

2024 学年第二学期期中质量调研卷

初二年级数学学科

(时间: 100 分钟 分值: 150)

基础部分 (共 100 分)

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列方程中, 是二项方程的为 ()

A. $(x-2)^3 = 8$

B. $3y^2 = 0$

C. $x^4 = 16x$

D. $x = -3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查二项方程的定义, 注意二项方程的左边只有两项, 一项含未知数, 一项是常数, 右边为 0, 熟练掌握二项方程的定义是解决问题的关键.

二项方程的左边只有两项, 其中一项含未知数 x , 另一项是常数项; 方程的右边是 0, 结合选项进行判断即可.

【详解】解: A. $(x-2)^3 = 8$ 不是二项方程, 方程右边不等于 0, 不符合题意;

B. $3y^2 = 0$ 不是二项方程, 方程左边没有常数项, 不符合题意;

C. $x^4 = 16x$ 不是二项方程, 不符合题意;

D. $x = -3$ 即 $x+3=0$ 是二项方程, 符合题意;

故选: D.

2. 一次函数 $y = x - 3$ 的图像不经过 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】根据一次函数的性质可知一次函数 $y=x-3$ 的图像经过哪几个象限, 不经过哪个象限, 从而可以解答本题.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y=x-3$ 中, $k=1$, $b=-3$,

$\therefore$ 一次函数的图像经过一、三、四象限, 不经过第二象限,

故选 B.

【点睛】本题考查一次函数的性质和图象, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质解答.

3. 一个多边形的内角和不可能是 ()

A. 1800°

B. 540°

C. 720°

D. 810°

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形的内角和定理, n 边形的内角和是 $(n-2)180^\circ$, 即多边形的内角和一定是 180 的正整数倍, 依此即可解答, 对于定理的理解是解决本题的关键.

【详解】 解: 810° 不能被 180° 整除, 一个多边形的内角和不可能是 810° .

故选: D.

4. 甲、乙两组同学在植树活动中均植树 120 棵, 已知甲组每小时比乙组多种植 10 棵, 且甲组比乙组提前 2 小时完成. 设乙组每小时植树 x 棵, 可列出方程为 ()

A. $\frac{120}{x} = \frac{120}{x+10} + 2$

B. $\frac{120}{x} = \frac{120}{x+10} - 2$

C. $\frac{120}{x} = \frac{120}{x-10} + 2$

D. $\frac{120}{x} = \frac{120}{x-10} - 2$

【答案】 A

【解析】

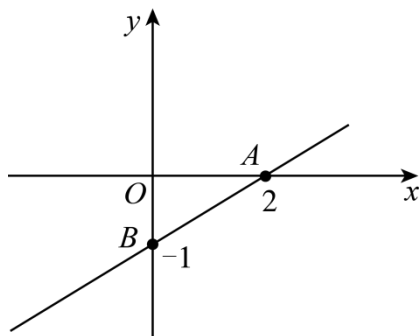
【分析】 本题主要考查了从实际问题中抽象出分式方程, 设乙组每小时植树 x 棵, 则甲组每小时植树 $(x+10)$ 棵, 根据甲组比乙组提前 2 小时完成列出方程即可.

【详解】 解: 设乙组每小时植树 x 棵,

由题意得, $\frac{120}{x} = \frac{120}{x+10} + 2$,

故选: A.

5. 如图, 一次函数 $y = ax + b$ 的图象经过 A, B 两点, 则关于 x 的不等式 $ax + b < 0$ 的解集是 ()



A. $x < 2$

B. $x > 2$

C. $x < \frac{1}{2}$

D. $x > \frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

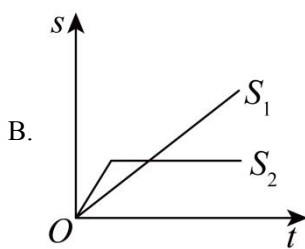
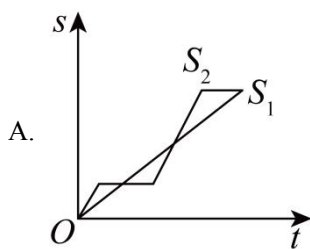
【分析】本题考查了一次函数与一元一次不等式：从函数的角度看，就是寻求使一次函数 $y = ax + b$ 的值大于（或小于）0 的自变量 x 的取值范围；从函数图象的角度看，就是确定直线 $y = ax + b$ 在 x 轴上（或下）方部分所有的点的横坐标所构成的集合．根据一次函数与一元一次不等式的关系，利用函数图象找出函数值为负数时，对应的自变量的取值范围即可．

【详解】解：∵当 $x < 2$ 时， $y < 0$ ，即 $ax + b < 0$ ，

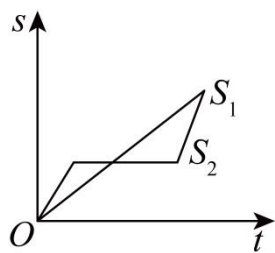
∴由图象可知，关于 x 的不等式 $ax + b < 0$ 的解集是 $x < 2$ ．

故选：A．

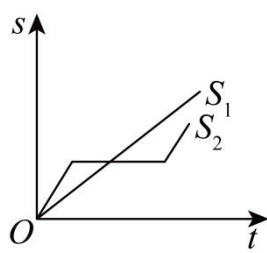
6. “龟兔赛跑”讲述了这样的故事：领先的兔子看着缓慢爬行的乌龟，骄傲起来，睡了一觉，当它醒来时，发现乌龟快到终点了，于是急忙追赶，但为时已晚，乌龟还是先到达终点、用 s_1 、 s_2 分别表示乌龟和兔子所行的路程， t 为时间，则下列图象中与故事情节相吻合的是（ ）



C.



D.



【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，乌龟的运动图像是正比例函数，兔子的运动图像是分段函数，且分为三段，其特点是第一段正比例函数且图像更靠近 y 轴，第二段是平行 x 轴的线段，且线段的两个端点位于乌龟图像的两侧，第三段为一次函数，但是图像没有交点，根据这些信息判断即可．

【详解】解：根据题意，乌龟的运动图像是正比例函数，兔子的运动图像是分段函数，且分为三段，其特点是第一段正比例函数且图像更靠近 y 轴，第二段是平行 x 轴的线段，且线段的两个端点位于乌龟图像的两侧，第三段为一次函数，但是图像没有交点，根据这些信息判断，而且乌龟比兔子早到，故 A，B，C 不符

合题意，符合描述的只有 D 选项.

故选 D .

【点睛】本题主要考查函数图象的实际应用，能够熟练的把文字信息转化为图象的信息是解题关键.

二、填空题 (每题 3 分, 共 36 分)

7. 一次函数 $y = 3x - 2$ 的截距是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】本题考查一次函数图象上点的坐标特征，一次函数的性质，图象上点的坐标适合解析式. 令 $x = 0$ ，求出相应的 y 的值，即可解答本题.

【详解】解： $\because y = 3x - 2$,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = -2$,

$\therefore$ 一次函数 $y = 3x - 2$ 的截距是 -2 ,

故答案为： -2 .

8. 方程 $\sqrt{3x-2} = x$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

【解析】

【分析】两边同时平方，把原方程化为一元二次方程，解一元二次方程即可求得 x 的值.

【详解】 $\sqrt{3x-2} = x$,

$$3x-2=x^2,$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$(x-2)(x-1)=0$$

$$x-1=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

解得 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$ 都能够使方程 $\sqrt{3x-2} = x$ 成立,

$\therefore \sqrt{3x-2} = x$ 的解是: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

故答案为 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解法，把方程 $\sqrt{3x-2}=x$ 化为 $x^2-3x+2=0$ 是解决本题的关键.

9. 用换元法解方程 $\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}=4$ ，设 $y=\frac{x}{x^2+1}$ ，则得到的整式方程为_____.

【答案】 $y^2-4y+1=0$

【解析】

【分析】 本题考查的是利用换元法解分式方程，掌握整体换元的思想是解本题的关键. 把 $y=\frac{x}{x^2+1}$ 代入化简即可.

【详解】 解：把 $y=\frac{x}{x^2+1}$ 代入 $\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}=4$ ，

$$\text{得 } y + \frac{1}{y} = 4,$$

去分母，得 $y^2+1=4y$ ，

$$\therefore y^2-4y+1=0,$$

故答案为： $y^2-4y+1=0$.

10. 若一次函数 $y=(m-2)x-3m$ 的图像经过第二、三、四象限，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $0 < m < 2$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图像的分布，不等式组的解法，熟练掌握图像的分布是解题的关键. 根据一次函数 $y=(m-2)x-3m$ 的图像经过第二、三、四象限得出 $\begin{cases} m-2 < 0 \\ -3m < 0 \end{cases}$ ，然后解不等式组即可.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y=(m-2)x-3m$ 的图像经过第二、三、四象限，

$$\therefore \begin{cases} m-2 < 0 \\ -3m < 0 \end{cases},$$

解得 $0 < m < 2$ ，

故答案为： $0 < m < 2$.

11. 一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 中两个变量 x 、 y 的部分对应值如下表所示：那么关于 x 的不等式

$kx+b \leq -1$ 的解集是_____.

x	-1	0	1	2
-----	----	---	---	---

y	2	1	0	-1
-----	---	---	---	----

【答案】 $x \geq 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与不等式之间的关系，根据表格中的数据可知， y 随着 x 的增大而减小，再由不等式 $kx + b \leq -1$ 的解集即为函数值小于等于 -1 时，自变量的取值范围，据此可得答案.

【详解】 解：由表格中的数据可知， y 随着 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时， $y = -1$ ，

$\therefore$ 关于 x 的不等式 $kx + b \leq -1$ 的解集是 $x \geq 2$ ，

故答案为： $x \geq 2$.

12. 当 $k =$ _____ 时，方程 $\frac{k}{x-2} + \frac{3}{2-x} = 1$ 会产生增根.

【答案】 3

【解析】

【分析】 此题考查了分式方程的增根问题. 把分式方程化为整式方程，把增根代入即可求出答案.

【详解】 解： $\frac{k}{x-2} + \frac{3}{2-x} = 1$

去分母得到， $k - 3 = x - 2$

把 $x = 2$ 代入 $k - 3 = x - 2$ 得到， $k - 3 = 0$

解得 $k = 3$ ，

故答案为： 3

13. 若一个多边形的内角和是其外角和的 3 倍，则这个多边形的边数是_____.

【答案】 8

【解析】

【分析】 根据多边形的内角和定理，多边形的内角和等于 $(n - 2) \cdot 180^\circ$ ，外角和等于 360° ，然后列方程求解即可.

【详解】 解：设边数为 n ，由题意得，

$180 (n - 2) = 360 \times 3$ ，

解得 $n = 8$.

所以这个多边形的边数是 8.

故答案为： 8.

【点睛】 本题主要考查了多边形的内角和公式与外角和定理，根据题意列出方程是解题的关键.

14. 为了响应全民阅读的号召，某校图书馆利用节假日面向社会开放. 据统计，第一个月进馆 560 人次，进馆人次逐月增加，第三个月进馆 830 人次. 设该校图书馆第二个月、第三个月进馆人次的平均增长率为 x ，则可列方程为_____.

【答案】 $560(1+x)^2 = 830$

【解析】

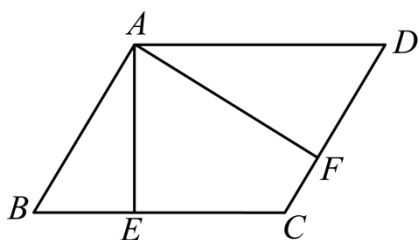
【分析】 利用第三个月进馆人次 = 第一个月进馆人次 $\times (1 + \text{平均增长率})^2$ ，即可得出关于 x 的一元二次方程，此题得解.

【详解】 解：依题意得： $560(1+x)^2 = 830$.

故答案为： $560(1+x)^2 = 830$.

【点睛】 本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，解题的关键是找准等量关系，正确列出一元二次方程.

15. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 的周长为 48，相邻两边上的高分别为 4 和 8，则平行四边形 $ABCD$ 面积为_____.



【答案】 64

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质，根据平行四边形的性质并结合“ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 48” 可得 $BC + CD = 24$ ，根据“相邻两边上的高分别为 4 和” 得出 $4BC = 8CD$ ，解方程组求出 BC 、 CD ，即可求解.

【详解】 解：设 AE 是 BC 边上的高， AF 是 CD 边上的高，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, \quad AD = BC,$$

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 48，

$$\therefore AB + BC + CD + AD = 48,$$

$$\therefore BC + CD = 24,$$

$\therefore$ 相邻两边上的高分别为 4 和 8, 不妨设 $AE = 4$, $AF = 8$,

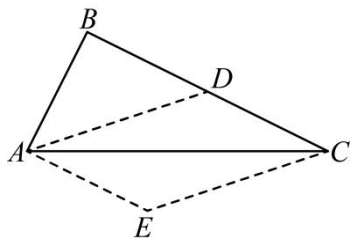
$$\therefore 4BC = 8CD,$$

$$\therefore BC = 16, \quad CD = 8,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 面积为 } 16 \times 4 = 64,$$

故答案为: 64.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 点 D 在 BC 边上, 将 $\triangle ABD$ 沿直线 AD 翻折后, 点 B 落在点 E 处, 如果四边形 $AECD$ 是平行四边形, 那么 $\angle BAD =$ _____.



【答案】 45°

【解析】

【分析】 本题考查了折叠的性质, 平行四边形的性质, 三角形的内角和定理等知识, 根据翻折和平行四边形的性质可得出 $\angle BAD = \angle ADB = \angle EAD$, 然后在 $\triangle ABD$ 中, 根据三角形的内角和定理求解即可.

【详解】 解: $\because$ 将 $\triangle ABD$ 沿直线 AD 翻折后, 点 B 落在点 E 处,

$$\therefore \angle BAD = \angle EAD,$$

$\because$ 四边形 $AECD$ 是平行四边形,

$$\therefore AE \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle ADB,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ADB,$$

又 $\angle B = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAD = \angle ADB = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 45^\circ,$$

故答案为: 45° .

17. 我们把直角坐标平面内到 x 轴距离是到 y 轴距离 2 倍的点称为“特殊点”. 那么一次函数 $y = -2x + 4$ 的图象上的“特殊点”坐标为_____.

【答案】 $(1, 2)$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数图象上点的坐标特征. 设一次函数 $y = -2x + 4$ 的图象上的“特殊点”坐标为

$(t, -2t+4)$, 根据题意可得, $|-2t+4|=2|t|$, 解方程即可求出答案.

【详解】解: 设一次函数 $y = -2x + 4$ 的图象上的“特殊点”坐标为 $(t, -2t+4)$, 根据题意可得,

$$|-2t+4|=2|t|,$$

则 $-2t+4=2t$ 或 $-2t+4=-2t$

解得 $t=1$,

即一次函数 $y = -2x + 4$ 的图象上的“特殊点”坐标为 $(1, 2)$,

故答案为: $(1, 2)$

18. 在 ABC 中, 点 A 的坐标为 $(0, 1)$ 、点 B 的坐标为 $(4, 1)$, 点 C 的坐标为 $(4, 3)$, 要使以点 A 、 B 、 D 为顶点的三角形与 ABC 全等 (C 与 D 不重合), 则点 D 的坐标为_____.

【答案】 $(4, -1)$

【解析】

【分析】此题考查了轴对称的性质、全等三角形的性质等知识, 根据题意可得 ABC 与 $\triangle ABD$ 关于直线 AB 成轴对称, 据此即可求出 D 的坐标.

【详解】解: $\because$ 以点 A 、 B 、 D 为顶点的三角形与 ABC 全等 (C 与 D 不重合),

$\therefore ABC$ 与 $\triangle ABD$ 关于直线 AB 成轴对称,

$\therefore C$ 与 D 关于直线 AB 成轴对称,

由题意可得直线 AB 为 $y=1$,

$\therefore C$ 的坐标为 $(4, 3)$

$\therefore D$ 的坐标为 $(4, -1)$,

故答案为: $(4, -1)$

三、简答题 (每题 6 分, 共 24 分)

19. 解方程: $\frac{4}{x^2-1} - \frac{3}{x^2+x} = \frac{2}{x^2-x}$.

【答案】 无解

【解析】

【分析】本题考查了解分式方程, 把分式方程转化为整式方程, 然后解整式方程, 最后检验即可.

【详解】解: 方程两边同乘以 $x(x+1)(x-1)$, 得 $4x-3(x-1)=2(x+1)$,

解得 $x=1$,

检验: 当 $x=1$ 时, $x(x+1)(x-1)=0$,

$\therefore$ 原方程无解.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} (x-y)^2 - 3(x-y) + 2 = 0 \\ x+y=5 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

【解析】

【分析】本题考查了解二元二次方程组,先把二元二次方程组转换为两个二元一次方程组,然后分别求解即可.

【详解】解:
$$\begin{cases} (x-y)^2 - 3(x-y) + 2 = 0 \\ x+y=5 \end{cases},$$

解方程 $(x-y)^2 - 3(x-y) + 2 = 0$,

得 $x-y=1$ 或 $x-y=2$,

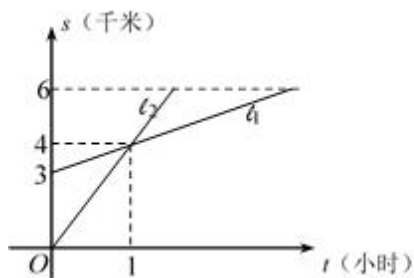
$\therefore$ 原方程组可化为
$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-y=2 \\ x+y=5 \end{cases},$$

解方程组
$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases},$$

解方程组
$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=5 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 原方程组的解为
$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

21. 已知 A 、 B 、 C 三地在同一条路上, A 地在 B 地的正南方 3 千米处, 甲、乙两人分别从 A 、 B 两地向正北方向的目的地 C 匀速直行, 他们分别和 A 地的距离 s (千米) 与所用的时间 t (小时) 的函数关系如图所示.



(1) 图中的线段 l_1 是_____ (填“甲”或“乙”) 的函数图象, C 地在 B 地的正北方向_____ 千米处;

(2) 谁先到达 C 地? 并求出甲乙两人到达 C 地的时间差;

(3) 如果速度慢的人在两人相遇后立刻提速, 并且比先到者晚 1 小时到达 C 地, 求他提速后的速度.

【答案】 (1) 乙; 3; (2) 甲先到达, 到达目的地的时间差为 $\frac{3}{2}$ 小时; (3) 速度慢的人提速后的速度为 $\frac{4}{3}$ 千米/小时.

【解析】

【详解】 分析:

(1) 根据题意结合所给函数图象进行判断即可;

(2) 由所给函数图象中的信息先求出二人所对应的函数解析式, 再由解析式结合图中信息求出二人到达 C 地的时间并进行比较、判断即可得到本问答案;

(3) 根据图象中的信息结合 (2) 中的结论进行解答即可.

详解:

(1) 由题意结合图象中的信息可知: 图中线段 l_1 是乙的图象; C 地在 B 地的正北方 $6-3=3$ (千米) 处.

(2) 甲先到达.

设甲的函数解析式为 $s=kt$, 则有 $4=t$,

$$\therefore s=4t.$$

$$\therefore \text{当 } s=6 \text{ 时, } t=\frac{3}{2}.$$

设乙的函数解析式为 $s=nt+3$, 则有 $4=n+3$, 即 $n=1$.

$$\therefore \text{乙的函数解析式为 } s=t+3.$$

$$\therefore \text{当 } s=6 \text{ 时, } t=3.$$

$$\therefore \text{甲、乙到达目的地的时间差为: } 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \text{ (小时)}.$$

(3) 设提速后乙的速度为 v 千米/小时,

$\therefore$ 相遇处距离 A 地 4 千米, 而 C 地距 A 地 6 千米,

∴相遇后需行 2 千米.

又∵原来相遇后乙行 2 小时才到达 C 地,

∴乙提速后 2 千米应用时 1.5 小时.

$$\text{即 } \frac{3}{2}v = 2, \text{ 解得: } v = \frac{4}{3},$$

答: 速度慢的人提速后的速度为 $\frac{4}{3}$ 千米/小时.

点睛: 本题考查的是由函数图象中获取相关信息来解决问题的能力, 解题的关键是结合题意弄清以下两点:

(1) 函数图象上点的横坐标和纵坐标各自所表示是实际意义; (2) 图象中各关键点 (起点、终点、交点和转折点) 的实际意义.

22. 华为为了响应国家绿色能源的号召进行计划生产, 计划生产手机零件共计 2400 个, 实际生产每小时多生产 10 个.

(1) 若原计划每小时生产 50 个, 求实际生产时间比原计划减少的时间 t 的值;

(2) 如果实际生产时间比原计划减少 4 小时, 问实际生产速度是否符合要求 (实际生产速度不超过每小时 85 个)? 请说明理由.

【答案】 (1) 8 (2) 符合要求, 理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的应用, 解题的关键是:

(1) 通过原计划与实际生产的速度计算时间差即可;

(2) 通过时间差建立分式方程, 求解实际生产速度, 然后验证是否题中限制条件即可.

【小问 1 详解】

解: ∵原计划每小时生产 50 个, 实际生产每小时多生产 10 个,

∴实际生产每小时生产 $50+10=60$ 个,

∴实际生产时间比原计划减少的时间 t 的值为 $\frac{2400}{50} - \frac{2400}{60} = 8$;

【小问 2 详解】

解: 设实际生产每小时生产 x 个,

根据题意, 得: $\frac{2400}{x-10} - \frac{2400}{x} = 4$,

解得 $x = 5 + 5\sqrt{241}$ 或 $x = 5 - 5\sqrt{241}$ (舍去),

经检验: $x = 5 + 5\sqrt{241}$ 符合题意,

∴ $15^2 < 241 < 16^2$,

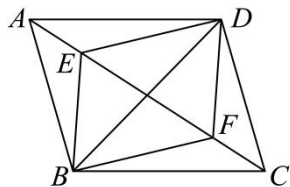
$$\therefore 15 < \sqrt{241} < 16,$$

$$\therefore 80 < 5 + 5\sqrt{241} < 85,$$

$\therefore$ 实际生产速度符合要求.

四、解答题 (第 23 题 10 分, 第 24 题 12 分, 共 22 分)

23. 如图已知点 E 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上的一点, 连结 DE , 过点 B 作 $BF \parallel DE$ 交 AC 于点 F .



(1) 求证: $AE = CF$;

(2) 若 $AB = BC = 8$, $DE = 6$, 当 $\angle ABF = 90^\circ$, 求 AE 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{14}{5}$

【解析】

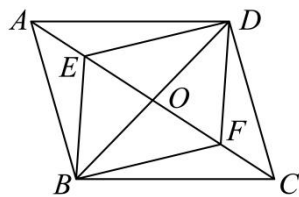
【分析】 本题考查了平行四边形的判定与性质, 等腰三角形的性质, 勾股定理等知识, 解题的关键是:

(1) 根据平行四边形的性质得出 $AO = CO$, $BO = DO$, 证明 $\triangle BEO \cong \triangle DFO$, 得出 $EO = FO$, 然后根据等式的性质即可得证;

(2) 由全等三角形的性质得出 $BF = DE = 6$, 根据勾股定理求出 $AF = 10$, 根据三线合一的性质得出 $BO \perp AC$, 根据等面积法求出 $BO = \frac{24}{5}$, 根据勾股定理求出 $FO = \frac{18}{5}$, 结合 (1) 中 $EO = FO$ 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: 设 AC 、 BD 相交于 O ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AO = CO$, $BO = DO$,

$\therefore BF \parallel DE$,

$\therefore \angle FBO = \angle EDO$, $\angle BFO = \angle DEO$,

$\therefore \triangle BFO \cong \triangle DEO$,

$\therefore EO = FO$,

又 $AO = CO$,

$$\therefore AO - EO = CO - FO,$$

$$\therefore AE = CF;$$

【小问2 详解】

解: $\because \triangle BFO \cong \triangle DEO$,

$$\therefore BF = DE = 6,$$

又 $AB = 8$, $\angle ABF = 90^\circ$,

$$\therefore AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = 10,$$

$$\because AB = BC, \quad AO = CO,$$

$$\therefore BO \perp AC,$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot BF = \frac{1}{2} AF \cdot BO, \quad \text{即 } \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = \frac{1}{2} \times 10 BO,$$

$$\therefore BO = \frac{24}{5},$$

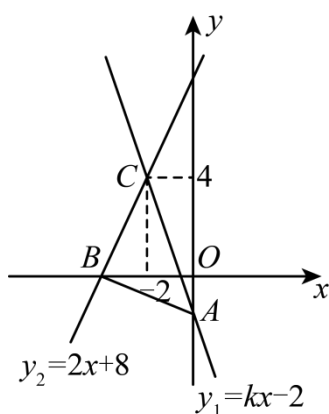
$$\therefore FO = \sqrt{BF^2 - BO^2} = \frac{18}{5},$$

$$\therefore EO = FO,$$

$$\therefore EF = 2FO = \frac{36}{5},$$

$$\therefore AE = AF - EF = \frac{14}{5}.$$

24. 如图, 直线 $y_1 = kx - 2$ ($k \neq 0$) 与 y 轴交于点 A , 直线 $y_2 = 2x + 8$ 与 x 轴交于点 B , 直线 y_1 与直线 y_2 交于点 $C(-2, 4)$, 连接 AB .



(1) 方程组 $\begin{cases} kx - y = 2 \\ 2x - y = -8 \end{cases}$ 的解是_____;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(3) 若在 x 轴上存在点 P (点 B 与点 P 不重合), 使得 $\triangle PAC$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等, 请直接写出点 P 的坐标.

【答案】 (1) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$

(2) 10 (3) $P\left(\frac{8}{3}, 0\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的几何应用, 熟练掌握待定系数法和一次函数的性质是解题关键.

(1) 根据直线 y_1 与直线 y_2 的交点坐标即可得;

(2) 设直线 y_2 与 y 轴的交点为点 D , 先利用待定系数法求出 $y_1 = -3x - 2$, 再分别求出点 A, B, D 的坐标, 然后根据 $\triangle ABC$ 的面积等于 $S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ACD}$ 求解即可得;

(3) 设直线 y_1 与 x 轴的交点为点 E , 先求出点 E 的坐标, 从而可得 PE , 再根据 $\triangle PAC$ 的面积等于 $S_{\triangle APE} + S_{\triangle CPE}$ 建立方程, 解方程即可得.

【小问 1 详解】

解: 方程组 $\begin{cases} kx - y = 2 \\ 2x - y = -8 \end{cases}$ 可转化为 $\begin{cases} y = kx - 2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$,

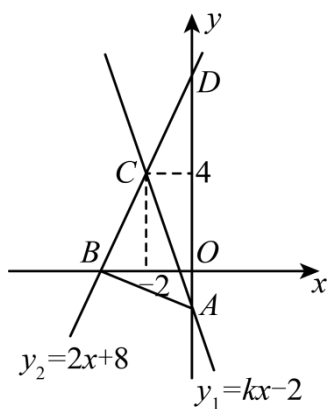
所以这个方程组的解为直线 y_1 与直线 y_2 的交点 $C(-2, 4)$ 的横坐标、纵坐标,

即方程组 $\begin{cases} kx - y = 2 \\ 2x - y = -8 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$,

故答案为: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$.

【小问 2 详解】

解: 如图, 设直线 y_2 与 y 轴的交点为点 D ,



将点 $C(-2, 4)$ 代入 $y_1 = kx - 2 (k \neq 0)$ 得: $-2k - 2 = 4$, 解得 $k = -3$,

$$\therefore y_1 = -3x - 2,$$

当 $x = 0$ 时, $y_1 = -2$, 即 $A(0, -2)$,

当 $x = 0$ 时, $y_2 = 8$, 即 $D(0, 8)$,

当 $y_2 = 0$ 时, $2x + 8 = 0$, 解得 $x = -4$, 即 $B(-4, 0)$,

$$\therefore AD = 8 - (-2) = 10, OB = 4,$$

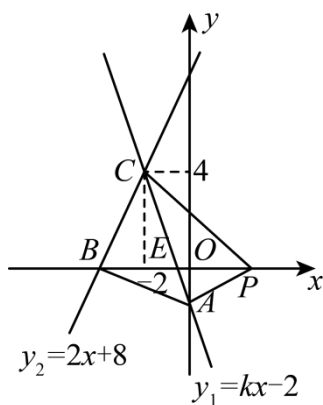
$$\therefore C(-2, 4),$$

$\therefore \triangle ACD$ 的 AD 边上的高为 $|-2| = 2$,

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积为 } S_{ABD} - S_{ACD} = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 - \frac{1}{2} \times 10 \times 2 = 10.$$

【小问 3 详解】

解: 如图, 设直线 y_1 与 x 轴的交点为点 E ,



由 (2) 已得: $y_1 = -3x - 2$,

当 $y_1 = 0$ 时, $-3x - 2 = 0$, 解得 $x = -\frac{2}{3}$, 即 $E\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$,

设点 P 的坐标为 $P(m, 0)$, 则 $PE = \left|m - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \left|m + \frac{2}{3}\right|$,

$\therefore A(0, -2), C(-2, 4)$,

$\therefore APE$ 的 PE 边上的高为 $|-2| = 2$, $\triangle CPE$ 的 PE 边上的高为 $|4| = 4$,

$\therefore \triangle PAC$ 的面积与 ABC 的面积相等, 且 ABC 的面积为 10,

$$\therefore S_{\triangle APE} + S_{\triangle CPE} = \frac{1}{2} \times 2 \left|m + \frac{2}{3}\right| + \frac{1}{2} \times 4 \left|m + \frac{2}{3}\right| = 10,$$

解得 $m = \frac{8}{3}$ 或 $m = -4$ (此时点 P 与点 B 重合, 不符合题意, 舍去),

所以点 P 得坐标为 $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$.

拓展部分 (共 50 分)

一、填空题 (每题 4 分, 共 36 分)

25. 正多边形的一个内角是 135° , 则这个多边形的对角线总数为_____.

【答案】 20

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形的外角与内角和对角线条数, 解题关键是掌握任意多边形的外角和都等于 360° .

先求出正多边形的一个外角度数, 再根据多边形的外角和等于 360° , 即可求出这个多边形的边数, 根据对角线条数公式即可求出对角线总数.

【详解】 解: $\because$ 正多边形的一个内角是 135° ,

$\therefore$ 正多边形的一个外角是 $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$,

$\therefore$ 多边形的外角和等于 360° ,

$\therefore$ 这个多边形的边数是 $360^\circ \div 45^\circ = 8$,

$$\therefore \text{对角线总数为 } \frac{8 \times (8 - 3)}{2} = 20$$

故答案为: 20.

26. 直线 $y = kx + 4$ 与坐标轴围成的三角形面积为 8, 则 $k =$ _____.

【答案】 ± 1

【解析】

【分析】 此题考查了一次函数与坐标轴的交点问题，分别取 $x=0$ 和 $y=0$ 求出函数 $y=kx+4$ 与 x 、 y 轴的交点，根据与坐标轴围成的三角形面积列方程并解方程即可.

【详解】 解：当 $x=0$ 时， $y=4$

当 $y=0$ 时， $0=kx+4$ ， 解答 $x=-\frac{4}{k}$ ，

$\therefore$ 函数 $y=kx+4$ 与 x 、 y 轴的交点分别为 $(-\frac{4}{k}, 0)$ 、 $(0, 4)$ ，

根据题意得

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \left| -\frac{4}{k} \right| = 8,$$

解得 $k = \pm 1$

故答案为： ± 1

27. 方程 $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 4$ ， $x_2 = 12$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，先把无理方程转化为有理方程，再解出有理方程，最后检验即可得答案.

【详解】 解： $\because \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$ ，

$$\therefore \sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3},$$

$$\therefore 2x+1 = 4 + 4\sqrt{x-3} + x-3,$$

$$\therefore \sqrt{x-3} = \frac{x}{4},$$

$$\therefore x-3 = \frac{x^2}{16},$$

解得 $x_1 = 4$ ， $x_2 = 12$ ，

经检验， $x_1 = 4$ ， $x_2 = 12$ 是原方程的解，

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1 = 4$ ， $x_2 = 12$ ，

故答案为： $x_1 = 4$ ， $x_2 = 12$.

28. 若直线 $y = (m^2 - 4)x + 3$ 与 $y = (m + 2)x - 5$ 平行, 则 $m =$ _____.

【答案】3 或 -2

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数图象的平移问题, 根据坐标系中若两一次函数所在的直线平行, 那么这个一次函数的一次项系数相同进行求解即可.

【详解】解: $\because$ 直线 $y = (m^2 - 4)x + 3$ 与 $y = (m + 2)x - 5$ 平行,

$$\therefore m^2 - 4 = m + 2,$$

$$\therefore m = 3 \text{ 或 } m = -2,$$

故答案为: 3 或 -2.

29. 分式方程 $\frac{2n-1}{3x-2} = 4$ 的解不大于 1, 则 n 的取值范围是_____.

【答案】 $n \leq \frac{5}{2}$ 且 $n \neq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查了解分式方程, 解一元一次不等式, 解题的关键是掌握解分式方程的方法和步骤, 以及分式有意义的条件: 分母不为 0.

先将方程两边都乘以 $(3x - 2)$, 将分式方程化为整式方程, 再根据分式有意义的条件得出 $x \neq \frac{2}{3}$, 以及该分式方程的解不大于 1, 列出不等式, 即可求解.

【详解】解: 两边都乘以 $(3x - 2)$, 得 $2n - 1 = 4(3x - 2)$,

移项, 得: $2n - 1 = 12x - 8$,

合并同类项, 得: $12x = 2n + 7$,

化系数为 1, 得: $x = \frac{2n + 7}{12}$,

$$\therefore x \neq \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{2n + 7}{12} \neq \frac{2}{3}, \text{ 解得: } n \neq \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 该分式方程的解不大于 1,

$$\therefore \frac{2n + 7}{12} \leq 1, \text{ 解得: } n \leq \frac{5}{2},$$

综上: a 的取值范围是 $n \leq \frac{5}{2}$ 且 $n \neq \frac{1}{2}$.

故答案为: $n \leq \frac{5}{2}$ 且 $n \neq \frac{1}{2}$.

30. 已知关于 x 的方程 $\frac{mx-1}{x+1} = 2$ 无解, 则 m 的值为_____.

【答案】 2 或 -1

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 根据分式方程的解的情况求参数, 先解分式方程得出 $(m-2)x = 3$, 再由分式方程无解得出当整式方程无解时, $m-2=0$; 当整式方程的解为分式方程的增根时, $x=-1$, 即

$$\frac{3}{m-2} = -1, \text{ 分别求解即可得出答案.}$$

【详解】 解: 去分母得: $mx-1=2(x+1)$,

去括号得: $mx-1=2x+2$,

移项得: $mx-2x=2+1$,

合并同类项得: $(m-2)x=3$,

$\because$ 关于 x 的方程 $\frac{mx-1}{x+1} = 2$ 无解,

$\therefore$ 当整式方程无解时, $m-2=0$, 解得 $m=2$,

当整式方程的解 $x = \frac{3}{m-2}$ 为分式方程的增根时, $x=-1$, 即 $\frac{3}{m-2} = -1$, 解得 $m=-1$;

综上所述, m 的值为 2 或 -1,

故答案为: 2 或 -1.

31. 直角三角形的斜边 AB 在 x 轴的正半轴上, 点 A 与原点重合, 点 B 的坐标是 $(6,0)$ 且 $\angle BAC = 45^\circ$, 若将 $\triangle ABC$ 绕着点 O 旋转 90° , 点 B 和 C 点分别落在点 E 和点 F 处, 那么直线 EF 的解析式是_____.

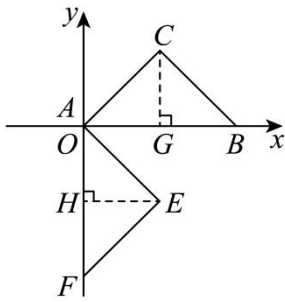
【答案】 $y = x - 6$ 或 $y = x + 6$ 或 $y = -x - 6$ 或 $y = -x + 6$

【解析】

【分析】 分点 C 在第一象限和第四象限讨论, 然后每种情况分顺时针和逆时针旋转讨论, 根据等腰直角三角形的判定与性质, 旋转的性质, 全等三角形的判定与性质等求出点 E 、 F 的坐标, 然后根据待定系数法求解即可.

【详解】 解: 当点 C 在第一象限时,

若按顺时针旋转, 如图, 过 C 作 $CG \perp OB$ 于 G , 过 E 作 $EH \perp OF$ 于 H ,



$\therefore \angle BAC = 45^\circ$, $\triangle ABC$ 是直角三角形,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,

$\therefore OG = BG$

$\therefore A、O$ 重合, $B(6,0)$,

$\therefore OB = AB = 6$,

$\therefore OG = BG = AG = \frac{1}{2}OB = 3$,

$\therefore \triangle ABC$ 绕着点 O 旋转 90° , 点 B 和 C 点分别落在点 E 和点 F 处,

$\therefore OF = OB = 6$, $OC = OE$, $\angle BOF = \angle COE = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 F 在 y 的负半轴上,

$\therefore F(0,-6)$,

又 $\angle BOF = 90^\circ$,

$\therefore \angle EOH = \angle COG$,

又 $\angle CGO = \angle EHO = 90^\circ$,

$\therefore \triangle EOH \cong \triangle COG$,

$\therefore EH = CG = 3$, $OH = OG = 3$,

$\therefore E(3,-3)$,

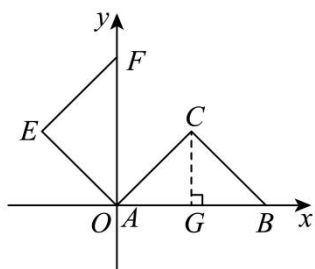
设直线 EF 解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} 3k + b = -3 \\ b = -6 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = -6 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 EF 解析式为 $y = x - 6$,

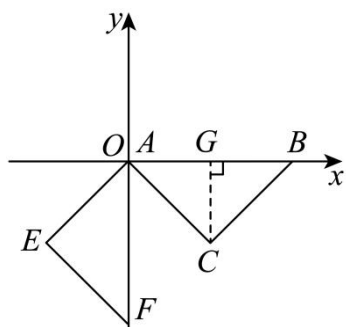
若按照逆时针旋转, 如图



同理可求 $E(-3,3)$, $F(0,6)$, 直线 EF 解析式为 $y = x + 6$;

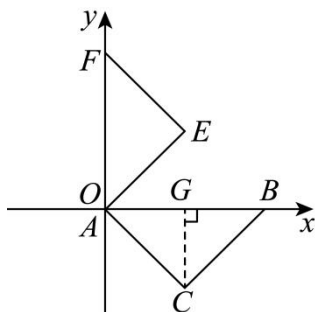
当点 C 在第四象限时,

若按顺时针旋转, 如图,



同理可求 $E(-3,-3)$, $F(0,-6)$, 直线 EF 解析式为 $y = -x - 6$;

若按逆时针旋转, 如图,



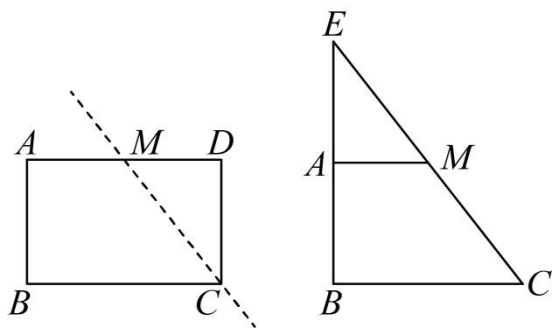
同理可求 $E(-3,3)$, $F(0,6)$, 直线 EF 解析式为 $y = -x + 6$;

综上, 直线 EF 解析式为 $y = x - 6$ 或 $y = x + 6$ 或 $y = -x - 6$ 或 $y = -x + 6$.

故答案为: $y = x - 6$ 或 $y = x + 6$ 或 $y = -x - 6$ 或 $y = -x + 6$.

【点睛】 本题考查了等腰直角三角形的判定与性质, 旋转的性质, 全等三角形的判定与性质, 待定系数法求一次函数解析式等知识, 明确题意, 灵活应用以上知识, 合理分类讨论是解题的关键.

32. 如图矩形纸片 $ABCD$, M 为 AD 中点, 将纸片沿着直线 CM 剪成两部分, 这两部分纸片重新拼成 $\text{Rt}\triangle EBC$, 如果 $\text{Rt}\triangle EBC$ 为等腰直角三角形, 矩形 $ABCD$ 的长宽恰好是 $x^2 - (m-1)x + m+1 = 0$ 的两个实数根, 则矩形纸片 $ABCD$ 的面积是_____.



【答案】8

【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质，等腰直角三角形的性质，一元二次方程根与系数的关系等知识，先根据矩形的性质，等腰直角三角形的性质等得出 $BC = 2AB$ ，然后根据一元二次方程根与系数的关系得出 $BC + AB = m - 1$ ， $BC \cdot AB = m + 1$ ，化简可 $2AB^2 - 3AB = 2$ ，解方程即可求解.

【详解】解：∵ 矩形纸片 $ABCD$ ， M 为 AD 中点，将纸片沿着直线 CM 剪成两部分，这两部分纸片重新拼成 $\text{Rt}\triangle EBC$ ，

$$\therefore AM = DM, AB = CD = AE,$$

∵ $\text{Rt}\triangle EBC$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore BE = BC,$$

$$\therefore BC = 2AB,$$

∵ 矩形 $ABCD$ 的长宽恰好是 $x^2 - (m-1)x + m+1 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore BC + AB = m - 1, BC \cdot AB = m + 1,$$

$$\therefore 3AB = m - 1, 2AB^2 = m + 1,$$

$$\therefore 2AB^2 - 3AB = 2,$$

解得 $AB = 2$ 或 $AB = -\frac{1}{2}$ (负值舍去)，

$$\therefore BC = 4,$$

∴ 矩形纸片 $ABCD$ 的面积是 $2 \times 4 = 8$ ，

故答案为：8.

33. 在平面直角坐标系 xOy 中，给出以下定义：对于 x 轴正半轴上的点 $M(a, 0)$ 与 y 轴正半轴上的点 $P(0, b)$ ，如果坐标平面内存在一点 N ，使得 $\angle MPN = 90^\circ$ ，且 $MP = NP$ ，那么称点 N 为 M 关于 P 的“垂转点”. 例如如图 1，已知点 $M(1, 0)$ 和点 $P(0, 1)$ ，以 MP 为腰作等腰直角三角形 MPN ，可以得到 M 关于 P 的其中一个垂转点 $N(-1, 0)$. 如图 2，如果 $M(2, 0)$ 关于 y 轴上一点 P 的垂转点 N 在一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象上，那

么垂转点 N 的坐标为_____.

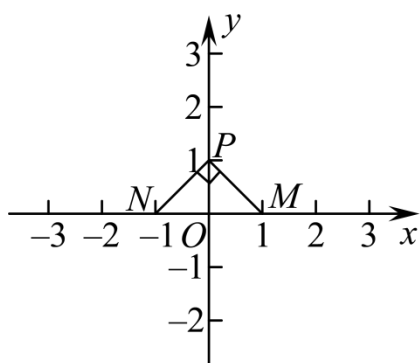


图1

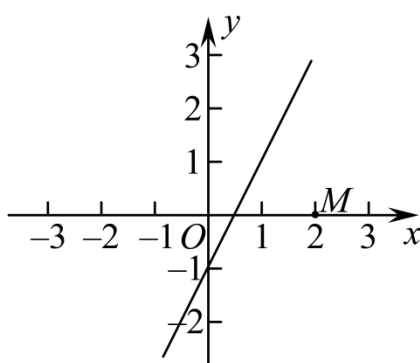


图2

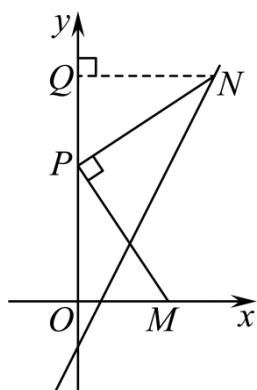
【答案】 $N(3,5)$ 或 $N\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质与判定，旋转的性质，坐标与图形，一次函数的性质；分两种情况讨论，将 PM ，分别绕点 P 顺时针和逆时针旋转 90° ，点 N 在 $y = 2x - 1$ 上，进而根据全等三角形的性质求得点 N 的坐标，即可求解.

【详解】 解： 如图所示，将 PM 绕点 P 逆时针旋转 90° ， N 点在 $y = 2x - 1$ 上时，

过点 N 作 $NQ \perp y$ 轴于点 Q ，



依题意， $PM = PN, \angle MPN = 90^\circ$

又 $\angle POM = \angle NQP = 90^\circ$

$\therefore \angle QPN = 90^\circ - \angle OPM = \angle OMP$

$\therefore \triangle QPN \cong \triangle OMP$

$\therefore OM = QP, QN = OP$

$\therefore M(2,0)$, 则 $OP = OM = 2$

设 $P(0, p)$, 则 $Q(0, p+2)$,

$\therefore N(p, p+2)$

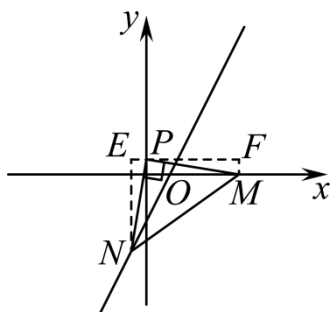
又 $\because N$ 在 $y = 2x - 1$ 上,

$\therefore p + 2 = 2p - 1$

解得: $p = 3$

$\therefore N(3, 5)$;

如图所示, 将 PM 绕点 P 顺时针旋转 90° , N 点在 $y = 2x - 1$ 上时,



同理可得 $EN = PF = OM = 2$, $FM = OP = p$

$\therefore N(-p, p-2)$

又 $\because N$ 在 $y = 2x - 1$ 上,

$\therefore p - 2 = -2p - 1$

解得: $p = -\frac{1}{3}$

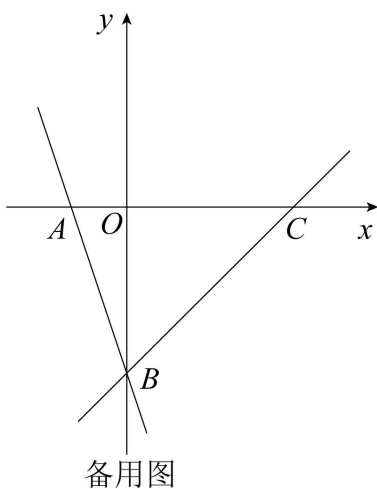
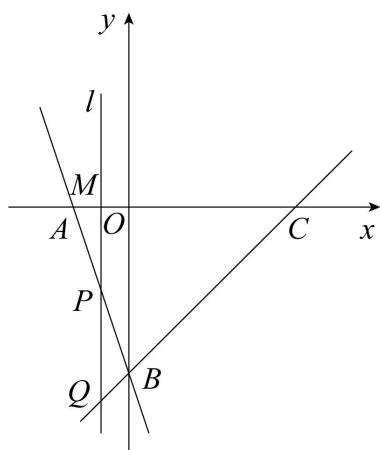
$\therefore N\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

综上所述, $N(3, 5)$ 或 $N\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

故答案为: $N(3, 5)$ 或 $N\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

二、解答题 (14 分)

34. 如图, 一次函数 $y = -3x + b$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 与 y 轴交于点 B , 点 $C(3, 0)$, 点 M 是线段 AC 上的任意一点, 过点 M 作直线 $l \parallel y$ 轴, 直线 l 交直线 AB 于点 P , 交直线 BC 于点 Q .



- (1) 求直线 BC 的函数表达式;
- (2) 当 $PQ = 2$ 时, 求 $\triangle PQC$ 的面积;
- (3) 连接 BM , 若 $\angle MBQ = \angle OBA$, 求点 Q 的坐标.

【答案】 (1) $y = x - 3$

(2) $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{7}{2}$

(3) $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

【解析】

【分析】 (1) 把 $A(-1, 0)$ 代入 $y = -3x + b$, 求出直线 AB 的关系式, 再求出点 $B(0, -3)$, 然后根据待定系数法求出直线 BC 的关系式;

(2) 先设点 $M(m, 0)$, 可表示 $P(m, -3m - 3), Q(m, m - 3)$, 再根据纵坐标的差表示 PQ , 然后根据 $PQ = 2$, 求出 m 的值, 接下来分两种情况求出 CM , 即可得出面积;

(3) 过点 A 作 $AH \perp BM$ 于点 H , 过点 H 作 $KT \perp x$ 轴于点 K , 过点 B 作 $BT \perp KT$ 于点 T , 先说明 $\triangle ABH$ 是等腰直角三角形, 接下来证明 $\triangle AKH \cong \triangle HTB$, 即可得出点 $H(1, -1)$, 再求出直线 BM 的关系式, 然后得出点 $M(\frac{3}{2}, 0)$, 进而得出答案.

【小问 1 详解】

解: 把 $A(-1, 0)$ 代入 $y = -3x + b$, 得

$$0 = 3 + b,$$

解得 $b = -3$,

$\therefore$ 直线 AB 的关系式为 $y = -3x - 3$.

当 $x = 0$ 时, $y = -3$,

$\therefore$ 点 $B(0, -3)$.

将点 $B(0, -3)$ 和点 $C(3, 0)$ 代入直线 BC 的关系式 $y = kx + b_1$, 得

$$\begin{cases} b_1 = -3 \\ 3k + b_1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b_1 = -3 \end{cases},$$

所以直线 BC 的关系式 $y = x - 3$;

【小问 2 详解】

解: 设 $M(m, 0)$, 则 $P(m, -3m - 3), Q(m, m - 3)$,

$$\therefore PQ = |m - 3 - (-3m - 3)| = |4m|.$$

$$\because PQ = 2,$$

$$\therefore |4m| = 2,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{2} \text{ 或 } m = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{当 } m = \frac{1}{2} \text{ 时, } M(\frac{1}{2}, 0),$$

$$\therefore CM = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

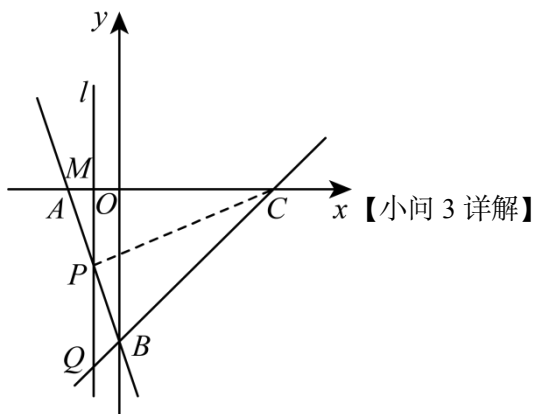
$$\therefore S_{\triangle PQC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2};$$

$$\text{当 } m = -\frac{1}{2} \text{ 时, } M(-\frac{1}{2}, 0),$$

$$\therefore CM = 3 - (-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle PQC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{7}{2} = \frac{7}{2}.$$

综上所述, $\triangle PQC$ 的面积是 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{7}{2}$;



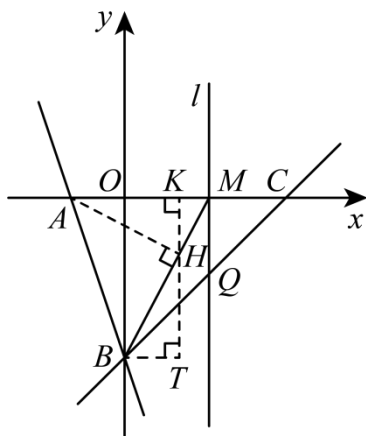
当 $y=0$ 时, $x=\frac{3}{2}$,

$\therefore M(\frac{3}{2}, 0)$.

在 $y=x-3$ 中, 当 $x=\frac{3}{2}$ 时, $y=-\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 点 $Q(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$;

综上所述, 点 Q 的坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.



【点睛】 本题主要考查了待定系数法求直线关系式, 一次函数与几何图形, 全等三角形的性质和判定, 等腰三角形的性质和判定, 作出辅助线构造全等三角形是解题的关键.