

育才初级中学 2024 学年第二学期八年级期中考试

数学试卷

(满分 100 分, 考试时间 90 分钟) 2025.04

注意: 本试卷共 26 题. 请将所有答案做在答题纸的指定位置上, 做在试卷上不计分.

一、选择题 (每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列关系式中, y 不是 x 的一次函数的是 ()

- A. $x + 3y = 1$ B. $2x + 3y = 0$ C. $y = \frac{1}{2x} + 1$ D. $y = -\frac{3x-1}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】此题主要考查了一次函数的定义, 正确把握一次函数的定义是解题的关键. 一般地, 形如 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的函数叫做一次函数, 据此进行判断即可.

【详解】解: A. $x + 3y = 1$, 是一次函数, 故 A 不符合题意;

B. $2x + 3y = 0$, 是一次函数, 故 B 不符合题意;

C. $y = \frac{1}{2x} + 1$, 不是一次函数, 故 C 符合题意;

D. $y = -\frac{3x-1}{4}$, 是一次函数, 故 D 不符合题意;

故选: C.

2. 下列关于 x 的方程中, 没有实数解的是 ()

- A. $(1-x) \cdot \sqrt{x-2} = 0$; B. $\sqrt{(1-x)} \cdot (x-2) = 0$;
C. $\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x-2} = 0$; D. $\sqrt{(1-x)(x-2)} = 0$.

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件、无理方程的解法判断即可.

【详解】解: A. $(1-x) \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 的实数解是 $x = 2$;

B. $\sqrt{(1-x)} \cdot (x-2) = 0$ 实数解是 $x = 1$;

C. 由 $\sqrt{(1-x)}$ 得, $x \leq 1$,

由 $\sqrt{x-2}$ 得, $x \geq 2$,

∴ 方程没有实数解；

D. $\sqrt{(1-x)(x-2)}=0$ 的实数解是 $x=1$ 或 $x=2$ ；

故选：C.

【点睛】 本题考查的是无理方程的解，掌握二次根式有意义的条件、无理方程的解法是解题的关键.

3. 已知关于 x 的方程 $b(x+3)=4$ ，则下列说法不正确的是（ ）

A. $b=0$ 时方程无解

B. 无论 b 的值为多少，方程的解不可能是 $x=-3$

C. $b \neq 0$ 时，方程解为 $x = \frac{4}{b} - 3$

D. $b=0$ 时 $x=1$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查一元一次参数方程解的情况，正确理解一元一次参数方程解的情况是解题的关键.
根据题意逐项求解判断即可.

【详解】 A. 当 $b=0$ 时， $0=4$ ，不符合题意，故方程无解，选项正确；

B. 当 $x=-3$ 时， $0=4$ ，不符合题意，故无论 b 的值为多少，方程的解不可能是 $x=-3$ ，选项正确；

C. 当 $b \neq 0$ 时， $b(x+3)=4$

去括号得， $bx+3b=4$

移项得， $bx=4-3b$

系数化为 1 得， $x = \frac{4}{b} - 3$ ，故选项正确；

D. 当 $b=0$ 时， $0=4$ ，不符合题意，故方程无解，选项错误.

故选：D.

4. 用换元法解方程 $\frac{3x}{x-1} + \frac{2x-2}{x} + 3 = 0$ 时，若设 $\frac{x}{x-1} = y$ ，则原方程可以化为（ ）

A. $3y^2 + 2y + 3 = 0$

B. $3y^2 + 3y + 2 = 0$

C. $2y^2 + 3y + 3 = 0$

D. $2y^2 + 2y + 3 = 0$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，解题的关键是熟练掌握利用换元法，把一个式子做为整体进行替换，将分式方程化简为一元二次方程.

把 $\frac{x}{x-1} = y$ 代入原方程，得出 $3y + \frac{2}{y} + 3 = 0$ ，再进行整理即可.

【详解】解：整理 $\frac{3x}{x-1} + \frac{2x-2}{x} + 3 = 0$ ，得 $\frac{3x}{x-1} + \frac{2(x-1)}{x} + 3 = 0$ ，

把 $\frac{x}{x-1} = y$ 代入方程得： $3y + \frac{2}{y} + 3 = 0$ ，

整理得： $3y^2 + 3y + 2 = 0$ 。

故选 B。

5. 下列命题中是真命题的是（ ）

A. 对角线相等的矩形是正方形

B. 对角线互相垂直的四边形是菱形

C. 对角线互相垂直的平行四边形是矩形

D. 对角线互相平分且相等的四边形是矩形

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了判断命题真假，平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理，熟练掌握平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理是解此题的关键。

根据平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理判断即可得出答案。

【详解】解：A、对角线垂直的矩形是正方形，故原说法错误，不符合题意；

B、对角线互相垂直的平行四边形是菱形，故原说法错误，不符合题意；

C、对角线相等的平行四边形是矩形，故原说法错误，不符合题意；

D、对角线互相平分且相等的四边形是矩形，正确，符合题意。

故选：D。

6. 用两个全等的直角三角形拼成下列图形：①平行四边形；②矩形；③菱形；④正方形；⑤等腰三角形，⑥等边三角形，一定可以拼成的是（ ）

A. ①④⑤

B. ①②③④

C. ①②⑤

D. ②⑤⑥

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了正方形、菱形、矩形、平行四边形、等腰三角形、等边三角形的性质的应用，属于几何构图问题，解决本题的关键熟悉以上图形的性质，也可以利用两个相同的三角板亲自动手拼一拼，加深对问题的理解。

由于菱形和正方形中都有四边相等的特点，而直角三角形中不一定有两边相等，故两个全等的直角三角形不能拼成菱形和正方形；等边三角形的三条边都相等，而直角三角形的一条直角边不一定等于斜边的一半，

故两个全等的直角三角形不一定能拼成等边三角形；而平行四边形，矩形，等腰三角形都可以由两个全等的直角三角形拼成.

【详解】解：两个全等的直角三角形一定可以拼成平行四边形，故①符合题意；

两个全等的直角三角形一定可以拼成矩形，故②符合题意；

两个全等的直角三角形不一定可以拼成菱形，故③不符合题意；

两个全等的直角三角形不一定可以拼成正方形，故④不符合题意；

两个全等的直角三角形一定可以拼成等腰三角形，故⑤符合题意；

两个全等的直角三角形不一定可以拼成等边三角形，故⑥不符合题意；

故选：C.

二、填空题（每题3分，满分36分）

7. 直线 $y = -3x - 2$ 向下平移3个单位后，所得直线的表达式是_____.

【答案】 $y = -3x - 5$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象的平移规律，熟记平移规律是解题关键.

根据一次函数图象的平移规律即可得.

【详解】解：直线 $y = -3x - 2$ 向下平移3个单位后，所得直线的表达式是 $y = -3x - 2 - 3 = -3x - 5$.

故答案为： $y = -3x - 5$.

8. 一次函数 $y = (m - 3)x + m + 2$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 3$

【解析】

【分析】 由一次函数的函数值 y 随 x 的增大而减小可得 $m - 3$ 为负，从而可求得 m 的取值范围.

【详解】解：由题意知， $m - 3 < 0$,

则 $m < 3$,

故答案为： $m < 3$.

【点睛】 本题考查了一次函数的图象与性质，熟悉一次函数的图象与性质是关键.

9. 已知直线 $y = (m - 1)x + m$ 与直线 $y = 2x + 3m - 1$ 平行，则 $m =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查两条直线平行问题，解题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件.

根据两直线平行，可以得到关于 m 的方程，从而可以求得 m 的值.

【详解】 解： $\because$ 直线 $y = (m-1)x + m$ 与直线 $y = 2x + 3m - 1$ 平行，

$$\therefore m-1=2,$$

解得， $m=3$.

故答案为： 3.

10. 分式方程 $\frac{x^2-4}{x-2}=1$ 的解为_____.

【答案】 $x=-1$

【解析】

【分析】 此题考查了解分式方程. 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【详解】 解： $\frac{x^2-4}{x-2}=1$,

去分母，方程的两边同时乘以 $x-2$ 得： $x^2-4=x-2$

移项合并同类项得， $x^2-x-2=0$,

$$\therefore (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x+1=0 \text{ 或 } x-2=0$$

解得 $x_1=-1$, $x_2=2$

检验： 将 $x_1=-1$ 代入 $x-2 \neq 0$ ； 将 $x_2=2$ 代入 $x-2=0$ ， 应舍去；

$\therefore x=-1$ 是原分式方程的解.

故答案为： $x=-1$.

11. 方程 $\sqrt{x+2}=-x$ 的解是_____.

【答案】 $x=-1$.

【解析】

【分析】 把方程两边平方后求解，注意检验.

【详解】 把方程两边平方得 $x+2=x^2$,

整理得 $(x-2)(x+1)=0$,

解得： $x = 2$ 或 -1 ，

经检验， $x = -1$ 是原方程的解．

故本题答案为： $x = -1$ ．

【点睛】 本题考查无理方程的求法，注意无理方程需验根．

12. 在 $\square ABCD$ 中，如果 $\angle A = 2\angle B$ ，那么 $\angle C =$ _____ 度．

【答案】 120

【解析】

【分析】 本题考查了行四边形对边平行的性质，解题的关键是掌握平行四边形的邻角互补和对角相等结论．
平行四边形中，利用邻角互补和 $\angle A = 2\angle B$ 求出 $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle A = 120^\circ$ ，利用对角相等，即可得 $\angle C$ 的值．

【详解】 $\because$ 在 $\square ABCD$ 中，

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

如果 $\angle A = 2\angle B$ ，

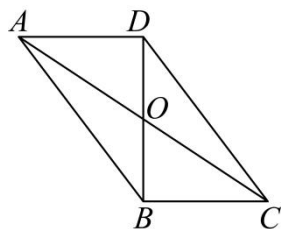
$$\therefore 2\angle B + \angle B = 180^\circ$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ, \angle A = 120^\circ$$

$$\therefore \angle C = \angle A = 120^\circ.$$

故答案为：120.

13. 如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $BD \perp BC$ ， $AD = 6$ ， $AB = 10$ ，则 $AO =$ _____.



【答案】 $2\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的性质，勾股定理的运用，属于基础题．

根据平行四边形的性质得： $BO = DO = \frac{1}{2}BD$ ， $AD \parallel BC$ ，再由 $BD \perp BC$ ，得出 $BD \perp AD$ ，结合勾股定理求出 BD ，再根据勾股定理求出 AO ．

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore BO = DO = \frac{1}{2}BD, AD \parallel BC,$$

$$\therefore BD \perp BC,$$

$$\therefore BD \perp AD,$$

$$\because BD \perp BC, AD = 6, AB = 10,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore BO = DO = \frac{1}{2}BD = 4,$$

$$\therefore AO = \sqrt{AD^2 + DO^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13},$$

故答案为: $2\sqrt{13}$.

14. 已知菱形的两条对角线的长分别是 6 和 8, 则菱形的面积为_____.

【答案】 24

【解析】

【分析】 此题主要考查了菱形的性质, 正确把握菱形面积求法是解题关键.

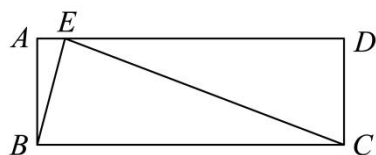
直接利用菱形的面积等于对角线乘积的一半, 进而得出答案.

【详解】 解: $\because$ 菱形的两条对角线长分别是 6 和 8,

$$\therefore \text{菱形的面积为: } \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24.$$

故答案为: 24.

15. 已知点 E 为矩形 $ABCD$ 的边 AD 上一点, 若 $BC = EC$, $\angle ABE = 15^\circ$, 如果 $AB = 4\text{cm}$, 那么 $BC =$ _____ cm .



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质, 等边对等角, 含 30° 度角的直角三角形的性质, 掌握“ 30° 度角对应的直角边长度为斜边长度的一半”是解题的关键.

利用余角的性质求得 $\angle AEB = \angle EBC = 75^\circ$, 利用等边对等角求得 $\angle CEB = \angle ECB = 75^\circ$, 再利用平角的定义求得 $\angle CED = 30^\circ$, 根据含 30° 度角的直角三角形的性质即可求解.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle A = \angle ABC = \angle D = 90^\circ, AB = CD = 4\text{cm}, AD \parallel BC,$$

$$\because \angle ABE = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EBC = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ,$$

$$\therefore BC = EC,$$

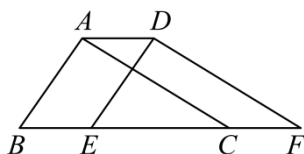
$$\therefore \angle CEB = \angle EBC = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = 180^\circ - 75^\circ - 75^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore BC = EC = 2CD = 8\text{cm}.$$

故答案为：8.

16. 已知：如图， $\triangle ABC$ 沿射线 BC 平移后得 $\triangle DEF$ ， $3BE = 2EC$ ，若 $\triangle ABC$ 的面积为 S ，则四边形 $ACFD$ 的面积为_____。（用含 S 的代数式表示）



【答案】 $\frac{4}{5}S$

【解析】

【分析】该题考查了平移的性质，平行四边形的性质和判定，设 $BE = 2x$ ，则 $EC = 3x$ ， $\triangle ABC$ 的高为 h ，表示出 $S = S_{\triangle ABC} = \frac{5}{2}xh$ ，即 $xh = \frac{2}{5}S$ ，根据平移的性质说明四边形 $ADFC$ 是平行四边形，根据 $S_{ADFC} = CF \cdot h = 2xh$ 求解即可.

【详解】解：设 $BE = 2x$ ，则 $EC = 3x$ ， $\triangle ABC$ 的高为 h ，
则 $S = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot (2x + 3x)h = \frac{5}{2}xh$ ，即 $xh = \frac{2}{5}S$ ，
根据平移的性质得 $CF = AD = BE = 2x$ ， $AD \parallel CF$ ， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的高都为 h ，
 $\therefore$ 四边形 $ADFC$ 是平行四边形，

$$\therefore S_{ADFC} = CF \cdot h = 2xh = 2 \times \frac{2}{5}S = \frac{4}{5}S,$$

故答案为： $\frac{4}{5}S$.

17. 在 $\square ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于点 O ，若 $\angle BOC = 120^\circ$ ， $AD = 7$ ， $BD = 10$ ．则 $\square ABCD$ 的面积为_____.

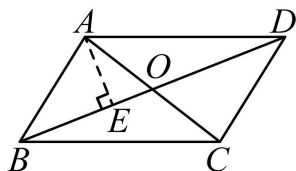
【答案】 $15\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质以及勾股定理，含 30° 角直角三角形的性质，解题关键是掌握数形结合思想与方程思想的应用.

过点 A 作 $AE \perp BD$ 于 E , 设 $OE = a$, 则 $OA = 2a$, $AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{3}a$, 在直角三角形 ADE 中, 利用勾股定理可得 $DE^2 + AE^2 = AD^2$, 进而可求出 a 的值, 由平行四边形的性质可知: $\square ABCD$ 的面积 $= 2S_{\triangle ABD}$, 即可求解.

【详解】解: 过点 A 作 $AE \perp BD$ 于 E ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 10 = 5,$$

$$\because \angle BOC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = 60^\circ,$$

$$\text{设 } OE = a, \text{ 则 } OA = 2a, \quad AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore DE = 5 + a,$$

在直角三角形 ADE 中, 由勾股定理可得 $DE^2 + AE^2 = AD^2$,

$$\therefore (5 + a)^2 + (\sqrt{3}a)^2 = 7^2,$$

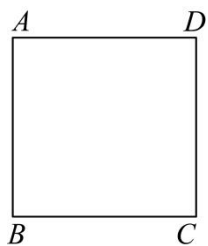
$$\text{解得: } a = \frac{3}{2} \text{ (负数已舍),}$$

$$\therefore AE = \sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \square ABCD \text{ 的面积} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \times 10 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 15\sqrt{3}.$$

故答案为: $15\sqrt{3}$.

18. 四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, 点 E 在边 AD 所在的直线上, 连接 CE , 以 CE 为边, 作正方形 $CEFG$ (点 D , 点 F 在直线 CE 的同侧), 连接 BF , 若 $BF = 3\sqrt{10}$, 则 AE 的长为_____.

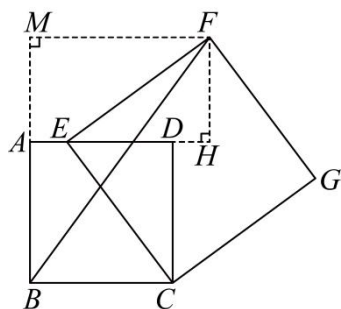


【答案】1 或 $2 + \sqrt{41}$

【解析】

【分析】本题考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理等知识，作辅助线构建直角三角形全等是解决问题的关键．分点 E 在线段 AD 上，在线段 DA 延长线上，在线段 AD 延长线上三种情况，过 F 作 $FH \perp AD$ 交直线 AD 于点 H ，作 $FM \perp AB$ 于 M ，证明 $\triangle EFH \cong \triangle CED$ ，通过全等三角形的性质用 AE 表示出 MF ， AM ，求出 BM ，由勾股定理建立方程求解即可得出答案．

【详解】解：当点 E 在线段 AD 上时，过 F 作 $FH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H ，作 $FM \perp AB$ 交 BA 延长线于 M ，如图所示，则四边形 $AMFH$ 是矩形，



$$\therefore FM = AH, \quad AM = FH,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 与 $EFGC$ 四边形是正方形，

$$\therefore EF = EC, \angle CEF = 90^\circ, \quad \angle H = \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEH + \angle CED = 90^\circ, \angle FEH + \angle EFH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFH = \angle CED,$$

$$\therefore \triangle EFH \cong \triangle CED (\text{AAS}),$$

$$\therefore FH = DE, \quad EH = CD = 4,$$

$$\therefore AM = FH = ED,$$

$$\therefore AE + DE = AD = 4, \quad DH + ED = 4,$$

$$\therefore AE = DH, \quad DE = 4 - AE,$$

$$\therefore MF = AH = 4 + AE, \quad AM = 4 - AE$$

$$\therefore BM = AB + AM = 8 - AE,$$

在 $\text{Rt}\triangle BMF$ 中，由勾股定理得 $BF^2 = BM^2 + MF^2$ ，

$$\therefore (3\sqrt{10})^2 = (8 - AE)^2 + (4 + AE)^2,$$

$\therefore AE = 5$ (舍去) 或 $AE = -1$ (舍去)，故此种情况不成立；

如图所示，当点 E 在 DA 延长线上时，过 F 作 $FH \perp AD$ 于点 H ，作 $FM \perp AB$ 交 BA 延长线于 M ，

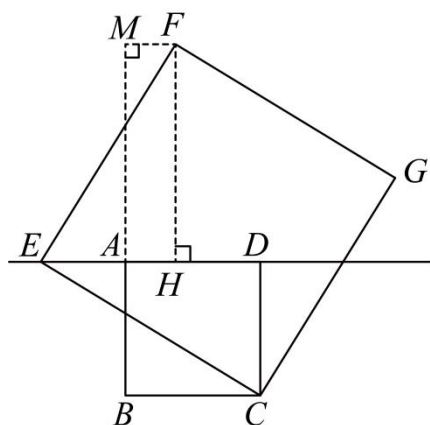
同理可得 $AM = FH = DE = 4 + AE$ ， $MF = AH = 4 - AE$ ，

$$\therefore BM = AB + AM = 8 + AE,$$

在 $\text{Rt}\triangle BMF$ 中，由勾股定理得 $BF^2 = BM^2 + MF^2$ ，

$$\therefore (3\sqrt{10})^2 = (8 + AE)^2 + (4 - AE)^2,$$

解得 $AE = 1$ 或 $AE = -5$ (舍去)；



如图所示，当点 E 在 AD 延长线上时，过 F 作 $FH \perp AD$ 交直线 AD 于点 H ，作 $FM \perp AB$ 交 BA 延长线于 M ，

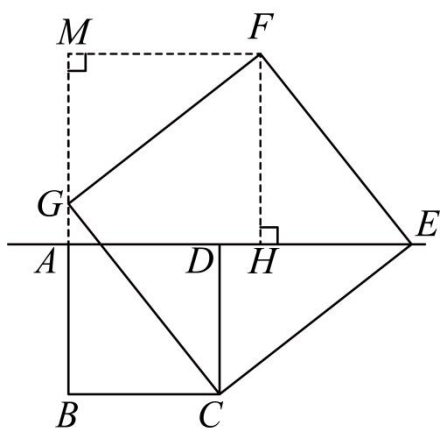
同理可得 $AM = FH = DE = AE - 4$ ， $MF = AH = AE - 4$ ，

$$\therefore BM = AB + AM = AE,$$

在 $\text{Rt}\triangle BMF$ 中，由勾股定理得 $BF^2 = BM^2 + MF^2$ ，

$$\therefore (3\sqrt{10})^2 = AE^2 + (AE - 4)^2,$$

解得 $AE = 2 + \sqrt{41}$ 或 $AE = 2 - \sqrt{41}$ (舍去)；



综上所述， AE 的长为 1 或 $2+\sqrt{41}$.

故答案为：1 或 $2+\sqrt{41}$.

三、解答题 (19~24 题每题 6 分，25~26 题每题 8 分，满分 52 分)

19. 解方程： $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = 1$.

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，熟练掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

方程两边同时乘以 $(x+2)(x-2)$ ，化为整式方程，解方程并检验即可求解；

【详解】 解： $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = 1$

去分母得， $x+2-4 = x^2-4$

整理得， $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$x+1=0$ 或 $x-2=0$

解得 $x_1 = -1$ ， $x_2 = 2$

检验： 将 $x_1 = -1$ 代入 $x^2-4 = -3 \neq 0$ ，符合题意；

将 $x_2 = 2$ 代入 $2^2-4 = 0$ ，不符合题意；

$\therefore$ 原分式方程的根为 $x = -1$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{2x-y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{2x-y} = 1 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程组，设 $m = \frac{1}{x}, n = \frac{1}{2x-y}$ ，则原方程组可化为 $\begin{cases} m+n=3 \text{①} \\ 3m-n=1 \text{②} \end{cases}$ ，解方

程组 $\begin{cases} m+n=3 \text{①} \\ 3m-n=1 \text{②} \end{cases}$ 求出 m, n 的值，进而求出 x, y 的值即可得到答案.

【详解】 解：设 $m = \frac{1}{x}, n = \frac{1}{2x-y}$ ，则原方程组可化为 $\begin{cases} m+n=3 \text{①} \\ 3m-n=1 \text{②} \end{cases}$ ，

①+②得： $4m=4$ ，解得 $m=1$ ，

把 $m=1$ 代入①得： $1+n=3$ ，解得 $n=2$ ，

$$\therefore m = \frac{1}{x} = 1, \quad n = \frac{1}{2x-y} = 2,$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases},$$

检验，当 $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$ 时， $x(2x-y) \neq 0$ ，

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \text{ 是原方程的解.}$$

21. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{5} \\ y_1 = \sqrt{5} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\sqrt{5} \\ y_2 = -\sqrt{5} \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -3 \\ y_4 = -1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查解二元二次方程组，关键在于对原方程组的两个方程进行化简，重新组合.

首先对原方程组中的第一个方程进行化简，然后分别重新组合，成为两个方程组，最后解这两个方程组即可.

【详解】 解：方程 $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$ 可变形为 $(x - y)(x - 3y) = 0$,

$\therefore x - y = 0$ 或 $x - 3y = 0$,

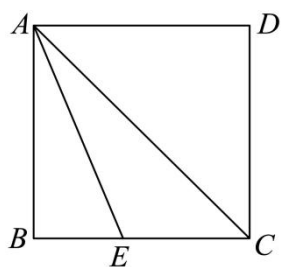
$\therefore$ 原方程组可变形为两个方程组 $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ ①, $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ ②;

解方程组①, 得 $\begin{cases} x_1 = \sqrt{5} \\ y_1 = \sqrt{5} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\sqrt{5} \\ y_2 = -\sqrt{5} \end{cases}$,

解方程组②, 得 $\begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -3 \\ y_4 = -1 \end{cases}$,

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = \sqrt{5} \\ y_1 = \sqrt{5} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\sqrt{5} \\ y_2 = -\sqrt{5} \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -3 \\ y_4 = -1 \end{cases}$.

22. 如图, AC 是正方形 $ABCD$ 的对角线, AE 平分 $\angle BAC$, 已知 $AB = 2$. 求 CE 的长.

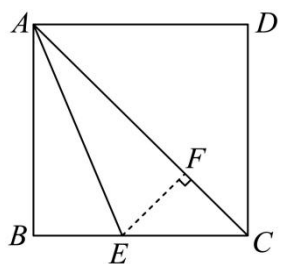


【答案】 $4 - 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 如图所示, 过点 E 作 $EF \perp AC$ 于 F , 先由勾股定理求出 $AC = 2\sqrt{2}$, 再由角平分线的性质得到 $BE = EF$, 设 $BE = EF = x$, 利用等面积法得到 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{1}{2} \times 2x + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}x$, 解方程即可得到答案.

【详解】 解: 如图所示, 过点 E 作 $EF \perp AC$ 于 F ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle B = 90^\circ, \quad AB = BC = 2$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AE \text{ 平分 } \angle BAC, \quad EF \perp AC, \quad \angle B = 90^\circ$$

$$\therefore BE = EF,$$

$$\text{设 } BE = EF = x,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ACE}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{1}{2} \times 2x + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}x,$$

$$\text{解得 } x = 2\sqrt{2} - 2,$$

$$\therefore BE = 2\sqrt{2} - 2,$$

$$\therefore CE = BC - BE = 2 - (2\sqrt{2} - 2) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

故答案为: $4 - 2\sqrt{2}$.

【点睛】 本题主要考查了正方形的性质，勾股定理，角平分线的性质，正确作出辅助线构造直角三角形是解题的关键.

23. 一辆汽车在某次行驶过程中，油箱中的剩余油量 y (升) 与行驶路程 x (千米) 之间是一次函数关系. 当汽车加满油后，行驶 120 千米时，油箱中还剩油 40 升；行驶 180 千米时，油箱中还剩油 35 升.

(1) 求出 y 与 x 之间的函数解析式，并写出定义域；

(2) 已知当油箱中的剩余油量为 10 升时，该车仪表盘会亮灯提示加油. 在距离出发点 500 千米处有一加油站，该车在加满油后，请判断司机能否在亮灯提示前行驶至此加油站，并说明理由.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{12}x + 50 (0 < x \leq 600)$; (2) 不能，理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 设 y 与 x 之间的函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，利用待定系数法求解即可；

(2) 把 $y = 10$ 代入 (1) 的关系式，求出 x 的值即可判断.

【详解】 解: (1) 设 y 与 x 之间的函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，根据题意得:

$$\begin{cases} 120k + b = 40 \\ 180k + b = 35 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{12}, \\ b = 50 \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{12}x + 50 (0 < x \leq 600);$$

(2) 不能在亮灯提示前行驶至此加油站，理由如下：

$$\text{当 } y = 10 \text{ 时, } -\frac{1}{12}x + 50 = 10,$$

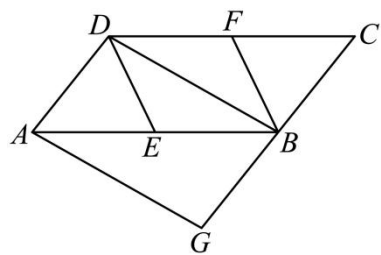
$$\text{解得 } x = 480,$$

即当油箱中的剩余油量为 10 升时，该车行驶路程为 480 千米，

因为 $480 < 500$ ，所以该车在加满油后，不能在亮灯提示前行驶至此加油站。

【点睛】本题主要考查了一次函数的应用，熟练掌握待定系数法是解答本题的关键。

24. 已知：如图，在 $\square ABCD$ 中， E 、 F 分别为边 AB 、 CD 的中点， BD 是对角线， $AG \perp DB$ 交 CB 的延长线于 G 。



(1) 求证： $DE = BF$ ；

(2) 若四边形 $BEDF$ 是菱形，则四边形 $AGBD$ 是什么特殊四边形？并证明你的结论。

【答案】(1) 见解析 (2) 矩形，理由见解析

【解析】

【分析】此题考查了平行四边形的性质和判定，菱形的性质，矩形的判定，解题的关键是掌握以上知识点。

(1) 根据平行四边形的性质得到 $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ，然后证明出四边形 $DEBF$ 是平行四边形，即可得到 $DE = BF$ ；

(2) 首先证明出四边形 $AGBD$ 是平行四边形，如图所示，连接 DG ，由菱形得到 $DE = BE$ ，然后证明出 $AB = DG$ ，即可得到平行四边形 $AGBD$ 是矩形。

【小问 1 详解】

$\because$ 在 $\square ABCD$ 中，

$$\therefore AB \parallel CD, AB = CD$$

$\because E$ 、 F 分别为边 AB 、 CD 的中点

$$\therefore BE = \frac{1}{2}AB, \quad DF = \frac{1}{2}CD$$

$$\therefore BE = DF$$

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形

$$\therefore DE = BF;$$

【小问 2 详解】

矩形，理由如下：

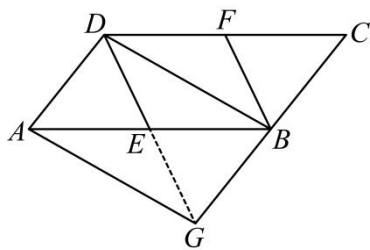
$\because$ 在 $\square ABCD$ 中，

$$\therefore AD \parallel BC$$

$$\because AG \parallel DB,$$

$\therefore$ 四边形 $AGBD$ 是平行四边形

如图所示，连接 DG



$\because E$ 为边 AB 的中点

$\therefore$ 点 E 在 DG 上

$\because$ 四边形 $BEDF$ 是菱形

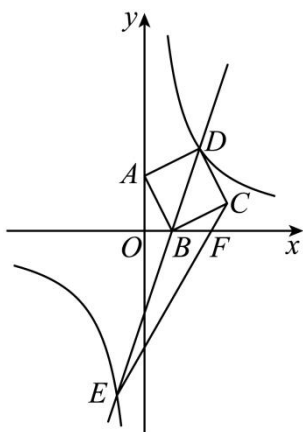
$$\therefore DE = BE$$

$$\because AE = BE, \quad DE = EG$$

$$\therefore AB = DG$$

$\therefore$ 平行四边形 $AGBD$ 是矩形.

25. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 A 的坐标为 $(0, 2)$ ，点 B 的坐标为 $(1, 0)$ ，连结 AB ，以 AB 为边在第一象限内作正方形 $ABCD$ ，直线 BD 交双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 于 D 、 E 两点，连结 CE ，交 x 轴于点 F .



(1) 求双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 和直线 DE 的解析式.

(2) 求 $\triangle DEC$ 的面积.

【答案】 (1) $y = \frac{6}{x}$, $y = 3x - 3$; (2) $\frac{15}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 作 $DM \perp y$ 轴于 M , 通过证得 $\triangle AOB \cong \triangle DMA$ (AAS), 求得 D 的坐标, 然后根据待定系数法即可求得双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 和直线 DE 的解析式.

(2) 解析式联立求得 E 的坐标, 然后根据勾股定理求得 DE 和 DB , 进而求得 DN 的长, 即可根据三角形面积公式求得 $\triangle DEC$ 的面积.

【详解】 解: $\because$ 点 A 的坐标为 $(0, 2)$, 点 B 的坐标为 $(1, 0)$,

$$\therefore OA = 2, OB = 1,$$

作 $DM \perp y$ 轴于 M ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ, AB = AD,$$

$$\therefore \angle OAB + \angle DAM = 90^\circ,$$

$$\because \angle OAB + \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAM = \angle ABO,$$

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle DMA$ 中

$$\begin{cases} \angle ABO = \angle DAM \\ \angle AOB = \angle DMA = 90^\circ \\ AB = DA \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle DMA \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AM = OB = 1, DM = OA = 2,$$

$$\therefore D(2, 3),$$

$$\because \text{双曲线 } y = \frac{k}{x} (k \neq 0) \text{ 经过 } D \text{ 点},$$

$$\therefore k = 2 \times 3 = 6,$$

$$\therefore \text{双曲线为 } y = \frac{6}{x},$$

设直线 DE 的解析式为 $y = mx + n$,

$$\text{把 } B(1, 0), D(2, 3) \text{ 代入得 } \begin{cases} m + n = 0 \\ 2m + n = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = 3 \\ n = -3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } DE \text{ 的解析式为 } y = 3x - 3;$$

(2) 连接 AC , 交 BD 于 N ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore BD$ 垂直平分 AC , $AC = BD$,

$$\text{解 } \begin{cases} y = 3x - 3 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -1 \\ y = -6 \end{cases},$$

经检验: 两组解都符合题意,

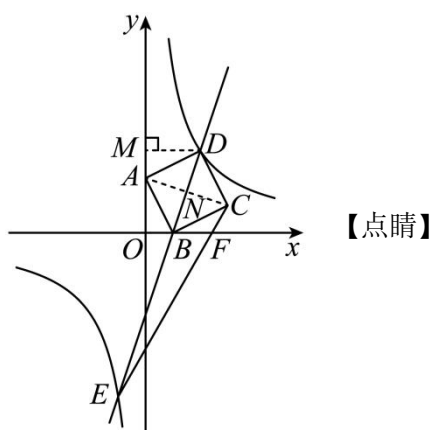
$$\therefore E(-1, -6),$$

$$\because B(1, 0), D(2, 3),$$

$$\therefore DE = \sqrt{(2+1)^2 + (3+6)^2} = 3\sqrt{10}, \quad DB = \sqrt{(2-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

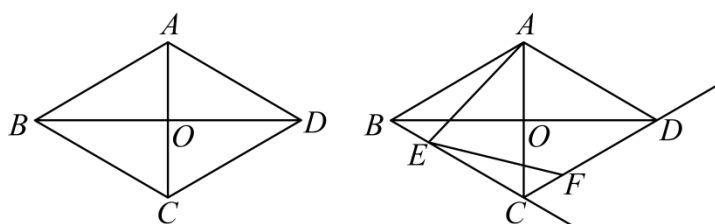
$$\therefore CN = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}DE \cdot CN = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{15}{2}.$$



本题考查的是正方形的性质，三角形全等的判定与性质，利用待定系数法求解一次函数与反比例函数的解析式，函数的交点坐标的求解，化为一元二次方程的分式方程的解法，勾股定理的应用，掌握以上知识是解题的关键.

26. 如图，等腰 $\triangle ABD$ 中， $AB = AD$ ， O 为边 BD 的中点，射线 BC 交 AO 的延长线于点 C ， $\angle DBC = \angle DBA$.



- (1) 求证：四边形 $ABCD$ 为菱形；
- (2) 若 $\angle BAD = 120^\circ$ ，点 E 、 F 分别在射线 BC 、射线 CD 上，且 $EA = EF$ ，求证： $\angle AEF = 60^\circ$ ；
- (3) 在(2)的条件下，连接 DE ，若 $\triangle AED$ 为直角三角形， $AB = 2$ ，直接写出 DF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) DF 的长为1.

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle AOB \cong \triangle COB$ (ASA)，推出 $AB = BC$ ， $AO = OC$ ，得到 BD 是线段 AC 的垂直平分线，再得到 $AD = CD = AB = BC$ ，即可推出四边形 $ABCD$ 为菱形；

(2) 在 BA 上取点 H ，使 $BH = BE$ ，作 $AM \perp EH$ 交 EH 的延长线于点 M ，作 $EN \perp FC$ 交 FC 的延长线于点 N ，证明 $\triangle AHM \cong \triangle ECN$ (AAS)，推出 $AM = EN$ ， $\angle HAM = \angle CEN$ ，再证明

$\text{Rt}\triangle EAM \cong \text{Rt}\triangle FEN$ (HL)，得到 $\angle EAM = \angle FEN$ ，然后利用三角形的外角性质即可求得 $\angle AEF = 60^\circ$ ；

(3) 证明 $\triangle AEF$ 、 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 都是等边三角形，分两种情况讨论，根据等边三角形的性质结合直角三角形的性质即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 等腰 $\triangle ABD$ 中, $AB = AD$, O 为边 BD 的中点,

$$\therefore AO \perp BD,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COB = 90^\circ,$$

$$\because \angle DBC = \angle DBA, \quad BO = BO,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COB (\text{ASA}),$$

$$\therefore AB = BC, \quad AO = OC,$$

$\therefore BD$ 是线段 AC 的垂直平分线,

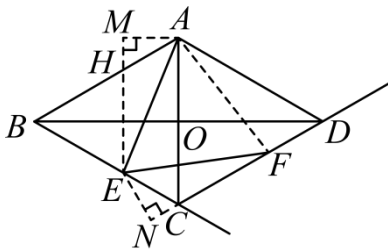
$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore AD = CD = AB = BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为菱形;

【小问 2 详解】

证明: 在 BA 上取点 H , 使 $BH = BE$, 作 $AM \perp EH$ 交 EH 的延长线于点 M , 作 $EN \perp FC$ 交 FC 的延长线于点 N ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 120^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ, \quad \angle BCD = 120^\circ, \quad AB = BC,$$

$$\therefore \triangle BEH \text{ 是等边三角形, } AH = EC, \quad \angle ECN = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AHM = \angle BHE = 60^\circ = \angle ECN,$$

$$\because \angle M = \angle N = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AHM \cong \triangle ECN (\text{AAS}),$$

$$\therefore AM = EN, \quad \angle HAM = \angle CEN = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\because \angle M = \angle N = 90^\circ, \quad EA = EF,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle EAM \cong \text{Rt}\triangle FEN (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle EAM = \angle FEN,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle EAM - 30^\circ = \angle FEN - 30^\circ = \angle FEC,$$

由三角形的外角性质知 $\angle AEC = \angle ABC + \angle BAE = 60^\circ + \angle FEC$,

又 $\angle AEC = \angle AEF + \angle FEC$,

$\therefore \angle AEF = 60^\circ$;

【小问3 详解】

解: 连接 AF ,

$\therefore \angle AEF = 60^\circ$, $EA = EF$,

$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形,

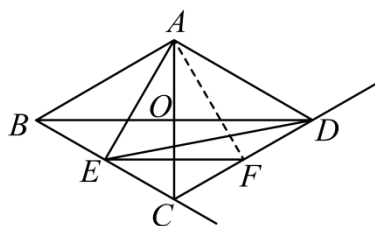
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 120^\circ$,

$\therefore \angle BAC = \angle CAD = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$, $AD \parallel CB$, $AB = CD = 2$,

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 都是等边三角形,

$\therefore \angle BAC = \angle EAF = \angle CAD = 60^\circ$,

当 $\angle EAD = 90^\circ$ 即 $EA \perp AD$ 时, 此时 $EA \perp BC$,

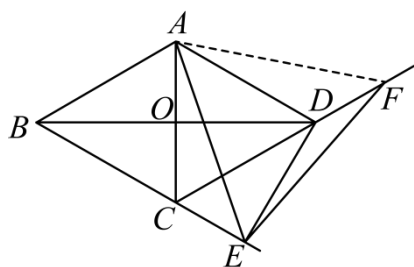


$\therefore \angle EAC = \angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ$,

$\therefore \angle CAF = 60^\circ - \angle EAC = 30^\circ = \angle DAF$,

$\therefore CF = DF = \frac{1}{2} CD = 1$;

当 $\angle ADE = 90^\circ$ 即 $ED \perp AD$ 时, 此时 $ED \perp BC$,



$\therefore \triangle AEF$ 和 $\triangle ADC$ 都是等边三角形,

$\therefore AC = AD$, $AE = AF$, $\angle CAD = \angle EAF = 60^\circ$,

$\therefore \angle CAE = 60^\circ - \angle EAD = \angle DAF$,

$\therefore \triangle CAE \cong \triangle DAF$ (SAS),

$$\therefore CE = DF,$$

$$\therefore \angle BCD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 60^\circ, \quad \angle CDE = 30^\circ,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}CD = 1;$$

$$\therefore \angle AED \text{ 恒小于 } 90^\circ,$$

$$\therefore \text{不存在 } \angle AED = 90^\circ \text{ 的情况,}$$

综上, DF 的长为 1.

【点睛】 本题考查了菱形的判定, 平行四边形的性质, 等边三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 直角三角形的性质. 正确引出辅助线解决问题是解题的关键.