

骏博外校八年级期中测试

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过点 $(m, -3)$ 和点 $(-3, m)$, 其中 $m < -3$, 则应满足 ()

- A. $k > 0, b > 0$ B. $k < 0, b < 0$ C. $k > 0, b < 0$ D. $k < 0, b > 0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 此题考查了一次函数图象与系数的关系, 根据一次函数图像经过两点的坐标, 建立方程组求解 k 和 b 的关系, 结合 m 的取值范围判断 k 和 b 的符号.

【详解】 解: 一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过点 $(m, -3)$ 和点 $(-3, m)$,

$$\therefore \begin{cases} -3 = km + b \\ m = -3k + b \end{cases}$$

$$k = \frac{-3 - m}{m + 3} = -1$$

将 $k = -1$ 代入方程 $m = -3k + b$ 得: $m = -3 \cdot (-1) + b$,

$$\therefore b = m - 3$$

又 $\because m < -3$, 故 $m - 3 < -6$, 即 $b < 0$.

综上, $k < 0$ 且 $b < 0$,

故选 B.

2. 解方程 $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ 时, 如果设 $x + \frac{1}{x} = y$, 那么原方程可化为 ()

- A. $x_2 = -1$ B. $3y^2 + y + 8 = 0$ C. $3y^2 + y - 4 = 0$ D. $3y^2 + y = 0$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了换元法解分式方程. 先将原方程根据完全平方公式变形, 然后用换元即可解答.

【详解】 解: $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

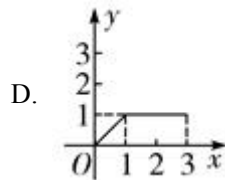
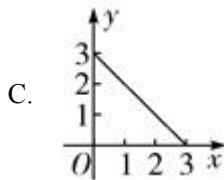
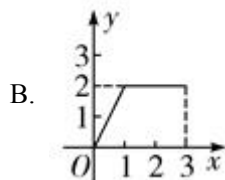
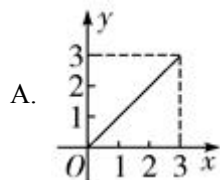
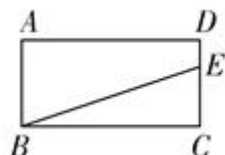
$$\therefore 3\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0,$$

设 $x + \frac{1}{x} = y$, 则 $3(y^2 - 2) + y + 2 = 0$,

整理得: $3y^2 + y - 4 = 0$.

故选: C.

3. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $BC = 2$, 动点 E 从点 C 出发, 以每秒 1 个单位长度的速度沿路线 $C \rightarrow D \rightarrow A$ 作匀速运动, 当点 E 到达 A 点时运动停止, 那么 BEC 的面积 y 与点 E 运动的时间 x 秒之间的函数图象大致是 ()



【答案】 D

【解析】

【详解】 欲求 BEC 的面积, 已知底边长为 BC , 固定不变, 确定高是关键, 由于点 E 沿 $C \rightarrow D \rightarrow A$ 作匀速运动, 通过观察后发现, 点 E 在 CD 上时, 高是变化的, 而在 AD 上时, 高不变, 因此需分两种情况求解:

①当点 E 在 CD 上时, $CE = x \leq 1$, $BC = 2$, $\therefore y = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CE = \frac{1}{2} \times 2x = x$; ②当点 E 在 DA 上时, 此时 $1 < x \leq 3$, BEC 的高为 1, 底边为 2, $\therefore y = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$; 综上可得当 $x \leq 1$ 时, y 是正比例函数, y 随 x 的增大而增大; 当 $1 < x \leq 3$ 时, y 的值恒为 1, 为平行于 x 轴的一条直线. 结合选项可知 D 符合.

4. 下列说法正确的是 ()

A. 互为相反向量是平行向量

B. 零向量没有方向

C. 长度相等的向量叫相等向量

D. 平行向量是在同一条直线上的向量

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查向量的基本概念. 根据题意需逐一分析各选项的正确性.

【详解】 解: A、正确, 相反向量是大小相等、方向相反的向量, 而平行向量指方向相同或相反的向量, 故相反向量属于平行向量;

B、错误, 零向量方向是任意的, 而非没有方向;

C、错误，相等向量需满足长度相等且方向相同，仅长度相等无法保证相等；

D、错误，平行向量可在不同直线上，只需方向相同或相反，而非必须共线。

故选：A.

5. 一个多边形的每一个内角都等于 140° ，那么从这个多边形的一个顶点出发的对角线的条数是 ()

A. 6 条

B. 7 条

C. 8 条

D. 9 条

【答案】A

【解析】

【分析】由多边形的内角和为 $180^\circ(n-2)$ ，先求出该多边形的边数 n ，然后利用 $n-3$ 即可求解。

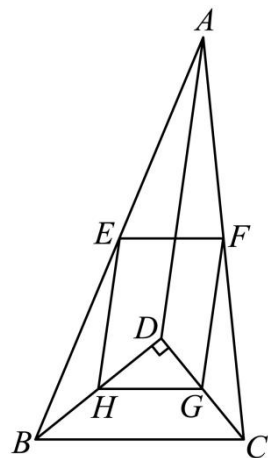
【详解】解：设这个多边形的边数为 n ，则由题意可得： $180(n-2) = 140n$ ，解得 $n = 9$ ，

$\therefore$ 从此多边形的一个顶点出发可引对角线的条数为： $9-3=6$ (条)

故选：A.

【点睛】本题考查边形的内角和，以及从 n 边形的一个顶点引的条对角线数量，掌握多边形中的基本结论是解题关键。

6. 如图，D 是 $\triangle ABC$ 内一点， $BD \perp CD$ ， $AD = 6$ ， $BD = 4$ ， $CD = 3$ ，E、F、G、H 分别是 AB、AC、CD、BD 的中点，则四边形 EFGH 的周长是 ()



A. 7

B. 9

C. 10

D. 11

【答案】D

【解析】

【分析】利用勾股定理列式求出 BC 的长，再根据三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半求出 $EH = FG = \frac{1}{2}AD$ ， $EF = GH = \frac{1}{2}BC$ ，然后代入数据进行计算即可得解。

【详解】解： $\because BD \perp CD$ ， $BD=4$ ， $CD=3$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

∵ E、F、G、H 分别是 AB、AC、CD、BD 的中点,

$$\therefore EH = FG = \frac{1}{2}AD, \quad EF = GH = \frac{1}{2}BC$$

∴ 四边形 EFGH 的周长 = EH + GH + FG + EF = AD + BC,

又 ∵ AD = 6,

∴ 四边形 EFGH 的周长 = 6 + 5 = 11.

故选 D.

点睛: 本题考查了三角形的中位线定理, 勾股定理的应用, 熟记三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 设 x_1, x_2 是方程 $2x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两个实数根, 则 $x_1 + x_2 =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 根据根与系数的关系 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ 进行求解即可.

【详解】 解: ∵ x_1, x_2 是方程 $2x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两个实数根,

根据根与系数的关系 $x_1 + x_2 = -\frac{4}{2} = -2$,

故答案为: -2.

【点睛】 本题考查了根与系数的关系, 熟练掌握 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根时,

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ 是解答本题的关键.

8. 若 $\sqrt{x+y} \cdot (\sqrt{x+y} - 1) = 2$, 则 $x + y =$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 设 $t = \sqrt{x+y}$, 将原方程变形, 进而解一元二次方程即可求得 t 的值, 进而求得 $x+y$ 的值.

【详解】 设 $t = \sqrt{x+y}$, 原方程为: $t(t-1) = 2$

即 $t^2 - t - 2 = 0$

解得: $t_1 = 2, t_2 = -1$

$$\because t = \sqrt{x+y} > 0$$

$$\therefore t = 2$$

$$\therefore x + y = 4$$

故答案为：4

【点睛】本题考查了无理方程，换元法是解题的关键.

9. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象过点 $(-2, 1)$ ，则一次函数 $y = kx - k$ 的图象不过第___象限.

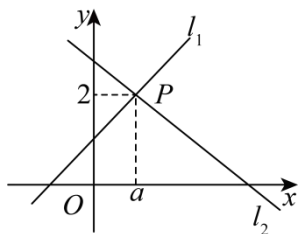
【答案】三.

【解析】

【详解】试题分析：根据题意可得 $k = -2$ ，则 $y = -2x + 2$ ，则一次函数图象不经过第三象限.

考点：反比例函数与一次函数

10. 直线 $l_1: y = x + 1$ 与直线 $l_2: y = mx + n$ 相交于点 $P(a, 2)$ ，则关于 x 的不等式 $x + 1 \geq mx + n$ 的解集为_____.



【答案】 $x \geq 1$

【解析】

【分析】将 $P(a, 2)$ 代入直线 $l_1: y = x + 1$ 中求出 $a = 1$ ，然后再根据图像越在上方，其对应的函数值越大即可求解.

【详解】解：将点 $P(a, 2)$ 坐标代入直线 $y = x + 1$ ，得 $a = 1$ ，

从图中直接看出，在 P 点右侧时，直线 $l_1: y = x + 1$ 在直线 $l_2: y = mx + n$ 的上方，

即当 $x \geq 1$ 时， $x + 1 \geq mx + n$ ，

故答案为： $x \geq 1$.

【点睛】本题考查了一元一次不等式与一次函数的关系，图像越在上方，其对应的函数值就越大.

11. 已知菱形的面积为 24，一条对角线长为 6，则其周长等于_____.

【答案】20

【解析】

【详解】试题分析：根据面得菱形的另一条对角线为 8，则边长为 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，则周长 $= 5 \times 4 = 20$.

考点：菱形的性质.

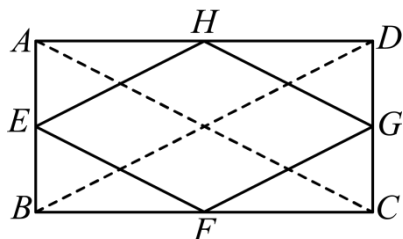
12. 顺次连接矩形各边中点所得四边形为___形.

【答案】菱

【解析】

【分析】作出图形，根据三角形的中位线定理可得 $EF = GH = \frac{1}{2}AC$ ， $FG = EH = \frac{1}{2}BD$ ，再根据矩形的对角线相等可得 $AC = BD$ ，从而得到四边形 $EFGH$ 的四条边都相等，然后根据四条边都相等的四边形是菱形解答. 本题考查了三角形的中位线定理，菱形的判定，矩形的性质，作辅助线构造出三角形，然后利用三角形的中位线定理是解题的关键.

【详解】解：如图，连接 AC 、 BD ，



$\because E$ 、 F 、 G 、 H 分别是矩形 $ABCD$ 的 AB 、 BC 、 CD 、 AD 边上的中点，

$\therefore EF = GH = \frac{1}{2}AC$ ， $FG = EH = \frac{1}{2}BD$ （三角形的中位线等于第三边的一半），

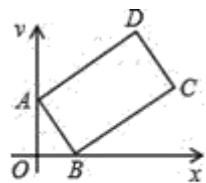
$\because$ 矩形 $ABCD$ 的对角线 $AC = BD$ ，

$\therefore EF = GH = FG = EH$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

故答案为：菱.

13. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=2$ ， $BC=4$ ，点 A 、 B 分别在 y 轴、 x 轴的正半轴上，点 C 在第一象限，如果 $\angle OAB=30^\circ$ ，那么点 C 的坐标是_____.



【答案】 $(1+2\sqrt{3}, 2)$.

【解析】

【详解】试题分析：根据 30° 角所对的直角边等于斜边的一半求出 OB 的长度，然后过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E ，根据直角三角形的性质求出 $\angle CBE=30^\circ$ ，在 $Rt\triangle BCE$ 中求出 CE 、 BE 的长度，再求出 OE 的长度，即可得解.

试题解析: $\because AB=2, \angle OAB=30^\circ$,

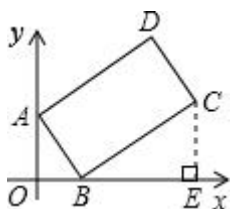
$$\therefore OB = \frac{1}{2} AB = 1,$$

在矩形 ABCD 中, $\angle ABC=90^\circ$,

$$\therefore \angle OAB + \angle ABO = 90^\circ, \angle ABO + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle OAB = 30^\circ,$$

点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E,



$$\text{在 Rt}\triangle BCE \text{ 中, } CE = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2, BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore OE = OB + BE = 1 + 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 C 的坐标是 } (1+2\sqrt{3}, 2).$$

考点: 1.矩形的性质; 2.坐标与图形性质.

14. 在矩形 ABCD 中, 如果 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = 1$, 那么 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】由在矩形 ABCD 中, 如果 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = 1$, 即可求得 AB, BC 的长与 $\angle B=90^\circ$, 利用勾股定理即可求得 AC 的长, 又由 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, 即可求得答案.

【详解】解: $\because$ 四边形 ABCD 是矩形,

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

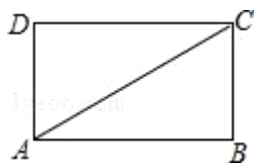
$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = 2, |\overrightarrow{BC}| = 1,$$

$$\therefore AB = 2, BC = 1,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}.$$

故答案为 $\sqrt{5}$.



15. 从等边三角形、平行四边形、矩形、菱形、等腰梯形中任选一个图形，选出的图形恰好是中心对称图形的概率为_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

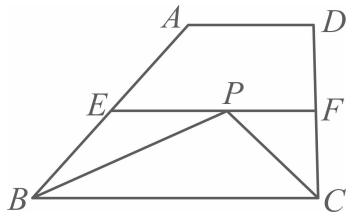
【分析】 本题考查了中心对称图形的识别、概率的知识点，识别中心对称图形和运用概率公式计算是解题的关键. 判断五个图形中有几个中心对称图形，然后用概率公式计算即可.

【详解】 解：从五个图形中任选一个，共有 5 种等可能的结果，其中是中心对称图形的是：平行四边形、矩形、菱形，结果有 3 种.

$\therefore$ 选出的图形恰好是中心对称图形的概率为 $\frac{3}{5}$.

故答案为： $\frac{3}{5}$

16. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $\angle ABC$ 和 $\angle DCB$ 的平分线相交于梯形中位线 EF 上的一点 P ，若 $EF = 3$ ，则梯形 $ABCD$ 的周长为_____.



【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查了梯形的中位线定理：梯形的中位线平行于底，并且等于两底和的一半；等腰三角形的判定等知识，熟练掌握梯形的中位线定理是解题关键. 先根据梯形的中位线定理可得 $EF \parallel BC$ ， $AD + BC = 2EF = 6$ ， $AB = 2BE$ ， $CD = 2CF$ ，再根据等腰三角形的判定可得 $BE = PE$ ， $CF = PF$ ，则可得 $BE + CF = EF = 3$ ，从而可得 $AB + CD = 6$ ，然后根据梯形的周长公式求解即可得.

【详解】 解： $\because EF$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线， $EF = 3$ ，

$\therefore EF \parallel BC$ ， $AD + BC = 2EF = 6$ ， $AB = 2BE$ ， $CD = 2CF$ ，

$\therefore \angle CBP = \angle BPE$ ， $\angle BCP = \angle CPF$ ，

$\therefore \angle ABC$ 和 $\angle DCB$ 的平分线相交于梯形中位线 EF 上的一点 P ，

$$\therefore \angle CBP = \angle PBE, \angle BCP = \angle PCF,$$

$$\therefore \angle PBE = \angle BPE, \angle PCF = \angle CPF,$$

$$\therefore BE = PE, CF = PF,$$

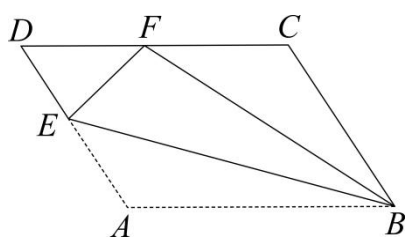
$$\therefore BE + CF = PE + PF = EF = 3,$$

$$\therefore AB + CD = 2BE + 2CF = 2(BE + CF) = 6,$$

$$\therefore \text{梯形 } ABCD \text{ 的周长为 } AD + BC + AB + CD = 6 + 6 = 12,$$

故答案为: 12.

17. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在 AD 上, 以 BE 为折痕, 把 $\triangle ABE$ 向上翻折, 点 A 正好落在 CD 边的点 F 处, 若 FDE 的周长为 6, $\triangle FCB$ 的周长为 20, 那么 CF 的长为_____.



【答案】7

【解析】

【分析】根据折叠的性质可得: $EF = AE$, $BF = BA$, 从而平行四边形的周长可以转化为 FDE 的周长 + $\triangle FCB$ 的周长, 求出 $AB + BC$, 再由 $\triangle FCB$ 的周长 20, 即可求出 CF 的长.

【详解】 $\because \triangle ABE$ 向上翻折, 点 A 正好落在 CD 边上,

$$\therefore AE = EF, AB = BF,$$

$$\because FDE \text{ 的周长为 } 6, \triangle FCB \text{ 的周长为 } 20,$$

$$\therefore DE + DF + EF = 6, BC + CF + BF = 20,$$

$$\therefore DE + DF + EF + BC + CF + BF = 6 + 20,$$

$$\therefore (DE + EF) + (DF + CF) + BC + BF = 26$$

$$\because DE + EF = AD, DF + CF = DC,$$

$$\therefore AD + DC + AB + BC = 26,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

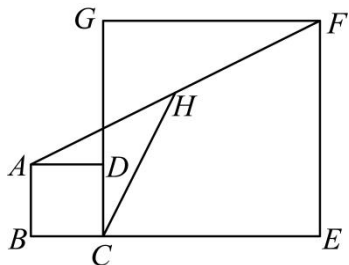
$$\therefore AB + BC = 13, \text{ 即 } BF + BC = 13,$$

$$\therefore CF = 20 - (BF + BC) = 20 - 13 = 7.$$

故答案为：7.

【点睛】本题主要考查翻折变换（折叠问题）和平行四边形的性质，掌握折叠前后图形的形状和大小不变，且对应边和对应角相等；平行四边形对边平行且相等是解题的关键.

18. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中， D 在 CG 上， $BC = 1, CG = 3$ ， H 是 AF 的中点，则 CH 的长是_____.

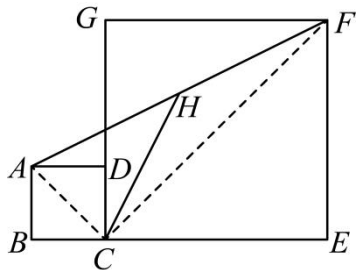


【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质，正方形的性质，勾股定理. 连接 AC 、 CF ，根据正方形的性质和勾股定理求出 AC 、 CF ，并判断出 $\triangle ACF$ 是直角三角形，再利用勾股定理求出 AF ，然后根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半解答即可.

【详解】解：如图，连接 AC 、 CF ，



在正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中，

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$CF = \sqrt{CE^2 + EF^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\angle ACD = \angle GCF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ACF$ 是直角三角形，

$$\text{由勾股定理得 } AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{5},$$

$\therefore H$ 是 AF 的中点，

$$\therefore CH = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

故答案为: $\sqrt{5}$.

三、解答题 (本大题共 8 题, 满分 58 分)

19. 解方程: $(a-1)x = 2(x+3).$

【答案】当 $a=3$ 时, 该方程无解; 当 $a \neq 3$, 该方程的解为 $x = \frac{6}{a-3}$

【解析】

【分析】本题考查了解含参数的一元一次方程, 解题的关键在于分类讨论. 先按照解一元一次方程的步骤求解, 得到 $(a-3)x = 6$, 再对系数进行讨论即可.

【详解】解: $(a-1)x = 2(x+3)$

$$(a-1)x = 2x+6$$

$$(a-1-2)x = 6$$

$$(a-3)x = 6,$$

当 $a=3$, 该方程无解;

当 $a \neq 3$ 时, 解得 $x = \frac{6}{a-3}$,

$\therefore$ 当 $a=3$ 时, 该方程无解; 当 $a \neq 3$, 该方程的解为 $x = \frac{6}{a-3}$.

20. 解方程: $\frac{x^2+2}{x} + \frac{6x}{x^2+2} = 5.$

【答案】 $x_1=1$, $x_2=2$

【解析】

【分析】本题考查了换元法解分式方程, 解一元二次方程, 根的判别式, 设 $y = \frac{x}{x^2+2}$, 原方程变为

$\frac{1}{y} + 6y = 5$, 解得 $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{3}$, 检验后则有 $\frac{x}{x^2+2} = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{x}{x^2+2} = \frac{1}{3}$, 然后转化为解一元二次方程

即可求解, 熟练掌握解方程的方法及步骤是解题的关键.

【详解】解: 设 $y = \frac{x}{x^2+2}$,

原方程变为 $\frac{1}{y} + 6y = 5$,

整理得: $6y^2 - 5y + 1 = 0$,

解得: $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{3}$,

经检验 $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{3}$ 是方程的解,

$$\therefore \frac{x}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{x}{x^2 + 2} = \frac{1}{3},$$

当 $\frac{x}{x^2 + 2} = \frac{1}{2}$ 时,

整理得 $x^2 - 2x + 2 = 0$,

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0,$$

$\therefore$ 此方程无解;

当 $\frac{x}{x^2 + 2} = \frac{1}{3}$ 时,

整理得 $x^2 - 3x + 2 = 0$,

$$(x-1)(x-2) = 0,$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = 2,$$

经检验 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ 是方程的解,

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

21. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 = 1 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解二元二次方程, 把方程组中的两个方程分别分解因式得到

$$\begin{cases} (x-4y)(x+y) = 0 \\ (x+2y+1)(x+2y-1) = 0 \end{cases}, \text{ 则 可 得 到 } \begin{cases} x-4y = 0 \\ x+2y+1 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y = 0 \\ x+2y+1 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-4y = 0 \\ x+2y-1 = 0 \end{cases} \text{ 或 }$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}, \text{ 分别解方程组即可得到答案.}$$

【详解】解: $\because \begin{cases} x^2-3xy-4y^2=0 \\ x^2+4xy+4y^2=1 \end{cases},$

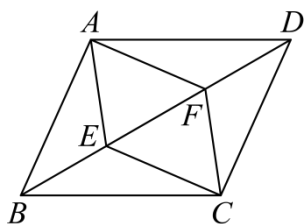
$$\therefore \begin{cases} (x-4y)(x+y)=0 \\ (x+2y)^2-1=0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} (x-4y)(x+y)=0 \\ (x+2y+1)(x+2y-1)=0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x-4y=0 \\ x+2y+1=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y+1=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-4y=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{6} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{6} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}.$$

22. 如图, 点 E 、 F 在平行四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 上, 且 $EB = DF$.



(1) 填空: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AF} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 求作: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF}$. (保留作图痕迹, 写出结果, 不要求写作法)

【答案】(1) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BF}$ 或 $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{FD}$ 或 $\overrightarrow{BE}$;

(2) 作图见解析.

【解析】

【分析】本题考查了平面向量的知识, 平行四边形法则, 熟练掌握平面向量定义及平行四边形法则是解题的关键.

(1) 根据平行四边形法则, 即可得出答案;

(2) 利用平行四边形法则来作合向量即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD},$$

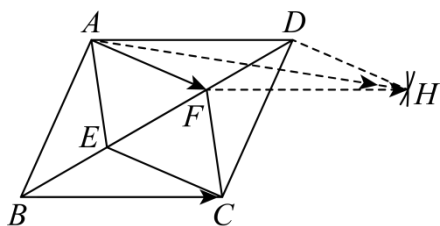
$$\text{由法则可得 } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{ED},$$

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BE},$$

故答案为: $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BF}$ 或 $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{FD}$ 或 $\overrightarrow{BE}$;

【小问 2 详解】

解: 如图, 作平行四边形 $ADHF$,



$$\therefore \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AD},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH},$$

$\therefore \overrightarrow{AH}$ 即为所求.

23. A 、 B 两地间的路程为 150 千米, 甲、乙两车分别从 A 、 B 两地同时出发, 相向而行, 2 小时相遇. 相遇后, 两车各以原来的速度继续行驶, 甲车到达 B 地后立即原路返回, 返回时的速度是原来速度的 2 倍, 结果甲、乙两车同时到达 A 地, 求甲、乙两车的速度.

【答案】 甲车的速度为 45km/h、乙车的速度 30km/h

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的实际应用, 正确理解题意, 找到等量关系是解题的关键.

先设甲的速度为 x km/h, 乙的速度为 y km/h, 由第一次相遇可知路程和为 150km 得到 $2x + 2y = 150$,

则 $y = 75 - x$, 再由“甲、乙两车同时到达 A 地”可知时间相同, 继而建立分式方程求解.

【详解】 解: 设甲的速度为 x km/h, 乙的速度为 y km/h,

由题意得: $2x + 2y = 150$,

$$\therefore y = 75 - x,$$

$$\therefore \frac{2(75-x)}{x} + \frac{150}{2x} = \frac{2x}{75-x},$$

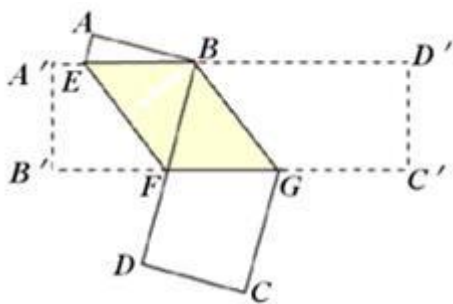
解得: $x = 45$,

经检验: $x = 45$ 时原方程的解, 且符合题意,

$$\text{则 } y = 75 - 45 = 30$$

答: 甲车的速度为 45km/h 、乙车的速度 30km/h .

24. 如图, 将一张矩形纸片 $A'B'C'D'$ 沿 EF 折叠, 使点 B' 落在 $A'D'$ 边上的点 B 处; 沿 BG 折叠, 使点 D' 落在点 D 处, 且 BD 过 F 点.



(1) 试判断四边形 BEFG 的形状, 并证明你的结论.

(2) 当 $\angle BFE$ 为多少度时, 四边形 BEFG 是菱形.

【答案】 证明: (1) 由题意, $\angle EFB' = \angle EFB$

$$\because BE \parallel FG, \therefore \angle EFB' = \angle BEF$$

$$\therefore \angle BEF = \angle EFB, \therefore BE = BF$$

同理 $BF = FG$, $\therefore BE = FG$

$\therefore$ 四边形 BEFG 是平行四边形.

(2) 当 $\angle BFE = 60^\circ$ 时, $\triangle BEF$ 为等边三角形

$\therefore BE = EF$, $\therefore$ 平行四边形 BEFG 是菱形

【解析】

【详解】 (1) 由题意, $\angle EFB' = \angle EFB$

$$\because BE \parallel FG, \therefore \angle EFB' = \angle BEF$$

$$\therefore \angle BEF = \angle EFB, \therefore BE = BF$$

同理 $BF = FG$, $\therefore BE = FG$

$\therefore$ 四边形 BEFG 是平行四边形. (5 分)

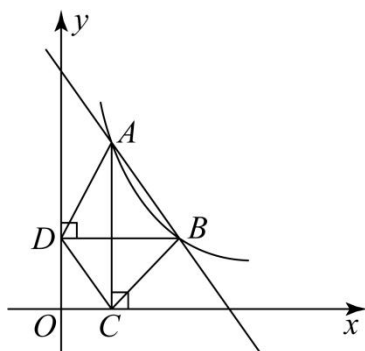
(2)当 $\angle BFE = 60^\circ$ 时, $\triangle BEF$ 为等边三角形

$\therefore BE=EF$, $\therefore$ 平行四边形 $BEFG$ 是菱形. (5 分)

(1) 由题意, $\angle EFB' = \angle EFB$, $\because BE \parallel FG$, $\therefore \angle EFB' = \angle BEF$, $\therefore \angle BEF = \angle EFB$, $\therefore BE=BF$, 同理 $BF=FG$, $\therefore BE=FG$, $\therefore$ 四边形 $BEFG$ 是平行四边形;

(2) 当 $\angle BFE=60^\circ$ 时, $\triangle BEF$ 为等边三角形, $\therefore BE=EF$, $\therefore$ 平行四边形 $BEFG$ 是菱形.

25. 如图,在直角坐标平面内,函数 $y = \frac{m}{x} (x>0, m \text{ 是常数})$ 的图象经过 $A(1,4), B(a,b)$, 其中 $a>1$. 过点 A 作 x 轴垂线, 垂足为 C , 过点 B 作 y 轴垂线, 垂足为 D , 连接 AD , DC , CB .



(1)若 $\triangle ABD$ 的面积为 4, 求点 B 的坐标;

(2)求证: $DC \parallel AB$;

(3)当 $AD=BC$ 时, 求直线 AB 的函数解析式.

【答案】 (1) $(3, \frac{4}{3})$; (2) 见解析; (3) $y=-2x+6$ 或 $y=-x+5$.

【解析】

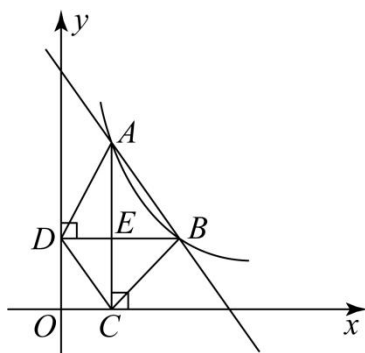
【分析】 (1) 由函数 $y = \frac{m}{x} (x>0, m \text{ 是常数})$ 的图象经过 $A(1, 4)$, 可求 $m=4$, 由已知条件可得 B 点的坐标为 $(a, \frac{4}{a})$, 又由 $\triangle ABD$ 的面积为 4, 即 $\frac{1}{2}a(4 - \frac{4}{a}) = 4$, 得 $a=3$, 所以点 B 的坐标为 $(3, \frac{4}{3})$;

(2) 依题意可证, $\frac{BE}{DE} = \frac{a-1}{1} = a-1$, $\frac{AE}{CE} = \frac{4 - \frac{4}{a}}{\frac{4}{a}} = a-1$, $\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$, 所以 $DC \parallel AB$;

(3) 由于 $DC \parallel AB$, 当 $AD=BC$ 时, 有两种情况: ①当 $AD \parallel BC$ 时, 四边形 $ADCB$ 是平行四边形, 由 (2) 得, 点 B 的坐标是 $(2, 2)$, 设直线 AB 的函数解析式为 $y=kx+b$, 用待定系数法可以求出解析式 (把点 A , B 的坐标代入), 是 $y=-2x+6$.

②当 AD 与 BC 所在直线不平行时, 四边形 $ADCB$ 是等腰梯形, 则 $BD=AC$, 可求点 B 的坐标是 $(4, 1)$, 设直线 AB 的函数解析式 $y=kx+b$, 用待定系数法可以求出解析式 (把点 A , B 的坐标代入), 是 $y=-x+5$.

【详解】 (1) $\because$ 函数 $y = \frac{m}{x} (x>0, m \text{ 是常数})$ 图象经过 $A(1,4)$,



$$\therefore m=4.$$

$$\therefore y = \frac{4}{x},$$

设 BD, AC 交于点 E , 据题意, 可得 B 点的坐标为 $(a, \frac{4}{a})$, D 点的坐标为 $(0, \frac{4}{a})$, E 点的坐标为 $(1, \frac{4}{a})$,

$$\because a > 1,$$

$$\therefore DB = a, AE = 4 - \frac{4}{a}.$$

由 $\triangle ABD$ 的面积为 4, 即 $\frac{1}{2} a(4 - \frac{4}{a}) = 4$, 得 $a = 3$,

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (3, \frac{4}{3});$$

(2) 证明: 据题意, 点 C 的坐标为 $(1, 0)$, $DE = 1$,

$$\because a > 1,$$

$$\text{易得 } EC = \frac{4}{a}, BE = a - 1,$$

$$\therefore \frac{BE}{DE} = \frac{a-1}{1} = a-1, \frac{AE}{CE} = \frac{4 - \frac{4}{a}}{\frac{4}{a}} = a-1.$$

$$\therefore \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE} \text{ 且 } \angle AEB = \angle CED,$$

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle CED,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CDE,$$

$$\therefore DC \parallel AB;$$

(3) $\because DC \parallel AB$,

$\therefore$ 当 $AD = BC$ 时, 有两种情况:

① 当 $AD \parallel BC$ 时, 四边形 $ADCB$ 是平行四边形, 由 (2) 得,

$$\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE} = a - 1,$$

$$\therefore a - 1 = 1, \text{ 得 } a = 2.$$

∴ 点 B 的坐标是(2,2).

设直线 AB 的函数解析式为 $y=kx+b$, 把点 A, B 的坐标代入,

$$\text{得} \begin{cases} 4 = k + b \\ 2 = 2k + b \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -2 \\ b = 6 \end{cases}.$$

故直线 AB 的函数解析式是 $y=-2x+6$.

②当 AD 与 BC 所在直线不平时, 四边形 ADCB 是等腰梯形, 则 $BD=AC$,

∴ $a=4$,

∴ 点 B 的坐标是(4,1).

设直线 AB 的函数解析式为 $y=kx+b$, 把点 A, B 的坐标代入,

$$\text{得} \begin{cases} 4 = k + b \\ 1 = 4k + b \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 5 \end{cases},$$

故直线 AB 的函数解析式是 $y=-x+5$.

综上所述, 所求直线 AB 的函数解析式是 $y=-2x+6$ 或 $y=-x+5$.

【点睛】此题考查反比例函数综合题, 待定系数法求一次函数解析式, 解题关键在于把已知点代入解析式.

26. 如图 1, 在等腰梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, E 是 AB 的中点, 过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 CD 于点 F, $AB=4$, $BC=6$, $\angle B=60^\circ$.

(1) 求点 E 到 BC 的距离;

(2) 点 P 为线段 EF 上的一个动点, 过点 P 作 $PM \perp EF$ 交 BC 于 M, 过 M 作 $MN \parallel AB$ 交折线 ADC 于 N, 连结 PN, 设 $EP=x$.

①当点 N 在线段 AD 上时 (如图 2), $\triangle PMN$ 的形状是否发生改变? 若不变, 求出 $\triangle PMN$ 的周长; 若改变, 请说明理由;

②当点 N 在线段 DC 上时 (如图 3), 是否存在点 P, 使 $\triangle PMN$ 为等腰三角形? 若存在, 请求出所有满足条件的 x 的值; 若不存在, 请说明理由.

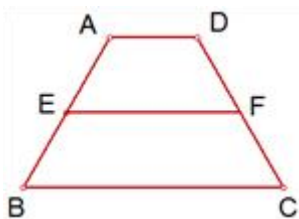


图 1

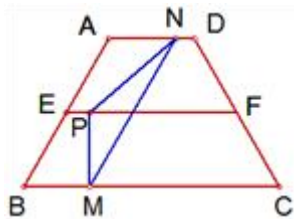


图 2

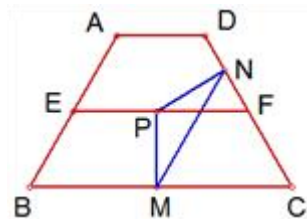


图 3

②当点 N 在线段 DC 上时, $\triangle CMN$ 恒为等边三角形.

如图 5, 当 $PM=PN$ 时, $\triangle PMC$ 与 $\triangle PNC$ 关于直线 PC 对称, 点 P 在 $\angle DCB$ 的平分线上.

在 $Rt\triangle PCM$ 中, $PM=\sqrt{3}$, $\angle PCM=30^\circ$, 所以 $MC=3$.

此时 M、P 分别为 BC、EF 的中点, $x=2$.

如图 6, 当 $MP=MN$ 时, $MP=MN=MC=\sqrt{3}$, $x=GM=GC-MC=5-\sqrt{3}$.

如图 7, 当 $NP=NM$ 时, $\angle NMP=\angle NPM=30^\circ$, 所以 $\angle PNM=120^\circ$.

又因为 $\angle FNM=120^\circ$, 所以 P 与 F 重合.

此时 $x=4$.

综上所述, 当 $x=2$ 或 4 或 $5-\sqrt{3}$ 时, $\triangle PMN$ 为等腰三角形.

