

市西初级中学 2024 学年第二学期期中初二年级数学试卷

(考试时间: 100 分钟, 满分: 120 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列说法正确的是 ()

A. $x^2 + y = \sqrt{2}$ 是二元二次方程

B. $x^2 - x = 0$ 是二项方程

C. $\frac{x^2 + x}{3} = 2$ 是分式方程

D. $\frac{x^2 + x}{x} = \sqrt{2}$ 是无理方程

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了无理方程、高次方程、分式方程、二项方程的定义, 解题的关键是熟悉这些方程的定义. 利用无理方程、高次方程、分式方程、二项方程的定义分别进行判断即可得到答案.

【详解】 解: A、含有两个未知数, 且未知数的最高次数是 2, 故是二元二次方程, 故正确;

B、 $x^2 - x = 0$ 是二次方程, 不是二项方程, 故错误;

C、分母里不含未知数, 不是分式方程, 故错误;

D、被开方数不含未知数, 不是无理方程, 故错误,

故选: A.

2. 一次函数 $y = -x - 1$ 不经过的象限是 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】 A

【解析】

【分析】 由 $k = -1 < 0$, $b = -1$, 由此可以确定函数的图象经过的象限.

【详解】 $\because y = -x - 1$,

$$\therefore k = -1 < 0, \quad b = -1 < 0,$$

$\therefore$ 它的图象经过的象限是第二、三、四象限, 不经过第一象限.

故选 A.

【点睛】 本题考查判断一次函数经过的象限. 掌握 $y = kx + b (k \neq 0)$ 图象的四种情况: ①当 $k > 0, b > 0$, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、三象限; ②当 $k > 0, b < 0$, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、三、四象限; ③当 $k < 0, b > 0$ 时, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、四象限; ④当 $k < 0, b < 0$ 时, 函数 $y = kx + b$ 的图象经过第二、三、四象限是解题关键.

3. 下列二元二次方程中, 没有实数解的方程是 ()

A. $x^2 + (y-1)^2 = 0$

B. $x^2 - (y-1)^2 = 0$

C. $x^2 + (y-1)^2 = -1$

D. $x^2 - (y-1)^2 = -1$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了解二元二次方程. 通过解方程得解即可判断.

【详解】解: A、原方程变形为 $x^2 = (y-1)^2 = 0$, 得 $x=0, y=1$, 方程有实数根, 本选项不合题意;

B、原方程变形为 $x^2 = (y-1)^2$, 可推出 $x=0, y=1$, 另外还有 $x=y-1$ 或 $x=1-y$, 方程有实数根, 故本选项错误,

C、原方程变形为 $x^2 = -(y-1)^2 - 1$, 等式不成立, 本方程无解, 故本选项正确,

D、原方程变形为 $x^2 = (y-1)^2 - 1$ 其中一组解为 $x=0, y=0$, 方程有实数根, 故本选项错误,

故选: C.

4. 点 P 、点 Q 是一次函数 $y = -2x + b$ (b 为常数) 图像上的两个点, 下列选项中不可能的是 ()

A. $P(-2, 3)$ 、 $Q(-1, 1)$

B. $P(2, -3)$ 、 $Q(1, -1)$

C. $P(2, -3)$ 、 $Q(-1, 3)$

D. $P(-2, 3)$ 、 $Q(-1, -1)$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图像上点的坐标特征, 熟练掌握知识点是解题的关键.

分别将各选项点 P 代入 $y = -2x + b$ 求出函数解析式, 检验点 Q 是否也在图像上即可.

【详解】解: A、将 $P(-2, 3)$ 代入 $y = -2x + b$ 得, $4 + b = 3$, 解得: $b = -1$, 将 $Q(-1, 1)$ 代入 $y = -2x - 1$ 得 $(-2) \times (-1) - 1 = 1$, 故 P, Q 在直线 $y = -2x + b$ 上, 不符合题意;

B、将 $P(2, -3)$ 代入 $y = -2x + b$ 得, $-4 + b = -3$, 解得: $b = 1$, 将 $Q(1, -1)$ 代入 $y = -2x + 1$ 得 $(-2) \times 1 + 1 = -1$, 故 P, Q 在直线 $y = -2x + b$ 上, 不符合题意;

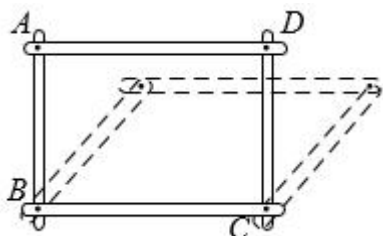
C、将 $P(2, -3)$ 代入 $y = -2x + b$ 得, $-4 + b = -3$, 解得: $b = 1$, 将 $Q(-1, 3)$ 代入 $y = -2x + 1$ 得 $(-2) \times (-1) + 1 = 3$, 故 P, Q 在直线 $y = -2x + b$ 上, 不符合题意;

D、将 $P(-2, 3)$ 代入 $y = -2x + b$ 得, $4 + b = 3$, 解得: $b = -1$, 将 $Q(-1, -1)$ 代入 $y = -2x - 1$ 得

$(-2) \times (-1) - 1 = 1 \neq -1$, 故不能保证 P, Q 同时在直线 $y = -2x + b$ 上, 故符合题意,

故选: D.

5. 如图, 为了体验四边形的不稳定性, 将四根木条用钉子钉成一个矩形框架 $ABCD$, 然后向右拉动框架, 给出如下的判断: ①四边形 $ABCD$ 为平行四边形; ②对角线 BD 的长度不变; ③四边形 $ABCD$ 的面积不变; ④四边形 $ABCD$ 的周长不变, 其中所有正确的结论是 ()



- A. ①② B. ①④ C. ①②④ D. ①③④

【答案】B

【解析】

【分析】①正确, 根据平行四边形的判定方法即可判断;

②错误, 观察图象即可判断;

③错误, 面积是变小了;

④正确, 根据平行四边形性质即可判断.

【详解】解: $\because$ 两组对边的长度分别相等,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故①正确;

$\because$ 向右扭动框架,

$\therefore BD$ 的长度变大, 故②错误;

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的底不变, 高变小了,

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的面积变小, 故③错误;

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的四条边不变,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长不变, 故④正确.

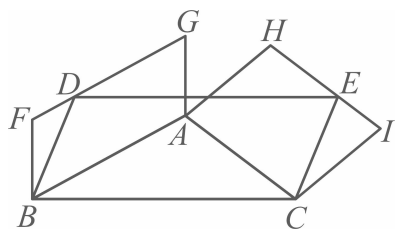
故所有正确的结论是①④.

故选: B.

【点睛】本题考查平行四边形的判定和性质、平行四边形的周长、面积等知识, 解题的关键是熟练应用这些知识解决问题.

6. 如图, 分别以 $\triangle ABC$ 的三边为一边作平行四边形 $BCED$, 平行四边形 $ABFG$, 平行四边形 $ACIH$, 且点 D, E 分别在 FG, HI 上. 若平行四边形 $ABFG$, 平行四边形 $ACIH$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 则平行四边

形 $BCED$ 的面积为 ()



- A. $S_1 + S_2$ B. $\frac{S_1 + S_2}{2}$ C. $\sqrt{S_1 S_2}$ D. $\frac{2S_1 S_2}{S_1 + S_2}$

【答案】 A

【解析】

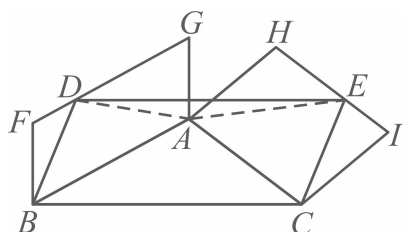
【分析】 本题考查平行四边形的性质，连接 AD, AE ，根据平行四边形的性质可得

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\square ABFG}, S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} S_{\square ACIH}, \text{ 由点 } A \text{ 在平行四边形 } BCED \text{ 内, 求出}$$

$$S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\square BCED} = \frac{1}{2} (S_{\square ABFG} + S_{\square ACIH}), \text{ 进而求出}$$

$$S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} S_{\square BCED} = \frac{1}{2} (S_{\square ABFG} + S_{\square ACIH}), \text{ 即可解答.}$$

【详解】 解：连接 AD, AE ，



$\because$ 平行四边形 $ABFG$ ，平行四边形 $ACIH$ ，且点 D, E 分别在 FG, HI 上，

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\square ABFG}, S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} S_{\square ACIH},$$

$\because$ 点 A 在平行四边形 $BCED$ 内，

$$\therefore S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\square BCED} = \frac{1}{2} S_{\square ABFG} + \frac{1}{2} S_{\square ACIH} = \frac{1}{2} (S_{\square ABFG} + S_{\square ACIH}),$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACE} = S_{\square BCED} - (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADE}) = \frac{1}{2} S_{\square BCED} = \frac{1}{2} (S_{\square ABFG} + S_{\square ACIH}),$$

$\because$ 平行四边形 $ABFG$ ，平行四边形 $ACIH$ 的面积分别为 S_1, S_2 ，

$$\therefore S_{\square BCED} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACE} + S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADE} = S_{\square ABFG} + S_{\square ACIH} = S_1 + S_2,$$

故选：A.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 共 36 分)

7. 函数 $y = x + 1$ 的截距是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数的性质, 熟知一次函数与坐标轴交点的特点是解题的关键. 令 $x = 0$, 求出 y 的值即可得出结论.

【详解】 解: $\because$ 令 $x = 0$, 则 $y = 1$;

$\therefore$ 一次函数 $y = x + 1$ 的截距是 1.

故答案为: 1.

8. 方程 $x^3 + 8 = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】 根据等式的性质以及立方根的意义求解即可.

【详解】 移项, 得 $x^3 = -8$,

$$\therefore (-2)^3 = -8,$$

$$\therefore x = -2,$$

故答案为: $x = -2$.

【点睛】 本题考查了立方根和等式的基本性质, 熟练掌握立方根的意义是解决问题的前提.

9. 方程 $\sqrt{x + 5} = 2$ 的实数解是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程, 两边平方得: $x + 5 = 4$, 即可解答.

【详解】 解: 方程两边平方得: $x + 5 = 4$,

解得: $x = -1$,

当 $x = -1$ 时, $x + 5 = -1 + 5 = 4 > 0$, 符合题意;

故答案为: -1.

10. 正八边形的外角和是_____.

【答案】 360° ## 360 度

【解析】

【分析】 本题考查多边形的外角和. 根据任意多边形的外角和都是 360° 即可.

【详解】 解: $\because$ 任意多边形的外角和都是 360°

$\therefore$ 正八边形的外角和是 360° .

故答案为: 360° .

11. 过六边形的一个顶点有_____条对角线.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查多边形的对角线问题, 根据从 n 边形的一个顶点出发, 可以引出 $(n-3)$ 条对角线, 进行求解即可.

【详解】 解: 过正六边形的一个顶点有 $6-3=3$ 条对角线;

故答案为: 3.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A$ 是 $\angle B$ 的 2 倍, 那么 $\angle A =$ _____.

【答案】 120° ## 120 度

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质, 掌握对边平行是解题的关键.

根据平行四边形对边平行得到 $\angle A + \angle B = 180^\circ$, 再由 $\angle A = 2\angle B$ 即可求解.

【详解】 解: $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\because \angle A = 2\angle B,$$

$$\therefore 3\angle B = 180^\circ,$$

解得: $\angle B = 60^\circ$,

$$\therefore \angle A = 120^\circ,$$

故答案为: 120° .

13. 已知方程 $\frac{x}{3x^2-1} + \frac{3x^2-1}{x} = 4$, 如果设 $\frac{3x^2-1}{x} = y$, 那么原方程可以变形为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 4y + 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了解可化为一元二次方程的分式方程，掌握换元法是解题关键.

设 $\frac{3x^2-1}{x} = y$ ，则 $\frac{3x^2-1}{x} = \frac{1}{y}$ ，则原方程化为： $y + \frac{1}{y} = 4$ ，再去分母即可.

【详解】 解：设 $\frac{3x^2-1}{x} = y$ ，则 $\frac{3x^2-1}{x} = \frac{1}{y}$ ，

$\therefore$ 原方程化为： $y + \frac{1}{y} = 4$ ，

去分母得： $y^2 - 4y + 1 = 0$ ，

故答案为： $y^2 - 4y + 1 = 0$.

14. 如果关于 x 的无理方程 $\sqrt{x+1} = 1+m$ 没有实数解，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < -1$

【解析】

【分析】 本题考查无理方程，解题的关键是明确无理方程的解答方法，无实数根应满足什么条件.

根据 $\sqrt{x+1} \geq 0$ ，则得到 $1+m < 0$ 时，无理方程 $\sqrt{x+1} = 1+m$ 没有实数解，再解不等式即可.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的无理方程 $\sqrt{x+1} = 1+m$ 没有实数解，

$\therefore 1+m < 0$ ，

解得： $m < -1$ ，

故答案为： $m < -1$.

15. 如果函数 $y = (m-2)x + m-1$ 的图像经过第一、二象限，那么常数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 1$

【解析】

【分析】 本题考查了根据一次函数经过的象限求参数范围，注意分类讨论是解题的关键.

分两种情况讨论，当 $m-2=0$ ，为常值函数，符合题意；当 $m-2 \neq 0$ 时，根据一次函数图象经过的象限确定 k, b 的取值范围，进而得到不等式组，求解即可.

【详解】 解：①当 $m-2=0$ ，则 $m=2$ ，

$\therefore y=1$ ，符合题意；

②当 $m-2 \neq 0$ 时，由题意得 $\begin{cases} m-2 < 0 \\ m-1 > 0 \end{cases}$ ，

解得: $1 < m < 2$,

③当 $m - 2 \neq 0$ 时, 由题意得 $\begin{cases} m - 2 > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases}$,

解得: $m > 2$,

综上: 常数 m 的取值范围是 $m > 1$,

故答案为: $m > 1$.

16. 已知一次函数 $y = kx + b$, y 随 x 的增大而减小, 点 $P(-1, -2)$ 在函数图像上, 那么关于 x 的不等式 $kx + b + 2 > 0$ 的解集是_____.

【答案】 $x < -1$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与一元一次不等式的关系: 从函数的角度看, 就是寻求使一次函数 $y = ax + b$ 的值大于 (或小于) 0 的自变量 x 的取值范围; 从函数图象的角度看, 就是确定直线 $y = kx + b$ 在 x 轴上 (或下) 方部分所有的点的横坐标所构成的解集. 根据题意可得 $k < 0$, 进行讨论可得关于 x 的不等式 $kx + b + 2 > 0$ 的解集.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = kx + b$, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore k < 0$,

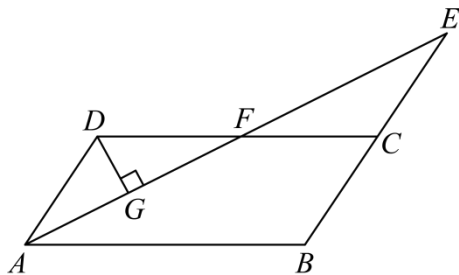
$\because$ 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象过点 $(-1, -2)$,

$\therefore$ 当 $x < -1$ 时, $y = kx + b$ 的图像在直线 $y = -2$ 上方,

$\therefore$ 关于 x 的不等式 $kx + b > -2$, 即 $kx + b + 2 > 0$ 的解集是 $x < -1$.

故答案为: $x < -1$.

17. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $\angle BAD$ 的平分线与 BC 的延长线交于点 E , 与 DC 交于点 F , 且点 F 为边 DC 的中点, $DG \perp AE$, 垂足为 G , 若 $DG = 1$, 则 AE 的边长为_____.



【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】由“ASA”可证 $\triangle ADF \cong \triangle ECF$ ，可得 $AF = EF$ ，由平行线的性质和角平分线的性质可得 $AD = DF$ ，由等腰三角形的性质和勾股定理可求 $AG = GF = \sqrt{3}$ ，即可求解。

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, AB = CD = 4, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle ECF,$$

$\because$ 点 F 为边 DC 的中点，

$$\therefore DF = CF = 2,$$

$$\text{又} \because \angle DFA = \angle CFE,$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ECF (\text{ASA}),$$

$$\therefore AF = EF,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DFA = \angle FAB,$$

$$\because AF \text{ 平分 } \angle DAB,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle FAB,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle DFA,$$

$$\therefore AD = DF = 2,$$

$$\text{又} \because DG \perp AF,$$

$$\therefore AG = GF,$$

$$\because GF = \sqrt{DF^2 - DG^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore AG = GF = \sqrt{3},$$

$$\therefore AF = EF = 2\sqrt{3},$$

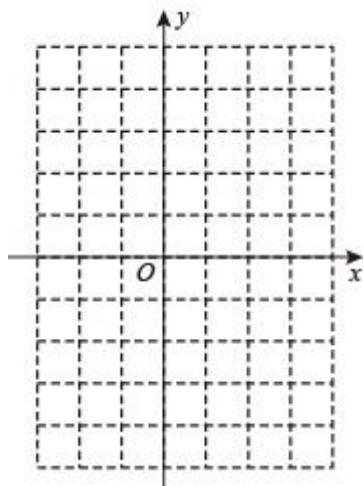
$$\therefore AE = 4\sqrt{3},$$

故答案为： $4\sqrt{3}$ 。

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，等腰三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理等知识，灵活运用这些性质进行推理是本题的关键。

18. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，我们把横、纵坐标都是整数的点称为“整点”。已知点 A 的坐标为 $(-2, 1)$ ，点 B 的坐标为 $(3, 1)$ ， P 是 y 轴上一点，连接 AP, BP, OA, OB 。现设直线 AP 的函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，

记线段 AP , BP , OA , OB 所围成的封闭区域 (不含边界) 为 W , 若区域 W 内的整点个数为 6, 则 k 的取值范围是_____.

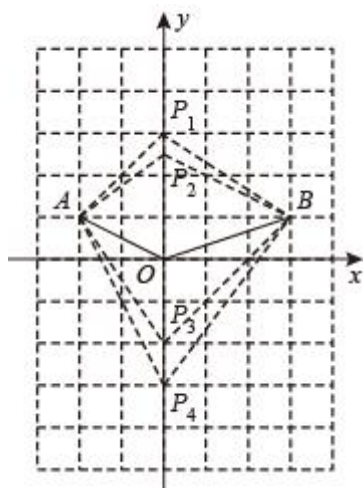


【答案】 $\frac{3}{4} < k \leq 1$ 或 $-2 \leq k < -\frac{3}{2}$ 或 $-2 \leq k < -\frac{3}{2}$ 或 $\frac{3}{4} < k \leq 1$

【解析】

【分析】 根据题意, 画出图形, 分别求出 AP_1 、 BP_2 、 AP_3 、 AP_4 的表达式, 即可求出 k 的取值范围.

【详解】 解: 如图所示, 当点 P 在点 P_1 和 P_2 之间时, 区域 W 内的整点个数为 6; 当点 P 在点 P_3 和 P_4 之间时, 区域 W 内的整点个数为 6.



当点 P 在点 P_1 和 P_2 之间时, 设直线 AP_1 的表达式是 $y = k_1x + b_1$, 把点 A 的坐标 $(-2, 1)$ 和点 P_1 $(0, 3)$

代入得

$$\begin{cases} -2k_1 + b_1 = 1 \\ b_1 = 3 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} k_1 = 1 \\ b_1 = 3 \end{cases}$

∴ 直线 AP_1 的表达式是 $y = x + 3$,

设直线 BP_2 的表达式是 $y = k_2x + b_2$, 直线 BP_2 经过 $B(3, 1)$ 和点 $C(1, 2)$, 代入得

$$\begin{cases} 3k_2 + b_2 = 1 \\ k_2 + b_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_2 = -\frac{1}{2} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

∴ 直线 BP_2 的表达式是 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$,

当 $x = 0$ 时, $y = \frac{5}{2}$,

∴ 点 P_2 的坐标是 $(0, \frac{5}{2})$

设直线 AP_2 的表达式是 $y = k_3x + b_3$, 直线 AP_2 经过 $A(-2, 1)$ 和点 $P_2(0, \frac{5}{2})$, 代入得

$$\begin{cases} -2k_3 + b_3 = 1 \\ b_3 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_3 = \frac{3}{4} \\ b_3 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

∴ 直线 AP_2 的表达式是 $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$,

∴ 当点 P 在点 P_1 和 P_2 之间时, 即 $\frac{3}{4} < k \leq 1$, 区域 W 内的整点个数为 6;

当点 P 在点 P_3 和 P_4 之间时, 设直线 AP_3 的表达式是 $y = k_4x + b_4$, 可知直线 AP_3 经过 $A(-2, 1)$ 和点 $P_2(0, -2)$, 代入得

$$\begin{cases} -2k_4 + b_4 = 1 \\ b_4 = -2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_4 = -\frac{3}{2} \\ b_4 = -2 \end{cases}$$

∴ 直线 AP_3 的表达式是 $y = -\frac{3}{2}x - 2$,

设直线 AP_4 的表达式是 $y = k_5x + b_5$, 可知直线 AP_4 经过 $A(-2, 1)$ 和点 $P_4(0, -3)$, 代入得

$$\begin{cases} -2k_5 + b_5 = 1 \\ b_5 = -3 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_5 = -2 \\ b_5 = -3 \end{cases}$$

∴ 直线 AP_4 的表达式是 $y = -2x - 3$,

当点 P 在点 P_3 和 P_4 之间时, 即 $-2 \leq k < -\frac{3}{2}$ 时, 区域 W 内的整点个数为 6.

综上所述, k 的取值范围是 $\frac{3}{4} < k \leq 1$ 或 $-2 \leq k < -\frac{3}{2}$.

故答案为: $\frac{3}{4} < k \leq 1$ 或 $-2 \leq k < -\frac{3}{2}$.

【点睛】 本题考查了整点、待定系数法求一次函数解析式等知识, 待定系数法求解析式是基础, 数形结合并分类讨论是关键.

三、解答题

19. 解方程: $3 - \sqrt{2x-3} = x$

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 先移项, 两边平方, 然后整理求得 x 的值, 最后进行检验即可.

【详解】 解: 原方程化为: $3 - x = \sqrt{2x-3}$

两边平方, 得 $(3-x)^2 = 2x-3$,

整理, 得 $x^2 - 8x + 12 = 0$,

解得 $x_1 = 2, x_2 = 6$,

经检验: $x_1 = 2$ 是原方程的根, $x_2 = 6$ 是原方程的增根,

∴ 原方程的根为 $x = 2$.

【点睛】 本题主要考查解一元二次方程, 二次根式的性质, 解此题的关键在于熟练掌握其知识点.

20. 解方程组
$$\begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{6}{x-y} = 3 \\ \frac{9}{x-y} - \frac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 令 $\frac{1}{x+y} = a$, $\frac{1}{x-y} = b$, 则原方程组化为: $\begin{cases} 4a + 6b = 3 \\ 9b - a = 1 \end{cases}$, 求出 a 、 b 的值, 再代入求出 x 、 y

即可.

【详解】 令 $\frac{1}{x+y} = a$, $\frac{1}{x-y} = b$,

则原方程组化为 $\begin{cases} 4a + 6b = 3 \\ 9b - a = 1 \end{cases}$,

解得
$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{6} \end{cases},$$

则有
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases},$$

经检验 $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$ 是原方程的解,

则原方程的解为:
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查了解分式方程组和解二元一次方程组, 能正确换元是解此题的关键.

21. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \\ 2x + y = 21 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = 7 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组，掌握解二元二次方程组的步骤是解题的关键.

先将 $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$ 化为两个二元一次方程 $x - 3y = 0$ 或 $x - y = 0$ ，再分别与 $2x + y = 21$ 组合成两个新的二元一次方程组求解即可.

【详解】 解：由 $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$ 得 $(x - 3y)(x - y) = 0$,

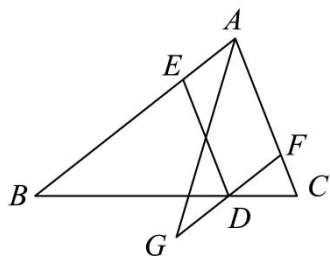
$\therefore x - 3y = 0$ 或 $x - y = 0$,

$\therefore$ 原方程组可化为 $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + y = 21 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 21 \end{cases}$,

分别解得： $\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \end{cases}$,

$\therefore$ 原方程组的解为： $\begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = 7 \end{cases}$.

22. 已知： 如图， 在 $\triangle ABC$ 中， 点 D 、 E 、 F 分别为 BC 、 AB 、 AC 上的点， $AF \parallel ED$ ， 且 $AF = ED$ ， 延长 FD 到点 G ， 使 $DG = FD$. 求证： ED 、 AG 互相平分.

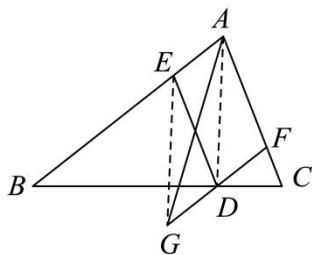


【答案】 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质和判定，掌握平行四边形的性质和判定，正确的作出辅助线是解题的关键；由 $AF \parallel ED$ ， $DE = AF$ ，可得四边形 $AEDF$ 是平行四边形，进而可得 $AE = DF$ ，由 $DG = DF$ 可得 $DG = AE$ ，进而可证四边形 $AEGD$ 是平行四边形，由平行四边形的性质即可得证.

【详解】 证明：连接 AD ， EG ，



$\therefore AF \parallel ED$ ， $DE = AF$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形,
 $\therefore AE = DF$, $AE \parallel DF$,
 $\therefore DG = DF$,
 $\therefore DG = AE$,
 $\therefore$ 四边形 $AEGD$ 是平行四边形,
 $\therefore AG$ 和 DE 互相平分.

23. *DeepSeek* 公司研发的两个 *AI* 模型 R_1 和 R_2 共同处理一批数据. 已知 R_2 单独处理数据的时间比 R_1 少 2 小时. 若两模型合作处理, 仅需 $\frac{4}{3}$ 小时即可完成. 求 R_1 单独处理需要多少小时?

【答案】 R_1 单独处理需要 4 小时

【解析】

【分析】 本题考查分式方程的应用, 解题的关键是列出等量关系. 设 R_1 单独处理需要 x 小时, 则 R_2 单独处理数据的时间 $(x-2)$ 小时, 根据两模型合作 $\frac{4}{3}$ 小时完成, 可得出方程, 求解并检验即可.

【详解】 解: 设 R_1 单独处理需要 x 小时, 则 R_2 单独处理数据的时间 $(x-2)$ 小时,

依题意得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{\frac{4}{3}}$, 即 $x-2+x = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$,

整理得: $3x^2 - 14x + 8 = 0$,

解得: $x = 4$ 或 $x = \frac{2}{3}$,

由题意得 $x > 2$, 则 $x = 4$,

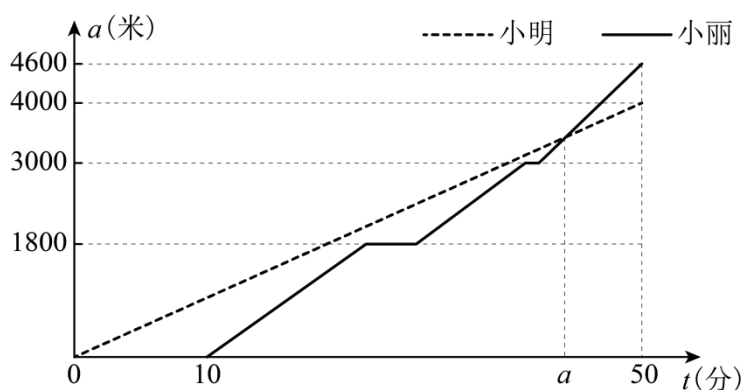
经检验, $x = 4$ 是原分式方程的解,

答: R_1 单独处理需要 4 小时.

24. 小明和小丽在跑步机上慢跑锻炼. 小明先跑, 10 分钟后小丽才开始跑, 小丽跑步时中间休息了两次. 跑步机上 C 档比 B 档快 40 米/分、 B 档比 A 档快 40 米/分. 小明与小丽的跑步相关信息如表所示, 跑步累计里程 s (米) 与小明跑步时间 t (分) 的函数关系如图所示.

	时间	里程分段	速度档	跑步里程
小明	16:00~16:50	不分段	A 档	4000 米

小丽	16:10~16:50	第一段	B 档	1800 米
		第一次休息		
		第二段	B 档	1200 米
		第二次休息		
		第三段	C 档	1600 米



- (1) 求 A , B , C 各档速度 (单位: 米/分);
- (2) 求小丽两次休息时间的总和 (单位: 分);
- (3) 小丽第二次休息后, 在 a 分钟时两人跑步累计里程相等, 求 a 的值.

【答案】(1) 80 米/分, 120 米/分, 160 米/分

(2) 5 分 (3) 42.5

【解析】

【分析】此题考查函数图象获取信息, 一元一次方程的应用, 读懂图象中的数据是解本题的关键.

(1) 由小明的跑步里程及时间可得 A 档速度, 再根据 C 档比 B 档快 40 米/分、 B 档比 A 档快 40 米/分可得 B , C 档速度;

(2) 结合图象求出小丽每段跑步所用时间, 再根据总时间即可求解;

(3) 由题意可得, 此时小丽在跑第三段, 所跑时间为 $a - 10 - 15 - 10 - 5 = a - 40$ (分), 可得方程 $80a = 3000 + 160(a - 40)$, 求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意可知, A 档速度为 $4000 \div 50 = 80$ 米/分,

则 B 档速度为 $80 + 40 = 120$ 米/分, C 档速度为 $120 + 40 = 160$ 米/分;

【小问 2 详解】

小丽第一段跑步时间为 $1800 \div 120 = 15$ 分,

小丽第二段跑步时间为 $(3000 - 1800) \div 120 = 10$ 分,

小丽第三段跑步时间为 $(4600 - 3000) \div 160 = 10$ 分,

则小丽两次休息时间的总和 $= 50 - 10 - 15 - 10 - 10 = 5$ 分;

【小问 3 详解】

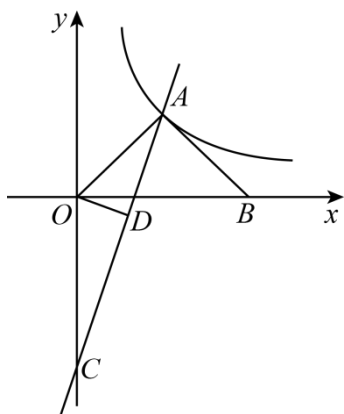
由题意可得: 小丽第二次休息后, 在 a 分钟时两人跑步累计里程相等,

此时小丽在跑第三段, 所跑时间为: $a - 10 - 15 - 10 - 5 = a - 40$ (分)

可得: $80a = 3000 + 160(a - 40)$,

解得: $a = 42.5$.

25. 如图, AOB 为等腰直角三角形, 斜边 OB 在 x 轴上, 一次函数 $y = 3x - 4$ 的图像经过点 A , 交 y 轴于点 C , 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图像也经过点 A .



(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 过 O 点作 $OD \perp AC$ 于 D 点, 求 $CD^2 - AD^2$ 的值;

(3) 若点 P 是 x 轴上的动点, 点 Q 在反比例函数的图像上使得 $\triangle PAQ$ 为等腰直角三角形? 直接写出所有符合条件的点 Q 的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{4}{x}$; (2) 8; (3) $Q_1(4, 1)$, $Q_2(\sqrt{5} + 1, \sqrt{5} - 1)$, $Q_3(2\sqrt{2} + 2, 2\sqrt{2} - 2)$.

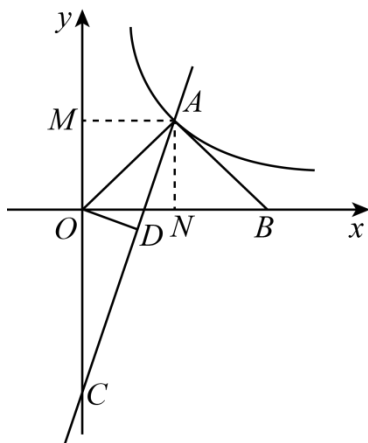
【解析】

【分析】(1) 根据题意 AOB 为等腰直角三角形, 过点 A 分别作 $AM \perp y$ 轴于 M , $AN \perp x$ 轴于 N , 则设 $A(a, a)$, 根据一次函数 $y = 3x - 4$ 的图像经过点 A , 求得 a 的值, 进而求得 A 的坐标, 即可求得反比例函数解析式;

(2) 根据在 $Rt\triangle COD$ 中, $CD^2 = OC^2 - OD^2$ ①, 在 $Rt\triangle AOD$ 中, $AD^2 = OA^2 - OD^2$ ②, ① - ②即可求得;

(3) 分三种情况讨论①若 $\angle PAQ = 90^\circ$, $AP = AQ$, 如图, 连接 BQ , 证明 $\triangle AOP \cong \triangle ABQ$, 进而求得 $QB \perp OB$, 从而求得 B 的坐标, 即可求得 Q 点的坐标; ②若 $\angle AQP = 90^\circ$, $AQ = PQ$, 如图, 过点 A 作 $AC \perp x$ 轴于 C , 过 Q 分别作 $QD \perp AC$, $QE \perp x$ 轴, 垂足分别为 D, E , 证明 $Rt\triangle ADQ \cong Rt\triangle PEQ$, 设 $Q(m, \frac{4}{m})$, 由 $OC + CE = OE$, 可得 $2 + \frac{4}{m} = m$, 解方程即可求得 Q 点坐标; ③若 $\angle APQ = 90^\circ$, $PA = PQ$, 如图, 过点 A 作 $AC \perp x$ 轴于 C , 过 Q 作 $QD \perp x$ 轴于 D , 证明 $Rt\triangle ACP \cong Rt\triangle PDQ$, 设 $Q(n, \frac{4}{n})$, 则 $OD = n$, $CP = DQ = \frac{4}{n}$, $PD = AC = 2$, 由 $OC + CP + PD = OD$, 可得 $2 + \frac{4}{n} + 2 = n$, 解方程即可求得 Q 点坐标; 综合①②③即可求得所有 Q 的坐标.

【详解】(1) 过点 A 分别作 $AM \perp y$ 轴于 M , $AN \perp x$ 轴于 N , 如图,



$\therefore$ 四边形 $AMON$ 是矩形,

$\because \triangle AOB$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle AON = \angle NOA = 45^\circ$

$\therefore ON = NA$,

$\therefore$ 四边形 $AMON$ 是正方形,

$\therefore AM = AN$,

$\therefore$ 设 $A(a, a)$,

$\because$ 点 A 在直线 $y = 3x - 4$ 上,

$\therefore a = 3a - 4$,

解得 $a = 2$,

$$\therefore A(2,2),$$

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图像经过点 A,

$$\therefore 2 = \frac{k}{2},$$

$$\therefore k = 4,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{4}{x};$$

$$(2) \because A(2,2)$$

$$\therefore AO^2 = 2^2 + 2^2 = 8,$$

把 $x = 0$ 代入 $y = 3x - 4$, 解得 $y = -4$,

$$\therefore C(0, -4),$$

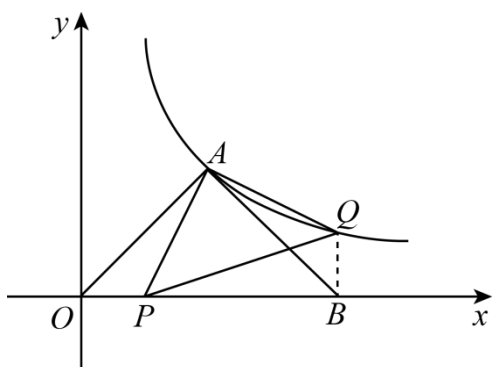
$$\therefore OC = 4,$$

在 $Rt\triangle COD$ 中, $CD^2 = OC^2 - OD^2$ ①,

在 $Rt\triangle AOD$ 中, $AD^2 = OA^2 - OD^2$ ②,

$$\text{①}-\text{②}, \text{得 } CD^2 - AD^2 = OC^2 - OA^2 = 16 - 8 = 8,$$

(3) ①若 $\angle PAQ = 90^\circ$, $AP = AQ$, 如图, 连接 BQ ,



在 $\triangle AOP$ 与 $\triangle ABQ$ 中,

$\because AO = AB, \angle OAP = \angle BAQ = 90^\circ - \angle PAB, AP = AQ$,

$$\therefore \triangle AOP \cong \triangle ABQ,$$

$$\therefore \angle ABQ = \angle AOP = 45^\circ,$$

又 $\angle ABO = 45^\circ$,

$$\therefore \angle OBQ = 90^\circ,$$

即 $QB \perp OB$,

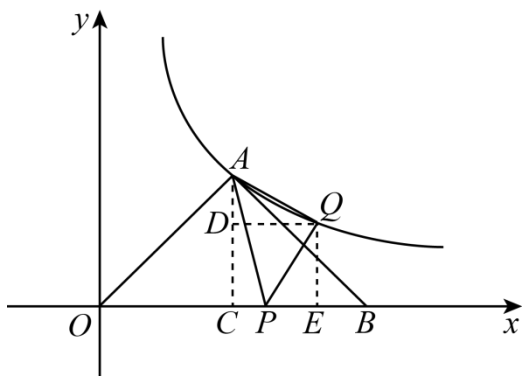
$$\because A(2,2),$$

$$\therefore B(4,0),$$

把 $x=4$ 代入 $y=\frac{4}{x}$, 得 $y=1$,

$$\therefore Q_1(4,1),$$

②若 $\angle AQP = 90^\circ, AQ = PQ$, 如图, 过点 A 作 $AC \perp x$ 轴于 C , 过 Q 分别作 $QD \perp AC, QE \perp x$ 轴, 垂足分别为 D, E ,



在 $Rt\triangle ADQ$ 与 $Rt\triangle PEQ$,

$$\because AQ = PQ, \angle AQD = \angle PQE = 90^\circ - \angle DQP,$$

$$\therefore Rt\triangle ADQ \cong Rt\triangle PEQ,$$

$$\therefore AD = PE, DQ = EQ,$$

$$\text{设 } Q(m, \frac{4}{m}), \text{ 则 } OE = m, CE = DQ = EQ = \frac{4}{m},$$

$$\text{由 } OC + CE = OE,$$

$$\text{可得 } 2 + \frac{4}{m} = m,$$

$$\text{解得 } m = 1 \pm \sqrt{5},$$

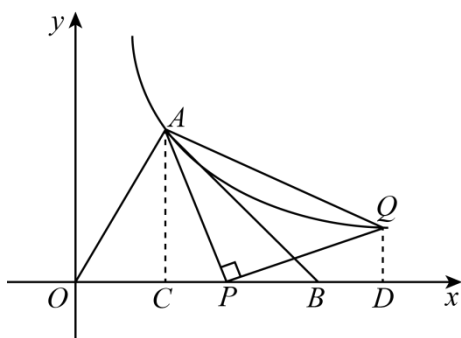
经检验, m 是原方程的解,

$$\because m > 0,$$

$$\therefore m = 1 + \sqrt{5},$$

$$\therefore Q_2(\sqrt{5}+1, \sqrt{5}-1),$$

③若 $\angle APQ = 90^\circ, PA = PQ$ ，如图，过点 A 作 $AC \perp x$ 轴于 C，过 Q 作 $QD \perp x$ 轴于 D，



在 $Rt\triangle ACP$ 与 $Rt\triangle PDQ$ 中，

$$\because PA = PQ, \angle APC = \angle PQD = 90^\circ - \angle DPQ,$$

$$\therefore Rt\triangle ACP \cong Rt\triangle PDQ,$$

$$\therefore AC = PD, CP = DQ,$$

$$\text{设 } Q(n, \frac{4}{n}), \text{ 则 } OD = n, CP = DQ = \frac{4}{n}, PD = AC = 2,$$

$$\text{由 } OC + CP + PD = OD,$$

$$\text{可得 } 2 + \frac{4}{n} + 2 = n,$$

$$\text{解得 } n = 2 \pm 2\sqrt{2},$$

经检验， m 是原方程的解，

$$\because n > 0,$$

$$\therefore n = 2 + 2\sqrt{2},$$

$$\therefore Q_3(2\sqrt{2}+2, 2\sqrt{2}-2),$$

综上所述，存在 Q 点符合题意，其坐标为 $Q_1(4,1)$ ， $Q_2(\sqrt{5}+1, \sqrt{5}-1)$ ， $Q_3(2\sqrt{2}+2, 2\sqrt{2}-2)$ 。

【点睛】本题考查了一次函数与反比例函数综合，等腰直角三角形的性质，勾股定理，三角形全等的性质与判定，解可化为一元二次方程的分式方程，掌握以上知识是解题的关键。

26. 如图 1，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = \angle C$ ，点 P 在边 AB 上。

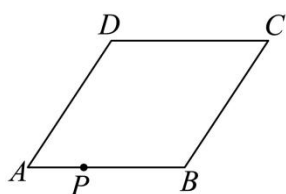


图1

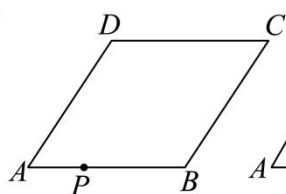


图2

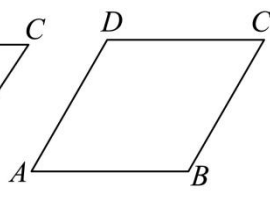


图3

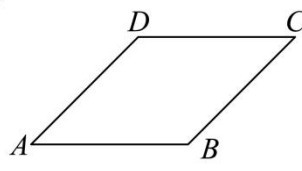


图4

(1) 判断四边形 $ABCD$ 的形状并加以证明;

(2) 以过点 P 的直线为轴, 将四边形 $ABCD$ 折叠, 使点 B, C 分别落在点 B', C' 上, 且 $B'C'$ 经过点 D , 折痕与四边形的另一交点为 Q ;

①在图 2 中作出四边形 $PB'C'Q$ (保留作图痕迹, 不必说明作法和理由)

(提示: 为使折叠后 $B'C'$ 经过点 D , 可以先考虑 BC 边上与点 D 对应的点 D');

②如图 3, 如果 $AB = AD, \angle C = 60^\circ$, 且 $B'P \perp AB$, 试求 $\frac{AP}{BP}$ 的值:

③如图 4, 如果 $AB = AD, \angle C = 45^\circ$, 且 $B'P \perp AB$, 请直接写出 $\frac{AP}{BP}$ 的值.

【答案】 (1) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形; 证明见解析

(2) ①见解析; ② $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; ③ 1

【解析】

【分析】 (1) 根据两组对边分别平行的四边形是平行四边形进行判断;

(2) ①过点 P 作 AB 的垂线, 交 AD 于点 E , 截取 $PB' = PB$, 在 BC 上截取 $BD' = B'D$, 交 BC 于点 D' , 再以 B, B' 为圆心, 适当长度为半径画弧交于一点, 连接点 P 与该点作射线交 CD 于点 Q , 过点 Q 作 CD 的垂线, 作射线 $B'D$, 交 CD 的垂线于点 C' , 连接 $C'Q$ 即可; ②先根据折叠得出一些对应边相等, 对应角相等, 并推导出 $B'D = B'E$, 再设 $AP = a$, $BP = b$, 利用解直角三角形将 DQ 和 CQ 长用含 a 的代数式表示出来, 最后根据 $CD = DQ + CQ$ 列出关于 a, b 的关系式, 求得 a, b 的比值即可; ③连接 AB' , 易得平行四边形 $ABCD$ 是菱形, 推出 $\angle ABC = 135^\circ$, 由折叠的性质得到 $\angle PB'C' = 135^\circ, PB' = PB$, 再求出 $\angle AB'P = 45^\circ$, 推出 A, B', D, C' 四点共线, 得到点 B' 在 AD 上, $\triangle APB'$ 是等腰直角三角形, 得到 $AP = PB'$, 进而得到 $AP = PB$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

证明: $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\because \angle A = \angle C,$$

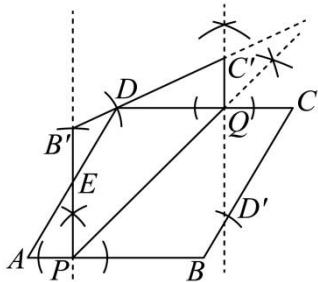
$$\therefore \angle C + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

解: ①作图如下:



②当 $AB = AD$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 是菱形,

由折叠可得, $BP = B'P$, $CQ = C'Q$, $BC = B'C'$, $\angle C = \angle C' = 60^\circ = \angle A$,

当 $B'P \perp AB$ 时, 由 $B'P \parallel C'Q$, 可得 $C'Q \perp CD$,

$$\therefore \angle PEA = 30^\circ = \angle DEB', \quad \angle QDC' = 30^\circ,$$

$$\because \angle ADC = 180^\circ - \angle A = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle B'DE = 180^\circ - \angle ADC - \angle QDC' = 30^\circ,$$

$$\therefore B'D = B'E,$$

设 $AP = a$, $BP = b$, 则直角三角形 APE 中, $PE = \sqrt{3}a$, 且 $B'P = b$, $BC = B'C' = CD = a + b$,

$$\therefore B'E = b - \sqrt{3}a = B'D,$$

$$\therefore C'D = a + b - (b - \sqrt{3}a) = a + \sqrt{3}a,$$

$$\therefore \text{直角三角形 } C'QD \text{ 中, } C'Q = \frac{1+\sqrt{3}}{2}a = CQ,$$

$$\therefore DQ = \sqrt{3}C'Q = \frac{3+\sqrt{3}}{2}a,$$

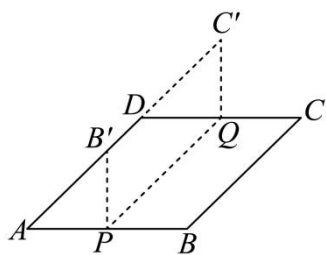
$$\therefore CD = DQ + CQ = a + b,$$

$$\therefore \frac{3+\sqrt{3}}{2}a + \frac{1+\sqrt{3}}{2}a = a+b,$$

$$\text{整理得 } (\sqrt{3}+1)a = b,$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \text{ 即 } \frac{AP}{PB} = \frac{\sqrt{3}-1}{2};$$

③连接 AB' ,



当 $AB = AD$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\because \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 135^\circ, \angle A = 45^\circ,$$

由折叠的性质得到 $\angle PB'C' = 135^\circ, PB' = PB$,

$$\because B'P \perp AB,$$

$$\therefore \angle APB' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AB'P = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AB'P + \angle PB'C' = 180^\circ,$$

$$\therefore A, B', D, C' \text{ 四点共线},$$

$$\therefore \text{点 } B' \text{ 在 } AD \text{ 上},$$

$$\therefore \triangle APB' \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore AP = PB',$$

$$\therefore AP = PB,$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = 1.$$

【点睛】 本题主要考查了平行四边形以及菱形, 解题的关键是掌握平行四边形的判定以及菱形的判定与性质. 在解题时注意, 菱形的四条边都相等, 此外在折叠问题中, 需要抓住对应边相等, 对应角相等这些等量关系, 折叠问题的实质是轴对称的性质.