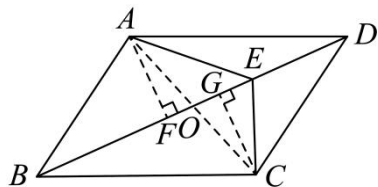
【解析】

【分析】 (1) 分别过点 A 和 C 作 BD 的垂线，垂足分别为 F 和 G ，连接 AC 交 BD 于点 O ，利用平行四边形的性质求得 $AF = CG$ ，再证明 $\text{Rt}\triangle AEF$ 和 $\text{Rt}\triangle CGE$ 全等，得到 $EF = EG$ ，说明点 F 、点 O 和点 G 重合，据此即可证明四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2) 利用平行四边形的性质求得 $\angle 1 = \angle 3$ ，由已知得到 $\angle 2 = \angle 4$ ，由三角形的外角性质和三角形的内角和定理求得 $\angle BEM = \angle 1 + \angle 2$ ， $\angle C + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ ，结合 $\angle BEM = \angle C$ 求得 $\angle BEM = \angle C = 90^\circ$ ，据此即可证明四边形 $ABCD$ 是矩形.

【小问 1 详解】

证明：分别过点 A 和 C 作 BD 的垂线，垂足分别为 F 和 G ，连接 AC 交 BD 于点 O ，



$\because$ 平行四边形 $ABCD$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}, \quad BD = BD,$$

$$\therefore \frac{1}{2}BD \times AF = \frac{1}{2}BD \times CG,$$

$$\therefore AF = CG,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 和 $\text{Rt}\triangle CGE$ 中，

$$\therefore EA = EC, \quad AF = CG,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AEF \cong \text{Rt}\triangle CGE (\text{HL}),$$

$$\therefore EF = EG,$$

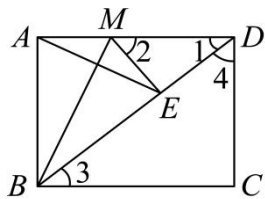
$\therefore$ 点 F 、点 O 和点 G 重合，即 $AC \perp BD$ 于点 O ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形;

【小问 2 详解】

解: 四边形 $ABCD$ 是矩形, 理由如下:



$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$,

$\therefore \angle DME = \angle EDC$,

$\therefore \angle 2 = \angle 4$,

$\therefore \angle BEM = \angle 1 + \angle 2$, $\angle C + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$,

$\therefore \angle C + \angle BEM = 180^\circ$,

$\therefore \angle BEM = \angle C$,

$\therefore \angle BEM = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质, 菱形的判定, 矩形的判定, 全等三角形的判定和性质, 三角形的内角和定理以及三角形的外角性质.

五、综合题 (本大题共 2 题, 每题各 11 分, 满分 22 分)

26. 定义 $\{a, b, c\}$ 为函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的“特征数”. 如: 函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 的“特征数”是 $\{1, -2, 3\}$,

函数 $y = 2x + 3$ 的“特征数”是 $\{0, 2, 3\}$, 函数 $y = -x$ 的“特征数”是 $\{0, -1, 0\}$

(1) 将“特征数”是 $\{0, -2, 8\}$ 的函数图像向下平移 5 个单位, 得到一个新函数, 求这个新函数的解析式.

(2) 在 (1) 中, 平移前的函数分别与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 两点, 平移后的函数与 y 轴交于 C 点, D 、 C 两点关于平移前的函数对称, 若四边形 $DCEF$ 是正方形, 求 D 、 E 的坐标.

(3) 若“特征数”是 $\{0, 0, 1\}$ 的函数与 y 轴交于 A , “特征数”是 $\{0, -2, 8\}$ 的函数与“特征数”是 $\{0, 2, 0\}$ 的函数的交点 P , 点 G 在 x 轴上, M 在“特征数”是 $\{0, -2, 8\}$ 的函数图像上, A 、 P 、 G 、 M 为顶点的四边形是平行四边形, 直接写出 M 坐标.

【答案】(1) $y = -2x + 3$

(2) $D(4, 5)$ 、 $E(2, -1)$ 或 $(-2, 7)$

(3) $M\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ 或 $M\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ 或 $M\left(\frac{11}{2}, -3\right)$

【解析】

【分析】(1) 根据题意得“特征数”是 $\{0, -2, 8\}$ 的函数解析式为 $y = -2x + 8$ ，再根据一次函数图象的平移规律求解即可；

(2) 根据正方形的性质和平行线定理得点 E 在一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象上，分别令 $x = 0$ 、 $y = 0$ 求得 $A(4, 0)$ 、 $B(0, 8)$ 、 $C(0, 3)$ 、 $Q\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ，过点 C 作 $CP \perp y$ 轴，则 $CP \parallel x$ 轴，证得 $\triangle CGP \cong \triangle AEQ$ (ASA)，进而求得 $P\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ ，

再利用 $\triangle BCG$ 的面积求得 $CG = \sqrt{5}$ ，过点 G 作 $GN \perp y$ 轴于点 N ，利用面积公式和勾股定理求得 $GN = 2$ ， $CN = 1$ ，设 $D(x, y)$ ，再利用中点坐标公式求解即可，设 $E(t, -2t + 3)$ ，利用两点间的距离公式求解即可；

(3) 由题意求得 $A(0, 1)$ ， $P(2, 4)$ ，设 $G(a, 0)$ ， $M\left(m, -\frac{1}{2}m + 8\right)$ ，分类讨论： PM 是平行四边形的对角线或 MG 是对角线时或 PG 为对角线时，利用中点坐标公式列方程求解即可。

【小问 1 详解】

解：由题意得，“特征数”是 $\{0, -2, 8\}$ 的函数解析式为 $y = -2x + 8$ ，

$\therefore$ 将此函数图像向下平移 5 个单位，得到新函数的解析式 $y = -2x + 3$ ；

【小问 2 详解】

解：如图， $\because BA$ 垂直平分 CD ，一次函数 $y = -2x + 8$ 的图象与一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象平行，

$\therefore CD \perp CQ$ ，

$\because$ 四边形 $DCEF$ 是正方形， $DC = 2\sqrt{5}$ ，

$\therefore \angle DCE = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 点 E 在一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象上，

$\therefore$ 点 D 、 C 关于一次函数 $y = -2x + 8$ 图象对称,

$\therefore BA$ 垂直平分 CD ,

把 $x = 0$ 代入 $y = -2x + 8$ 得, $y = 8$,

$\therefore B(0, 8)$,

把 $y = 0$ 代入 $y = -2x + 8$ 得, $-2x + 8 = 0$, 解得 $x = 4$,

$\therefore A(4, 0)$,

把 $x = 0$ 代入 $y = -2x + 3$ 得, $y = 3$,

$\therefore C(0, 3)$,

把 $y = 0$ 代入 $y = -2x + 3$ 得, $-2x + 3 = 0$,

解得 $x = \frac{3}{2}$,

$\therefore Q\left(\frac{3}{2}, 0\right)$,

$\therefore AQ = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$,

过点 C 作 $CP \perp y$ 轴, 则 $CP \parallel x$ 轴,

$\therefore \angle GCP + \angle PCE = 90^\circ$, $\angle PCE = \angle AQE$,

$\therefore \angle GCP + \angle AQE = 90^\circ$,

又 $\therefore \angle QAE + \angle AQE = 90^\circ$,

$\therefore \angle GCP = \angle QAE$,

$\therefore BA$ 垂直平分 CD , 四边形 $DCEF$ 是正方形,

$\therefore CG = AE$,

又 $\therefore \angle CGP = \angle AEQ = 90^\circ$,

$\therefore \triangle CGP \cong \triangle AEQ (ASA)$,

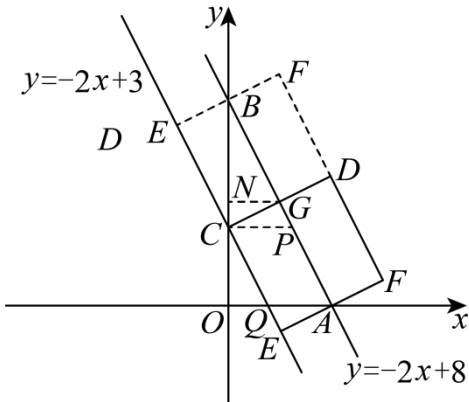
$\therefore CP = AQ = \frac{5}{2}$,

$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, 3\right),$$

$$\therefore BP = \sqrt{5^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle BCP} = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{5}}{2} \times CG,$$

$$\therefore CG = \sqrt{5} ,$$



$$\therefore BG = 2\sqrt{5} ,$$

过点 G 作 $GN \perp y$ 轴于点 N ,

$$\therefore S_{\triangle BCG} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \frac{1}{2} \times 5 \times GN,$$

$$\therefore GN = 2,$$

$$\therefore CN = \sqrt{(5)^2 - 2^2} = 1,$$

$$\therefore G(2,4),$$

$$\text{设 } D(x, y), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{0+x}{2} = 2 \\ \frac{3+y}{2} = 4 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases},$$

$$\therefore D(4, 5),$$

设 $E(t, -2t + 3)$,

$$\therefore (t-0)^2 + (-2t+3-3)^2 = (2\sqrt{5})^2,$$

解得 $t_1 = 2$ 或 $t_2 = -2$,

$$\text{当 } t = -2 \text{ 时, } CE = \sqrt{(-2-0)^2 + (7-3)^2} = 2\sqrt{5},$$

满足 $DC = 2\sqrt{5} = CE$,

$$\therefore E(2, -1) \text{ 或 } (-2, 7);$$

【小问 3 详解】

解: 如图, 由题意得, “特征数”是 $\{0, 0, 1\}$ 的函数解析式为 $y = 1$,

$$\therefore A(0, 1),$$

$\therefore$ “特征数”是 $\{0, -2, 8\}$ 的函数解析式为 $y = -2x + 8$, “特征数”是 $\{0, 2, 0\}$ 的函数解析式为 $y = 2x$,

$$\therefore \text{联立方程组得 } \begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = 2x \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases},$$

$$\therefore P(2, 4),$$

由题意得, 点 P 与点 M 在一次函数 $y = -2x + 8$ 的图象上,

设 $G(a, 0)$, $M(m, -2m + 8)$,

$\therefore$ 当 PM 是平行四边形的对角线时,

$$\therefore 1 + 0 = 4 - 2m + 8, \text{ 解得 } m = \frac{11}{2},$$

$$\therefore M\left(\frac{11}{2}, -3\right),$$

当 MG 为对角线时,

$$\therefore 1 + 4 = 0 - 2m + 8, \text{ 解得 } m = \frac{3}{2},$$

$$\therefore M\left(\frac{3}{2}, 5\right),$$

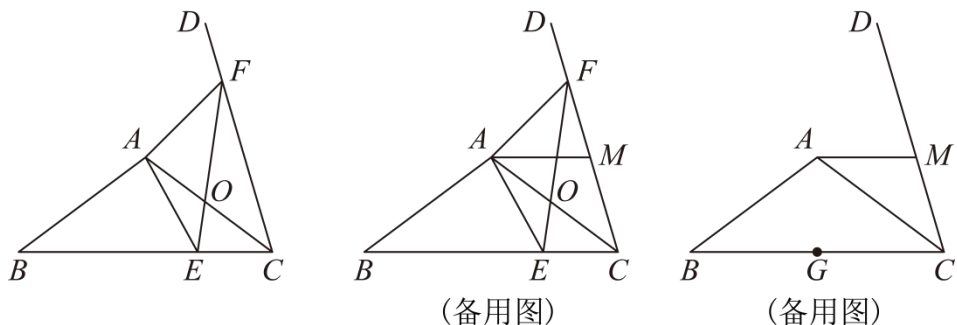
当 PG 为对角线时, $4 + 0 = 1 - 2m + 8$, 解得, $m = \frac{5}{2}$,

$$\therefore M\left(\frac{5}{2}, 3\right),$$

综上所述, $M\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ 或 $M\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ 或 $M\left(\frac{11}{2}, -3\right)$.

【点睛】本题考查新定义、全等三角形的判定与性质、勾股定理、两点间的距离公式、一次函数与二元一次方程组、平行四边形的性质、平行线的性质、正方形的性质、一次函数的平移规律, 理解新定义是解题的关键.

27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 8$, AC 平分 $\angle BCD$, 点 E 、 F 分别为边 BC 和射线 CD 上的点 (E 与 B , C 不重合), 且 $\angle EAF = \angle BAC$, 连接 EF 交 AC 于点 O .



- (1) 若 $AF \perp FC$, 求 BE .
- (2) 若 $\triangle AEO$ 为等腰三角形, 求 BE 的长.
- (3) 过点 A 作 $AM \parallel BC$ 交 CD 于 M , 取 EF 中点为 N , BC 中点为 G , 若四边形 $MNGE$ 为梯形, 直接写出 BE 的长.

【答案】(1) BE 的长为 4

(2) BE 的长为 3 或 $\frac{39}{8}$

(3) BE 的长为 $\frac{25}{4}$ 或 $\frac{39}{8}$

【解析】

【分析】本题考查了三角形全等的判定与性质, 等腰三角形的判定与性质, 菱形的性质与判定等, 根据题中条件, 灵活运用所学知识, 分类讨论, 是解题的关键.

(1) 根据题中条件证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$, 推出 $\angle BEA = \angle CFA = 90^\circ$, 再利用等腰三角形三线合一的结论求值;

(2) 根据 $\triangle AEO$ 为等腰三角形, 分 $AO = AE$ 或 $AE = EO$ 或 $AO = EO$ 讨论, 利用三角形全等的性质和判定, 勾股定理列方程求解, 综合得出 BE 所有可能的值;

(3) 在 CD 上截取 $CP = CG$, 连接 GP 交 EF 于 N , 过点 F 作 $FI \parallel CG$, 交 GP 或 GP 延长线于 I , 证明 $\triangle FNI \cong \triangle ENG$, 说明 GP 与 EF 的交点为 EF 的中点, 再由四边形 $MNGE$ 为梯形, 分 $MN \parallel GE$ 或 $ME \parallel GN$ 讨论, 综合得出 BE 所有可能的值.

【小问 1 详解】

$\because AC$ 平分 $\angle BCD$,

$$\therefore \angle ACB = \angle ACD,$$

$\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACD$$

又 $\angle EAF = \angle BAC$,

$$\therefore \angle EAF - \angle EAC = \angle BAC - \angle EAC,$$

$\angle BAE = \angle FAC$,

又 $AB = AC$, $\angle B = \angle ACD$,

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF (\text{ASA}),$$

$$\therefore \angle BEA = \angle CFA,$$

若 $AF \perp FC$, 则 $\angle CFA = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BEA = \angle CFA = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp BC,$$

又 $AB = AC$,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC = 4.$$

【小问 2 详解】

由 (1) 知, $\triangle ABE \cong \triangle ACF$,

$$\therefore AE = AF, \quad BE = CF,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle AEF,$$

又 $\angle EAF = \angle BAC$,

$$\therefore \angle B = \angle C = \angle AFE = \angle AEF,$$

若 $\triangle AEO$ 为等腰三角形, 则 $AO = AE$ 或 $AE = EO$ 或 $AO = EO$,

又 $\angle AOE = \angle OAF + \angle AFE = \angle OAF + \angle AEF$,

$$\therefore \angle AOE > \angle AEF$$

$$\therefore AE \neq AO,$$

当 $AE = EO$ 时, 如图 1,

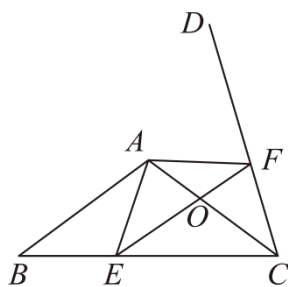


图1

$$\because \angle B + \angle BAE = \angle AEC, \angle AEF + \angle OEC = \angle AEC, \angle B = \angle AEF,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle OEC,$$

$$\text{又 } \angle B = \angle ACB, AE = EO,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ECO (\text{AAS}),$$

$$\therefore CE = AB = 5,$$

$$\therefore BE = BC - CE = 3,$$

当 $AO = EO$ 时, 如图 2,

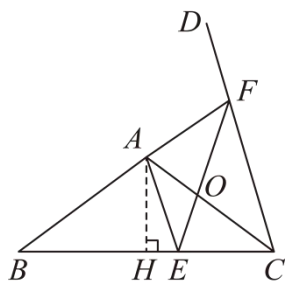


图2

$$\because AO = EO, \angle AOF = \angle COE, \angle AFE = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle AOF \cong \triangle EOC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AF = CE,$$

$$\therefore AE = CE,$$

过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H, 则 $\angle AHB = 90^\circ$, 又 $AB = AC = 5$,

$$\therefore BH = CH = 4, AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 3,$$

$$\text{设 } EH = x, \text{ 则 } BE = 4 + x, AE = CE = 4 - x,$$

$$\text{由勾股定理得, } AH^2 + EH^2 = AE^2,$$

$$\therefore 3^2 + x^2 = (4 - x)^2, \text{ 解得 } x = \frac{7}{8},$$

$$\therefore BE = 4 + x = \frac{39}{8},$$

综上所述，若 $\triangle AEO$ 为等腰三角形，则 BE 的长为 3 或 $\frac{39}{8}$ 。

【小问 3 详解】

在 CD 上截取 $CP = CG$ ，连接 GP 交 EF 于 N ，过点 F 作 $FI \parallel CG$ ，交 GP 或 GP 延长线于 I ，如图 3 所示：

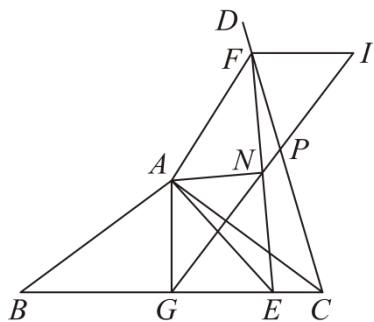


图3

由 (1) 知 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ ，可得 $BE = CF$ ，

$\because G$ 为 BC 的中点，

$$\therefore BG = CG = CP,$$

$$\therefore BE - BG = CF - CP,$$

$$\therefore EG = PF,$$

$$\because CG = CP,$$

$$\therefore \angle CGP = \angle CPG,$$

$$\because FI \parallel CG,$$

$$\therefore \angle I = \angle CGP,$$

$$\text{又 } \angle FPI = \angle CPG,$$

$$\therefore \angle I = \angle FPI,$$

$$\therefore FI = PF = EG,$$

$$\text{又 } \angle FNI = \angle GNE,$$

$$\therefore \triangle FNI \cong \triangle ENG (\text{AAS}),$$

$$\therefore EN = FN, \text{ 即 } GP \text{ 与 } EF \text{ 的交点为 } EF \text{ 的中点},$$

若四边形 $MNGE$ 为梯形，则 $MN \parallel GE$ 或 $ME \parallel GN$ ，

当 $MN \parallel GE$ 时，结合 $AM \parallel BC$ ，可知点 N 在 AM 上，

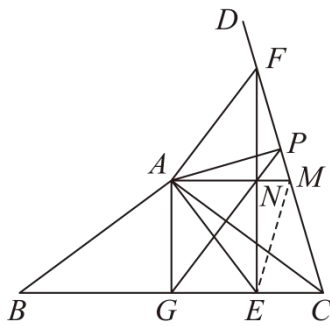


图4

$\because AE = AF$, N 为 EF 的中点,

$\therefore EN = FN, EF \perp AM$,

又 $AM \parallel BC$,

$\therefore EF \perp BC$, $\angle FEC = 90^\circ$,

$\because AB = AC$, G 为 BC 的中点,

$\therefore AG \perp BC$, $BG = CG = 4$,

$\therefore \angle AGB = \angle AGC = 90^\circ$,

$\therefore AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

易证四边形 $AGEN$ 为矩形, 可得 $NE = AG = 3$, $EF = 2EN = 6$,

设 $EG = x$, 则 $CF = BE = 4 + x$, $CE = 4 - x$,

在 $\triangle FEC$ 中, $\angle FEC = 90^\circ$, 由勾股定理得, $EF^2 + CE^2 = CF^2$,

$\therefore 6^2 + (4 - x)^2 = (4 + x)^2$, 解得 $x = \frac{9}{4}$,

$\therefore BE = 4 + x = \frac{25}{4}$,

当 $ME \parallel GN$ 时, $ME \parallel GP$, 如图 5 所示:

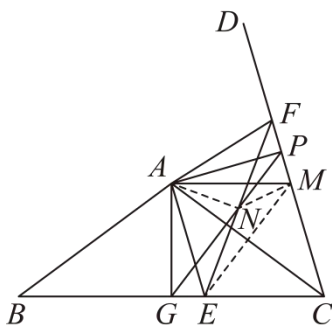


图5

$\because ME \parallel GP$,

$\therefore \angle CEM = \angle CGP, \angle CME = \angle CPG$,

又 $\because \angle CGP = \angle CPG$

$$\therefore \angle CEM = \angle CME ,$$

$$\therefore CM = CE$$

$$\because AM \parallel BC ,$$

$$\therefore \angle MAC = \angle ACB = \angle ACM$$

$$\therefore AM = CM$$

$$\therefore AM = CE$$

$$\text{又 } AM \parallel CE ,$$

$$\therefore \text{四边形 } AECM \text{ 是平行四边形,}$$

$$\text{又 } CM = CE ,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } AECM \text{ 是菱形,}$$

$$\therefore CE = AE ,$$

$$\text{由 (2) 可知 } BE = \frac{39}{8} .$$

$$\text{综上所述, } BE \text{ 的长为 } \frac{25}{4} \text{ 或 } \frac{39}{8} .$$