

2024-2025 学年八年级数学下学期期中模拟卷

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 沪教版八年级数学下册第 20~22.2 章 (一次函数、代数方程、平行四边形)。
5. 难度系数: 0.6。

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 在下列函数中, y 是 x 的一次函数的是 ()

- A. $y = kx + b$ (k 、 b 是常数) B. $2x + 7y = 1$
C. $y = \frac{1}{x} + 4$ D. $y = 2x^2 - 1$

【答案】B

【详解】解: A. $y = kx + b$ (k 、 b 是常数), 当 $k = 0$ 时, y 不是 x 的一次函数, 故选项 A 不符合题意;

B. $2x + 7y = 1$, 可化为 $y = -\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}$, y 是 x 的一次函数, 故选项 B 符合题意;

C. $y = \frac{1}{x} + 4$, y 不是 x 的一次函数, 故选项 C 不符合题意;

D. $y = 2x^2 - 1$, y 不是 x 的一次函数, 故选项 D 不符合题意;

故选: B.

2. 已知点 $(-4, y_1)$, $(2, y_2)$ 都在直线 $y = -x + 3$ 上, 则 y_1 与 y_2 的大小关系为 ()

- A. $y_1 < y_2$ B. $y_1 > y_2$ C. $y_1 = y_2$ D. 无法确定

【答案】B

【详解】解: $\because$ 点 $(-4, y_1)$, $(2, y_2)$ 都在直线 $y = -x + 3$ 上,

$\therefore y_1 = 4 + 3 = 7$, $y_2 = -2 + 3 = 1$.

$$\therefore 7 > 1,$$

$$\therefore y_1 > y_2.$$

故选：B.

3. 下列说法正确的是 ()

A. $x^3 + 3x = 0$ 是二项方程

B. $x^2 + \sqrt{2}x - 3 = 0$ 是无理方程

C. $\frac{x^2 - x}{3} = 2$ 是分式方程

D. $2x^2 + y = 3$ 是二元二次方程

【答案】D

【详解】解：A. 方程的左边两项都含未知数，故本选项不符合题意；

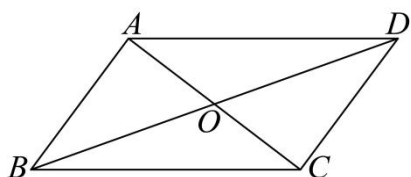
B. 根号内没有未知数，不是无理方程，故本选项不符合题意；

C. 分母中不能未知数，不是分式方程，故本选项不符合题意；

D. 方程是二元二次方程，故本选项符合题意；

故选：D.

4. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O . 下列条件不能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()



A. $AB = DC, AD = BC$;

B. $AB \parallel DC, AD = BC$;

C. $AB \parallel DC, \angle BAD = \angle BCD$;

D. $OA = OC, OB = OD$;

【答案】B

【详解】解：A、 $\because AB = DC, AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故选项 A 不符合题意；

B、 $\because AB \parallel DC, AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 不一定是平行四边形，也可能是等腰梯形，故选项 B 符合题意，

C、 $\because AB \parallel DC$,

$$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ.$$

$$\because \angle BAD = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故选项 C 不符合题意；

D、∵ $OA = OC, OB = OD$,

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故选项 D 不符合题意；

故选：B.

5. 在直线 $y = x + 4$ 上，到坐标轴的距离为 2 个单位的点有 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【详解】解：∵ 到坐标轴的距离为 2 个单位，

∴ $|x| = 2$ 或 $|y| = 2$,

当 $x = 2$ 时， $y = 6$ ，即点 $(2, 6)$ ；

当 $x = -2$ 时， $y = 2$ ，即点 $(-2, 2)$ ；

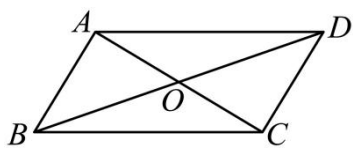
当 $y = 2$ 时， $x = -2$ ，即点 $(-2, 2)$ ；

当 $y = -2$ 时， $x = -6$ ，即点 $(-6, -2)$ ；

∴ 到坐标轴的距离为 2 个单位的点有 $(2, 6)$ 或 $(-2, 2)$ 或 $(-6, -2)$ ，共 3 个，

故选：C.

6. 如图，形如 $\square ABCD$ 的纸片的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，将这张纸片对折后点 B 与点 D 重合，点 A 落在点 E 处，已知 $\angle AOB = 50^\circ$ ，那么 $\angle CEO$ 的度数为 ()



A. 25°

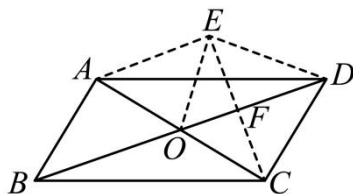
B. 50°

C. 40°

D. 130°

【答案】C

【详解】解：如图所示：



由折叠的性质可得： $\angle AOB = \angle EOD = 50^\circ$ ， $OE = OA$ ，

∴ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AO = CO,$$

$$\therefore OE = OC,$$

$$\because \angle COF = \angle AOB = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle EOF = \angle COF = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle COE = 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ,$$

$$\because OE = OC,$$

$$\therefore \angle CEO = \angle OCE = \frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ.$$

故选：C.

第二部分（非选择题 共 82 分）

二、填空题（本大题共 12 小题，每小题 2 分，满分 24 分）

7. 方程 $32 + x^5 = 0$ 的根是 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -2

【详解】解： $32 + x^5 = 0$,

$$x^5 = -32$$

$$x = -2,$$

故答案为： -2

8. 已知直线 $y = -3x + b$ 不经过第一象限，则 b 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $b \leq 0$

【详解】解： $\because$ 直线 $y = -3x + b$ 不经过第一象限，

$\therefore$ 直线 $y = -3x + b$ 经过第二、三、四象限，

$$\therefore k < 0, \quad b \leq 0,$$

故答案为： $b \leq 0$.

9. 一个多边形的每一个外角都等于 40° ，则这个多边形的内角和为 $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

【答案】 1260

【详解】解： $\because$ 一个多边形的每一个外角都等于 40° ,

$$\therefore \text{这个多边形的边数为： } 360^\circ \div 40^\circ = 9,$$

$$\therefore \text{这个多边形的内角和为： } 180^\circ \times (9 - 2) = 1260^\circ,$$

故答案为： 1260.

10. 方程 $(x+2)\sqrt{x-1}=0$ 的解是_____.

【答案】 $x=1$

【详解】解：由题意得 $x-1 \geq 0$ ，
解得 $x \geq 1$ ，

原方程可化为： $x+2=0$ 或 $\sqrt{x-1}=0$ ，

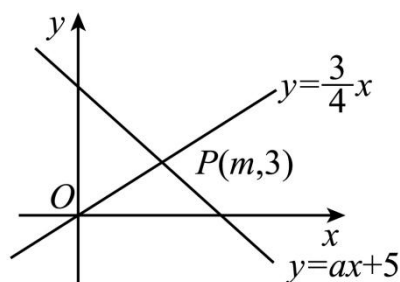
解得 $x=-2$ (不合题意，舍去) 或 $x=1$ ，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，原方程成立.

故方程 $(x+2)\sqrt{x-1}=0$ 的根是 $x=1$.

故答案为： $x=1$.

11. 如图，已知函数 $y=\frac{3}{4}x$ 和 $y=ax+5$ 的图像相交于点 $P(m,3)$ ，则不等式 $\frac{3}{4}x < ax+5$ 的解集是_____.



【答案】 $x < 4$

【详解】解：将点 $P(m,3)$ 代入函数 $y=\frac{3}{4}x$ ，

可得 $3=\frac{3}{4} \times m$ ，解得 $m=4$ ，

$\therefore P(4,3)$ ，

结合图像可知，不等式 $\frac{3}{4}x < ax+5$ 的解集是 $x < 4$ 。

故答案为： $x < 4$ 。

12. 直线 $y=-5x+5$ 与坐标轴围成的三角形的面积为_____.

【答案】 $\frac{5}{2}$

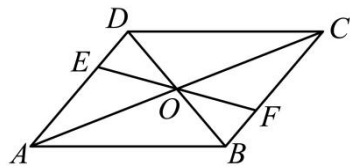
【详解】解：由直线 $y=-5x+5$ 得：当 $x=0$ 时， $y=5$ ，当 $y=0$ 时， $x=1$ ，

$\therefore$ 直线与坐标轴的交点为 $(0,5)$ 和 $(1,0)$ ，

$\therefore$ 与坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 5 \times 1 = \frac{5}{2}$ ，

故答案为: $\frac{5}{2}$.

13. 如图, 已知 $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O , 过点 O 的线段 EF 与 AD 、 BC 分别交于点 E 、 F , 如果 $AD=4$, $AB=5$, 四边形 $EFCD$ 的周长为 12. 则 $OE=$ _____.



【答案】 $\frac{3}{2}$

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 平行四边形,

$\therefore AB=CD=5$, $AD=BC=4$, $AO=OC$, $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle OAD = \angle OCF$,

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle OCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle OAD = \angle OCF \\ \angle AOE = \angle COF \\ AO = CO \end{cases},$$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle OCF$ (AAS),

$\therefore OF = OE$, $CF = AE$,

$\therefore$ 四边形 $EFCD$ 的周长

$$= ED + CD + CF + OF + OE$$

$$= ED + AE + CD + OE + OF$$

$$= AD + CD + OE + OF = 12,$$

$$\therefore 4 + 5 + 2OE = 12,$$

$$\therefore OE = \frac{3}{2}.$$

故答案为: $\frac{3}{2}$.

14. 若关于 x 的分式方程 $\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{k}{(x+1)(1-x)}$ 有增根 $x=-1$, 则 k 的值为_____.

【答案】 -2

【详解】解: $\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{k}{(x+1)(1-x)}$

$$\therefore \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{k}{(x+1)(x-1)}$$

去分母得: $x-1 = x^2 - 1 + k$

∴分式方程有增根 $x = -1$,

$$\therefore -1 - 1 = 1 - 1 + k,$$

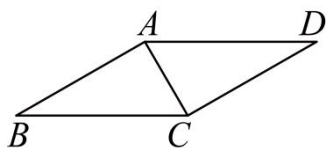
解得: $k = -2$,

故答案为: -2 .

15. 如果把对角线与一边垂直的平行四边形成为“联想平行四边形”, 现有一个“联想平行四边形”的一组邻边长为 4 和 $2\sqrt{3}$, 那么它的最小内角为 _____度.

【答案】30

【详解】如图所示:



在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AC$, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 4$ 时, $\angle B$ 最小,

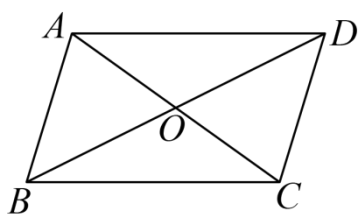
由勾股定理得: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$,

$$\therefore AC = \frac{1}{2}AB,$$

∴在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$,

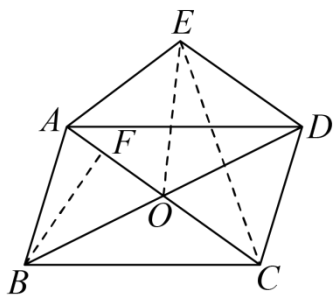
故答案为: 30.

16. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O , $\angle AOB = 60^\circ$, $AC = 6$, $BD = 8$, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 AC 翻折后, 点 B 落在点 E 处, 联结 EA 、 ED , 那么四边形 $AEDC$ 的周长 = _____.



【答案】 $2\sqrt{13} + 10$

【详解】解: 如图, 过点 B 作 $BF \perp AC$ 于点 F , 连接 OE, CE ,



∵ 在 $\square ABCD$ 中, $AC = 6$, $BD = 8$,

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = 3, OB = OD = \frac{1}{2}BD = 4, AB = CD,$$

∵ 在 $\text{Rt}\triangle BOF$ 中, $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle OBF = 30^\circ$,

$$\therefore OF = \frac{1}{2}OB = 2, BF = \sqrt{OB^2 - OF^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AF = OA - OF = 1,$$

$$\therefore CD = AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{13},$$

由折叠的性质得: $AE = AB = \sqrt{13}$, $OB = OE = 4$, $\angle AOE = \angle AOB = 60^\circ$,

$$\therefore OD = OE = 4, \angle DOE = 60^\circ,$$

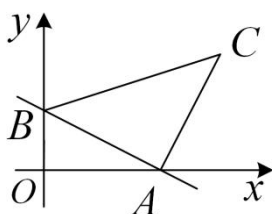
∴ $\triangle DOE$ 是等边三角形,

$$\therefore DE = OD = 4,$$

则四边形 $AEDC$ 的周长为 $AE + DE + CD + AC = \sqrt{13} + 4 + \sqrt{13} + 6 = 2\sqrt{13} + 10$,

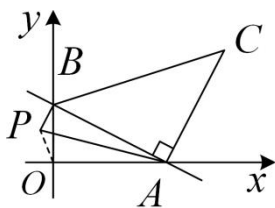
故答案为: $2\sqrt{13} + 10$.

17. 如图, 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 和 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、点 B , 以线段 AB 为直角边在第一象限内作等腰直角 ABC , $\angle BAC = 90^\circ$, 如果在直角坐标平面内有一点 $P\left(a, \frac{3}{4}\right)$, 且 $\triangle ABP$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等, 则 a 的值为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{4} - 4$ 或 $4 - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

【详解】解: 如图, 连接 OP ,



$\therefore$ 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ,

$$\therefore A(\sqrt{3}, 0), B(0, 1), AB = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ABC} = 2,$$

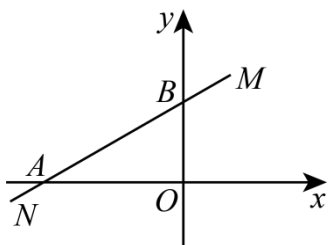
$$\text{又 } S_{\triangle ABP} = S_{\triangle OPB} + S_{\triangle OAB} - S_{\triangle AOP},$$

$$\therefore |a| \times 1 + \sqrt{3} \times 1 - \frac{3}{4} \times \sqrt{3} = 4,$$

$$\text{解得 } a = \frac{\sqrt{3}}{4} - 4 \text{ 或 } a = 4 - \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{故答案为 } \frac{\sqrt{3}}{4} - 4 \text{ 或 } 4 - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

18. 如图, 已知直线 $MN: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 交 x 轴负半轴于点 A , 交 y 轴于点 B , 点 C 是 x 轴上的一点, 且 $OC = 2$, 则 $\angle MBC$ 的度数为_____.



【答案】 75° 或 165°

【详解】 解: $\because$ 直线 $MN: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 交 x 轴负半轴于点 A , 交 y 轴于点 B ,

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2, \text{ 解得 } x = -2\sqrt{3},$$

$$\therefore A(-2\sqrt{3}, 0),$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y = 2,$$

$$\therefore B(0, 2),$$

$$\therefore AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4,$$

$$\therefore OB = \frac{1}{2}AB,$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

取斜边 AB 的中点 D , 连接 OD ,

$$AD = BD = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore OB = OD = BD,$$

$\therefore \triangle BOD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle MAO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle MBO = 120^\circ.$$

$$\because B(0, 2), \quad OC = 2,$$

$$\therefore OB = OC,$$

$$\therefore \angle CBO = 45^\circ,$$

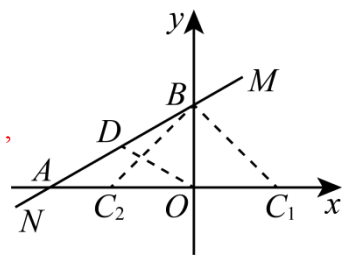
如图, 分两种情况考虑:

①当点 C 在 x 轴正半轴上时, $\angle C_1BO = 45^\circ$,

$$\therefore \angle MBC_1 = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ;$$

②当点 C 在 x 轴负半轴上时, $\angle C_2BO = 45^\circ$,

$$\angle MBC_2 = 120^\circ + 45^\circ = 165^\circ.$$



故答案为: 75° 或 165° .

三.解答题 (本大题共 8 小题, 58 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. (5 分) 解方程: $\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} = 1.$

【详解】解: 去分母, 得 $4 - (x+2) = (x+2)(x-2)$, (2 分)

整理, 得 $2 - x = (x+2)(x-2)$,

则 $(x-2)(x+3)=0$,

$\therefore x-2=0$ 或 $x+3=0$,

解得 $x=2$ 或 $x=-3$, (1 分)

检验: 当 $x=2$ 时, $(x+2)(x-2)=0$, 则 $x=2$ 是分式方程的增根;

当 $x=-3$ 时, $(x+2)(x-2)\neq 0$, 则 $x=-3$ 是分式方程的解,

综上, 该分式方程的解为 $x=-3$ (2 分)

20. (5 分) 用换元法解方程组:
$$\begin{cases} \frac{2}{x-2} + \frac{3}{y} = -4 \\ \frac{6}{x-2} - \frac{1}{y} = 8 \end{cases}$$

【详解】解: 设 $\frac{1}{x-2}=u$, $\frac{1}{y}=v$, 则原方程组可化为 $\begin{cases} 2u+3v=-4 \\ 6u-v=8 \end{cases}$, (2 分)

解得 $\begin{cases} u=1 \\ v=-2 \end{cases}$,

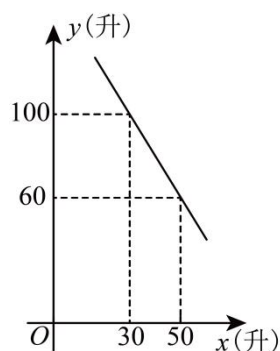
于是, 得 $\begin{cases} \frac{1}{x-2}=1 \\ \frac{1}{y}=-2 \end{cases}$,

得 $\begin{cases} x=3 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$, (1 分)

检验: 把 $x=3$, $y=-\frac{1}{2}$ 代入原方程组中所含各分式的分母, 各分母的值不为零,

$\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases} x=3 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$ (2 分)

21. (8 分) 某学校为了加强常规和应急消毒工作, 计划购买甲、乙两种类型的消毒剂, 预计购进乙种类型的消毒剂 y (升) 与甲种类型的消毒剂 x (升) 之间的函数关系如图所示.



(1)求 y 关于 x 的函数解析式 (不需要写定义域) ;

(2)该学校用 2000 元选购了甲种类型的消毒剂, 用 2400 元选购了乙种类型的消毒剂, 甲种类型消毒剂的单价比乙种类型消毒剂的单价贵 20 元, 求选购的甲、乙两种类型的消毒剂分别是多少升?

【详解】 (1) 解: 设所求函数解析式为 $y = kx + b$,

由图像知, 直线过 (30,100)、(50,60) 两点,

把这两点坐标分别代入 $y = kx + b$ 中, 得:
$$\begin{cases} 30k + b = 100 \\ 50k + b = 60 \end{cases}, \dots\dots (2 \text{ 分})$$

解得:
$$\begin{cases} k = -2 \\ b = 160 \end{cases},$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y = -2x + 160$. $\dots\dots (2 \text{ 分})$

(2) 解: 设甲种类型消毒剂购买了 x 升, 则乙种类型消毒剂购买了 $(-2x + 160)$ 升,

根据题意, 得: $\frac{2000}{x} = \frac{2400}{-2x + 160} + 20$, $\dots\dots (2 \text{ 分})$

整理得: $x^2 - 240x + 8000 = 0$,

解得: $x_1 = 40$, $x_2 = 200$,

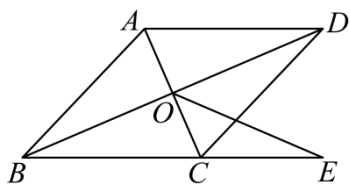
经检验, $x = 40$, $x = 200$ 都是原方程的解, 但当 $x = 200$ 时, $-2x + 160 = -240 < 0$, 与题意不符,

$\therefore x = 40$,

$\therefore -2x + 160 = -2 \times 40 + 160 = 80$;

答: 甲种类型消毒剂购买了 40 升, 乙种类型消毒剂购买了 80 升. $\dots\dots (2 \text{ 分})$

22. (8 分) 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD = BC$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , E 在边 BC 的延长线上, 且 $OE = OB$, $\angle ADB = \angle OEB$.



(1)求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

(2)连接 DE , 求证: $DE \perp BE$.

【详解】 (1) 证明: $\because OE = OB$,

$\therefore \angle OBE = \angle OEB$,

$\because \angle ADB = \angle OEB$,

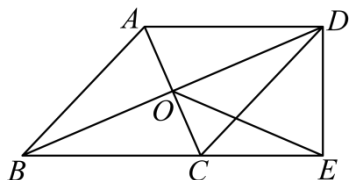
$\therefore \angle ADB = \angle OBC$, $\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore AD = BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形; (2 分)

(2) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,



$$\therefore BO = OD,$$

$$\therefore OE = OB,$$

$$\therefore OE = OD,$$

$$\therefore \angle OBE = \angle OEB, \angle OED = \angle ODE, \dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \angle OBE + \angle OEB + \angle OED + \angle ODE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BEO + \angle DEO = \angle BED = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \perp BE. \dots\dots (2 \text{ 分})$$

23. (6 分) 有一段河道需要进行清淤疏通, 现有甲乙两家清淤公司可供选择, 如果甲公司单独做 4 天, 乙公司再单独做 6 天, 那么恰好能完成全部清淤任务的一半; 如果甲公司先做 4 天, 剩下的清淤工作由乙公司单独完成, 那么乙公司所用时间恰好比甲公司单独完成清淤任务所需时间多 2 天, 求甲乙两公司单独完成清淤任务各需多少天.

【详解】解: 设甲公司单独完成清淤任务需要 x 天, 乙公司单独完成清淤任务需要 y 天, (1 分)

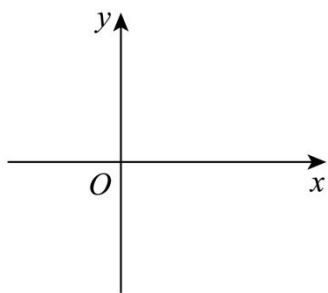
根据题意得:
$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{4}{x} + \frac{x+2}{y} = 1 \end{cases}, \dots\dots (2 \text{ 分})$$

解得:
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -4 \end{cases} \text{ (舍去)}, \begin{cases} x_2 = 16 \\ y_2 = 24 \end{cases},$$

经检验,
$$\begin{cases} x = 16 \\ y = 24 \end{cases} \text{ 为原方程组的解. } \dots\dots (2 \text{ 分})$$

答: 甲公司单独完成清淤任务需要 16 天, 乙公司单独完成清淤任务需要 24 天. (1 分)

24. (8 分) 已知: 一次函数 $y = \frac{1}{3}x + m$ 与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象在第一象限的交点为 $A(1, n)$.



(1)求 m 与 n 的值;

(2)设一次函数的图像与 x 轴交于点 B ， C 为 x 轴上一点，连接 AC ，若 ABC 为等腰三角形，求 C 的坐标.

【详解】 (1) 解: $\because A(1, n)$ 在反比例数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上,

$$\therefore n = \frac{2}{1} = 2,$$

$$\therefore n = 2,$$

$$\therefore A(1, 2) \dots\dots (2 \text{ 分})$$

将 $A(1, 2)$ 代入 $y = \frac{1}{3}x + m$ 得, $2 = \frac{1}{3} + m$

解得: $m = \frac{5}{3} \dots\dots (2 \text{ 分})$

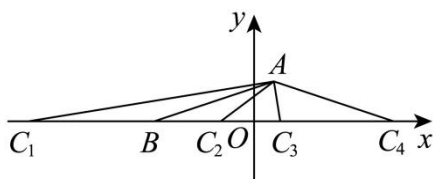
(2) 解: 由 (1) 可得 $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

当 $y = 0$ 时, $x = -5$,

$\therefore$ 一次函数的图像与 x 轴交于点 B ,

$$\therefore B(-5, 0),$$

$$\therefore AB = \sqrt{(1+5)^2 + 2^2} = 2\sqrt{10},$$



如图所示, 设 $C(x, 0)$,

当 $BC = BA$ 时, 点 C 的坐标为 $(-5 + 2\sqrt{10}, 0)$ 或 $(-5 - 2\sqrt{10}, 0)$

当 $CB = CA$ 时,

$$\therefore CB = CA,$$

$$\therefore CB^2 = CA^2,$$

$$\therefore (x+5)^2 = (1-x)^2 + 2^2,$$

$$\text{解得: } x = -\frac{5}{3}; \dots\dots (2 \text{ 分})$$

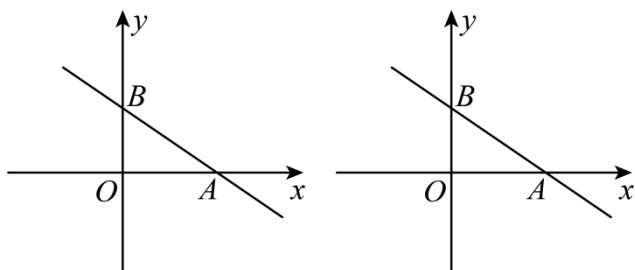
当 $AB = AC$ 时,

$$\therefore A(1,2), \quad x_A - x_B = 6$$

$$\therefore C(7,0)$$

综上所述满足条件的点 C 坐标为 $(-5+2\sqrt{10},0)$ 或 $(-5-2\sqrt{10},0)$ 或 $(-\frac{5}{3},0)$ 或 $C(7,0)$. $\dots\dots (2 \text{ 分})$

25. (9 分) 如图, 在平面直角坐标系中, 函数 $y = -\frac{2}{3}x + 2$ 的图象分别交 x 轴, y 轴于 A, B 两点, 过点 B 的直线 BM 交 x 轴正半轴于点 M , 且直线 BM 把 AOB 分成面积之比为 1:2 的两部分.



备用图

(1) 求点 A, B 的坐标;

(2) 求直线 BM 的表达式;

(3) 当 $OM < MA$ 时, 试在直线 BM 上找一点 P , 使得 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle AOB}$, 直接写出点 P 的坐标.

【详解】 (1) 解: 对于 $y = -\frac{2}{3}x + 2$, 令 $x = 0$, 则 $y = 2$,

$$\therefore B(0,2);$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } -\frac{2}{3}x + 2 = 0,$$

$$\text{解得: } x = 3,$$

$$\therefore A(3,0); \dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 解: } \because A(3,0), B(0,2),$$

$$\therefore OA = 3, OB = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OB \cdot OA = 3.$$

$\therefore$ 过点 B 的直线 BM 交 x 轴正半轴于点 M , 且直线 BM 把 AOB 分成面积之比为 1:2 的两部分,

$$\therefore S_{\triangle OBM} = \frac{1}{3} S_{\triangle OAB} = 1 \text{ 或 } S_{\triangle OBM} = \frac{2}{3} S_{\triangle OAB} = 2. \dots\dots (1 \text{ 分})$$

设 $M(t, 0)$, 直线 BM 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\therefore OM = t.$$

$$\text{当 } S_{\triangle OBM} = 1 \text{ 时, 即 } \frac{1}{2} OM \cdot OB = \frac{1}{2} t \times 2 = 1,$$

$$\text{解得: } t = 1.$$

$$\therefore OM = 1, \text{ 即 } M(1, 0).$$

将 $B(0, 2)$, $M(1, 0)$ 代入 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\text{得: } \begin{cases} 2 = b \\ 0 = k + b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -2 \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 此时直线 BM 的解析式为 $y = -2x + 2$; $\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\text{当 } S_{\triangle OBM} = 2 \text{ 时, 即 } \frac{1}{2} OM \cdot OB = \frac{1}{2} t \times 2 = 2,$$

$$\text{解得: } t = 2.$$

$$\therefore OM = 2, \text{ 即 } M(2, 0).$$

将 $B(0, 2)$, $M(2, 0)$ 代入 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\text{得: } \begin{cases} 2 = b \\ 0 = 2k + b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = 2 \end{cases},$$

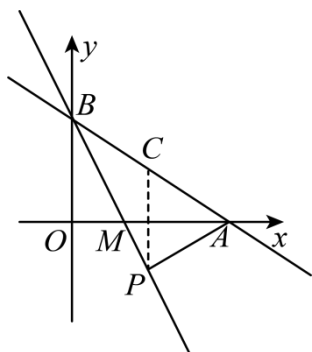
$\therefore$ 此时直线 BM 的解析式为 $y = -x + 2$. $\dots\dots (1 \text{ 分})$

综上所述直线 BM 的表达式为 $y = -2x + 2$ 或 $y = -x + 2$; $\dots\dots (1 \text{ 分})$

(3) 解: $\because OM < MA$,

$\therefore$ 由 (2) 可知 $M(1, 0)$, 即此时直线 BM 的解析式为 $y = -2x + 2$. $\dots\dots (1 \text{ 分})$

如图, 过点 P 作 x 轴垂线, 交直线 AB 于点 C .



设 $P(a, -2a+2)$, 则 $C\left(a, -\frac{2}{3}a+2\right)$,

$$\therefore PC = |y_P - y_C| = \left| \left[-2a+2 - \left(-\frac{2}{3}a+2 \right) \right] \right| = \left| \frac{4}{3}a \right|,$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}CP \cdot (x_A - x_B) = \frac{1}{2} \times \left| \frac{4}{3}a \right| \times (3-0) = |2a|.$$

由 (2) 可知 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle AOB} = 3$,

$$\therefore |2a| = 3,$$

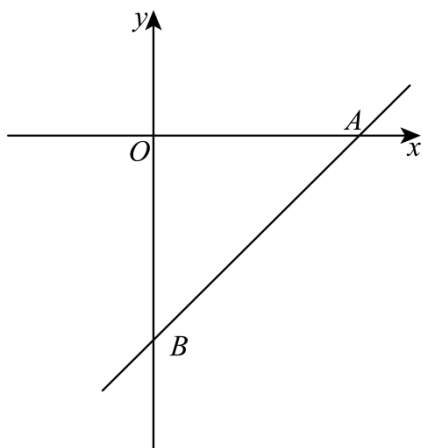
解得: $a = \pm \frac{3}{2}$ (1 分)

当 $a = \frac{3}{2}$ 时, $y_P = -2 \times \frac{3}{2} + 2 = -1$, 即 $P\left(\frac{3}{2}, -1\right)$;

当 $a = -\frac{3}{2}$ 时, $y_P = -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 2 = 5$, 即 $P\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$.

综上可知点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$ (1 分)

26. (9 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = x - 8$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 点, 直线 BC 与 x 轴相交于点 $C(-2, 0)$, 点 D 在第四象限, $BD \perp BA$.



(1) 求直线 BC 的解析式;

(2) 当 $S_{\triangle ABD} = 3S_{\triangle BOC}$ 时, 求点 D 的坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 已知点 P 在 x 轴上, 点 Q 在直线 BC 上, 如果以点 C 、 D 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形, 请直接写出点 P 和点 Q 的坐标.

【详解】 (1) 解: $\because$ 直线 $y = x - 8$ 分别与 y 轴交于 B 点,

令 $x = 0$, 则 $y = -8$,

$$\therefore B(0, -8),$$

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} b = -8 \\ -2k + b = 0 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = -4 \\ b = -8 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -4x - 8$; (2 分)

(2) 解: 如图, 过点 D 作 $DE \perp y$ 轴于点 E ,

$\because$ 直线 $y = x - 8$ 分别与 x 轴交于 A 点,

令 $y = 0$, 则 $x - 8 = 0$, 解得: $x = 8$,

$$\therefore A(8, 0),$$

$$\therefore OA = 8,$$

$$\because B(0, -8), C(-2, 0),$$

$$\therefore OB = OA = 8, OC = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} OC \cdot OB = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8, \text{ (1 分)}$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = 45^\circ, AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 8\sqrt{2},$$

$$\because S_{\triangle ABD} = 3S_{\triangle BOC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = 24,$$

$$\because BD \perp BA,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AB = 24,$$

$$\therefore BD = 3\sqrt{2}, \text{ (1 分)}$$

$$\because \angle ABD = 90^\circ, \angle ABO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = 45^\circ,$$

$$\because DE \perp y \text{ 轴},$$

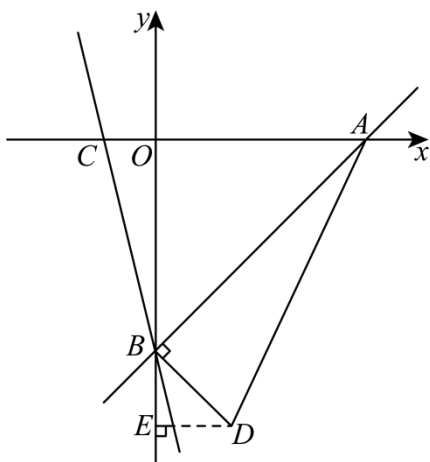
$\therefore \triangle BED$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore BE = DE, BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{2} BE = \sqrt{2} DE = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore BE = DE = 3,$$

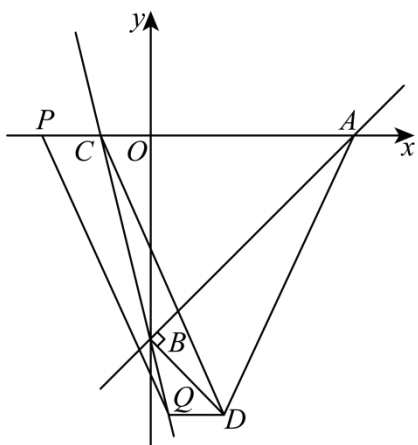
$$\therefore OE = OB + BE = 8 + 3 = 11,$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(3, -11)$; (1 分)



(3) 解: 以点 $C(-2,0)$ 、 $D(3,-11)$ 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形,

①如图, 四边形 $CDQP$ 为平行四边形时,



$\therefore DQ \parallel CP \parallel x$ 轴, $DQ = CP$,

$\therefore$ 点 Q 的纵坐标为 -11 ,

$\because$ 点 Q 在直线 BC 上,

令 $y = -11$, 则 $-4x - 8 = -11$, 解得: $x = \frac{3}{4}$,

$\therefore Q\left(\frac{3}{4}, -11\right)$

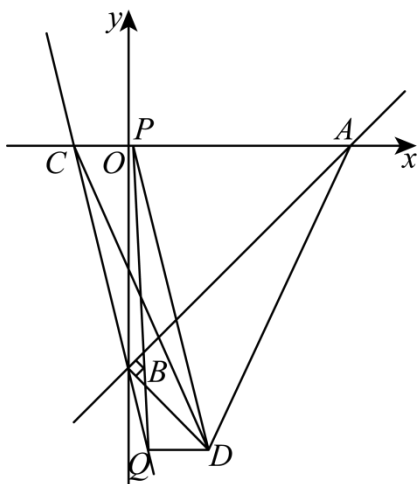
$\therefore DQ = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$,

$\therefore CP = \frac{9}{4}$,

$\therefore OP = OC + CP = 2 + \frac{9}{4} = \frac{17}{4}$,

$\therefore P\left(-\frac{17}{4}, 0\right)$; (1 分)

②如图, 四边形 $CQDP$ 为平行四边形时,



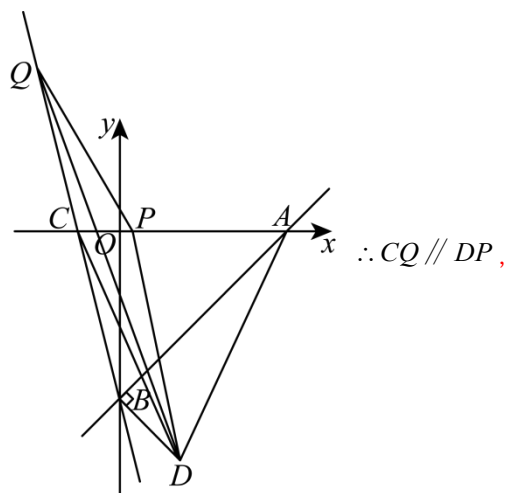
同①理可得, $Q\left(\frac{3}{4}, -11\right)$, $CP = DQ = \frac{9}{4}$,

$\therefore OC = 2$,

$\therefore OP = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$,

$\therefore P\left(\frac{1}{4}, 0\right)$; (1 分)

③如图, 四边形 $CDPQ$ 为平行四边形时,



$\therefore$ 设直线 DP 的解析式为 $y = -4x + t$,

则 $-4 \times 3 + t = -11$, 解得: $t = 1$,

$\therefore$ 直线 DP 的解析式为 $y = -4x + 1$,

令 $y = 0$, 则 $-4x + 1 = 0$,

解得: $x = \frac{1}{4}$,

$\therefore P\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

设点 $Q(m, n)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{-2+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3+m}{2} \\ 0 = \frac{n-11}{2} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} m = -\frac{19}{4} \\ n = 11 \end{cases},$$

$$\therefore Q\left(-\frac{19}{4}, 11\right) \dots\dots (1 \text{ 分})$$

综上所述, 以点 C 、 D 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形, 点 P 和点 Q 的坐标为 $P\left(-\frac{17}{4}, 0\right)$, $Q\left(\frac{3}{4}, -11\right)$ 或

$$P\left(\frac{1}{4}, 0\right), Q\left(\frac{3}{4}, -11\right) \text{ 或 } P\left(\frac{1}{4}, 0\right), Q\left(-\frac{19}{4}, 11\right). \dots\dots (1 \text{ 分})$$