

2024 学年度第二学期初二年级数学学科期中考试

一、选择题

1. 直线 $y = kx + b$ 经过一、二、四象限, 则 k 和 b 应满足的条件是 ()

- A. $k > 0, b > 0$ B. $k > 0, b < 0$ C. $k < 0, b > 0$ D. $k < 0, b < 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象与系数的关系: 对于一次函数 $y = kx + b$ (k 为常数, $k \neq 0$), 当 $k > 0, b > 0$, $y = kx + b$ 的图象在一、二、三象限; 当 $k > 0, b < 0$, $y = kx + b$ 的图象在一、三、四象限; 当 $k < 0, b > 0$, $y = kx + b$ 的图象在一、二、四象限; 当 $k < 0, b < 0$, $y = kx + b$ 的图象在二、三、四象限.

【详解】解: $\because$ 直线 $y = kx + b$ 经过一、二、四象限,
 $\therefore k < 0, b > 0$,
故选: C.

2. 下列方程中, 属于二项方程的是 ()

- A. $x^3 - 4x = 0$ B. $x^2 + 5 = 0$ C. $x^4 - 2x^3 = 2$ D. $xy = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了二项方程的定义, 二项方程的左边只有两项, 其中一项含未知数 x , 这项的次数就是方程的次数; 另一项是常数项; 方程的右边是 0, 结合选项进行判断即可.

【详解】解: A、 $x^3 - 4x = 0$, 不是二项方程, 故本选项错误;
B、 $x^2 + 5 = 0$, 是二项方程, 故本选项正确;
C、 $x^4 - 2x^3 = 2$, 不是二项方程, 故本选项错误;
D、 $xy = 0$, 不是二项方程, 故本选项错误;

故选: B.

3. 下列方程没有实数根的个数是 ()

- (1) $\sqrt{x-2} + 3 = 0$ (2) $\sqrt{2x+3} = -x$ (3) $\frac{2x}{x-1} = \frac{2}{x-1}$ (4) $x^4 + 1 = 0$,

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了高次方程、无理方程及分式方程的定义的知识，掌握相关知识的应用是解题的关键. 利用高次方程、无理方程及分式方程的定义分别判断后即可确定正确的选项.

【详解】解：(1) $\because \sqrt{x-2}+3=0$,

$\therefore \sqrt{x-2}=-3$, 方程没有实数根,

(2) $\because \sqrt{2x+3}=-x$,

$\therefore 2x+3=(-x)^2$,

$\therefore x^2-2x-3=0$,

解得: $x_1=3$, $x_2=-1$,

经检验 $x=-1$ 是原方程的解,

(3) $\because \frac{2x}{x-1}=\frac{2}{x-1}$,

$\therefore 2x=2$,

$x=1$,

经检验 $x=1$ 是原方程的增解,

$\therefore$ 原分式方程无解,

(4) $\because x^4+1=0$,

$\therefore x^4=-1$, 方程没有实数根,

综上: 方程没有实数根的个数是3个,

故选: C.

4. 某灾区恢复生产, 计划在一定时间内种 60 亩蔬菜, 实际播种时每天比原计划多种 3 亩, 因此提前一天完成任务, 问实际种了几天? 现设实际种了 x 天, 则可列出方程 ()

A. $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+1}=3$

B. $\frac{60}{x-1}-\frac{60}{x}=3$

C. $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+3}=1$

D. $\frac{60}{x-3}-\frac{60}{x}=1$

【答案】A

【解析】

【分析】设实际种了 x 天, 则原计划需要 $(x+1)$ 天, 根据题意, 实际每天种的亩数=原计划每天种的亩数=3,

列分式方程即可.

【详解】设实际种了 x 天, 则原计划需要 $(x+1)$ 天, 根据题意, 得

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+1} = 3.$$

故选 A.

【点睛】本题考查了分式方程的应用, 根据题意列出分式方程是解题的关键.

5. 平行四边形的两条对角线分别为 6 和 10, 则其中一条边长 m 的取值范围为 ()

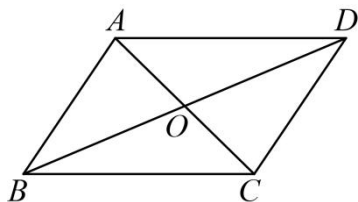
- A. $0 < m < 10$ B. $0 < m < 6$ C. $4 < m < 6$ D. $2 < m < 8$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质以及三角形的三边关系定理, 解题的关键是利用三边关系确定范围. 根据平行四边形对角线互相平分求出两对角线的一半, 再根据三角形的任意两边之和大于第三边, 三角形的任意两边之差小于第三边求解即可.

【详解】解: 如图, $AC = 6$, $BD = 10$, $AB = m$,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC = 3, \quad OD = OB = \frac{1}{2}BD = 5,$$

在 AOB 中, $OB - OA < AB < OB + OA$, 即 $5 - 3 < m < 5 + 3$,

$$\therefore 2 < m < 8,$$

故选: D.

6. 一张平行四边形纸片折一次, 折痕平分平行四边形的面积, 那么这样的折法有 ()

- A. 无数种 B. 4 种 C. 2 种 D. 1 种

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查平行四边形是中心对称图形的性质, 平行四边形的两条对角线交于一点, 这个点是平行四边形的中心, 也是两条对角线的中点, 经过中心的任意一条直线可将平行四边形分成完全重合的两个图形.

【详解】解: 因为平行四边形是中心对称图形, 任意一条过平行四边形对角线交点的直线都平分四边形的

面积,

则这样的折纸方法共有无数种.

故选: A.

二、填空题

7. 若一次函数 $y=kx-(2k+1)$ 是正比例函数, 则 k 的值为_____.

【答案】 -0.5.

【解析】

【分析】 让 x 的系数不为 0, 常数项为 0 列式求值即可.

【详解】 $\because y=kx-(2k+1)$ 是正比例函数,

$\therefore k \neq 0, -(2k+1) = 0,$

解得 $k=-0.5,$

故答案为-0.5.

【点睛】 考查正比例函数的定义: 一次项系数不为 0, 常数项等于 0.

8. 将直线 $y=2x+4$ 向下平移 3 个单位, 则得到的新直线的解析式为_____.

【答案】 $y=2x+1$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的平移, 掌握函数图象平移规律“左加右减, 上加下减”是解题的关键. 根据一次函数平移规律“上加下减”即可求解.

【详解】 解: $\because$ 直线 $y=2x+4$ 向下平移 3 个单位,

$\therefore$ 得到的新直线的解析式为 $y=2x+4-3=2x+1,$

故答案为: $y=2x+1.$

9. 八边形的内角和为_____度.

【答案】 1080

【解析】

【详解】 解: 八边形的内角和 $=180^\circ \times (8-2) = 1080^\circ,$

故答案为: 1080.

10. 如果方程 $\sqrt{x+2} = 2m-1$ 无实数解, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < \frac{1}{2}$ 或 $m < 0.5$

【解析】

【分析】本题考查了解无理方程和解一元一次不等式，能根据算术平方根的非负性得出 $2m-1 < 0$ 是解此题的关键.

根据算术平方根的非负性得出 $\sqrt{x+2} \geq 0$ ，根据方程无实数解求出此时 $2m-1 < 0$ ，再求出 m 的取值范围即可.

【详解】解： $\sqrt{x+2} = 2m-1$ ，

$$\because \sqrt{x+2} \geq 0,$$

$\therefore$ 如果方程 $\sqrt{x+2} = 2m-1$ 无实数解，则 $2m-1 < 0$ ，

$$\therefore m < \frac{1}{2},$$

故答案为： $m < \frac{1}{2}$.

11. 若 $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$ ，则 $x =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】本题考查了二次根式有意义条件，掌握知识点的应用是解题的关键.

根据题意得出 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$ ，然后解出不等式组即可.

【详解】解： $\because \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$ ，

$$\therefore x = 1,$$

故答案为： 1.

12. 一次函数 $y = -3x - 6$ 与坐标轴围成的三角形面积是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征，三角形面积，掌握知识点的应用是解题的关键.

由 $y = -3x - 6$ 得，当 $x = 0$ 时， $y = -6$ ；当 $y = 0$ 时， $x = -2$ ，即坐标轴的交点为 $(-2, 0)$ ， $(0, -6)$ ，然后用三角形面积公式即可求解.

【详解】解：由 $y = -3x - 6$ 得，当 $x = 0$ 时， $y = -6$ ；当 $y = 0$ 时， $x = -2$ ；

∴ 一次函数 $y = -3x - 6$ 与坐标轴的交点为 $(-2, 0)$, $(0, -6)$,

∴ 坐标轴围成的三角形面积是 $\frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$,

故答案为: 6.

13. 用换元法解分式方程 $\frac{x-2}{x} - \frac{3x}{x-2} - 2 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x-2}{x} = y$, 则原方程可化为关于 y 的整式方程是 _____.

【答案】 $y^2 - 2y - 3 = 0$;

【解析】

【分析】 如果设 $\frac{x-2}{x} = y$, 那么 $\frac{x}{x-2} = \frac{1}{y}$, 原方程变为: $y - \frac{3}{y} - 2 = 0$, 方程两边乘最简公分母 y , 可以把分式方程转化为整式方程.

【详解】 解: 设 $\frac{x-2}{x} = y$,

原方程变为 $y - \frac{3}{y} - 2 = 0$,

方程两边都乘 y 得 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

故原方程可化为关于 y 的整式方程是 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

故答案为 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

【点睛】 本题考查用换元法使分式方程简便. 换元后再在方程两边乘最简公分母可以把分式方程转化为整式方程. 应注意换元后的字母系数.

14. 一个多边形的内角和是其外角和的 2 倍, 则这个多边形的对角线是 _____ 条.

【答案】 9

【解析】

【分析】 先根据该多边形的内角和是外角和 2 倍, 可得出: $(n-2) \times 180^\circ = 360^\circ \times 2$, 求出多边形的边数 n , 再根据 n 边形对角线的总条数为: $\frac{n \times (n-3)}{2}$, 求解即可.

【详解】 解: 设这个多边形边数为 n ,

∴ 该多边形的内角和是外角和 2 倍,

∴ $(n-2) \times 180^\circ = 360^\circ \times 2$,

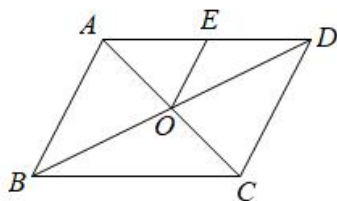
解得: $n = 6$,

∴这个多边形的对角线的总条数为： $\frac{6 \times (6-3)}{2} = 9$,

故答案为 9.

【点睛】 本题考查了多边形内角与外角以及多边形的对角线条数问题，解答本题的关键在于根据该多边形的内角和是外角和 2 倍求出多边形边数.

15. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 E 是 AD 的中点, 连接 OE , 若 $OA=3$, $\triangle AOE$ 的周长等于 8, 则平行四边形 $ABCD$ 的周长等于_____.



【答案】 20

【解析】

【分析】 先利用平行四边形的性质得到 OE 为 $\triangle ABD$ 的中位线, 利用三角形的中位线性质得到 $OE = \frac{1}{2} AB$, 进而求得 $AD + AB = 10$ 即可求解.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB = CD, AD = BC, OD = OB,$

$\because$ 点 E 是 AD 的中点,

$\therefore OE = \frac{1}{2} AB, AE = \frac{1}{2} AD,$

$\because OA = 3, \triangle AOE$ 的周长等于 8,

$\therefore OA + OE + AE = 8$, 则 $OE + AE = 5$,

$\therefore AD + AB = 10$,

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长等于 $2(AD + AB) = 20$,

故答案为: 20.

【点睛】 本题考查平行四边形的性质、三角形的中位线性质, 熟练掌握三角形的中位线性质是解答的关键.

16. 平行四边形一组邻边长 4cm 和 8cm, 其中一边上的高是 5cm, 则另一边上的高是_____.

【答案】 2.5cm

【解析】

【分析】 本题主要是考查了平行四边形的性质, 熟知直角三角形中斜边最长, 高的长度应该小于斜边的长度是解题的关键.

先确定平行四边形的高是对应的哪条底，然后再根据平行四边形的面积公式进行计算即可.

【详解】解：由题意得：5cm 的高对应底边是 4cm，

$$4 \times 5 \div 8 = 2.5(\text{cm}),$$

∴ 另一边上的高是 2.5cm，

故答案为：2.5cm.

17. 若一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 满足 $-1 \leq x \leq 1$ 时， $-2 \leq y \leq 4$ ，那么这个一次函数的解析式为_____.

【答案】 $y = 3x + 1$ 或 $y = -3x + 1$

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求解析式，掌握一次函数的性质是解题的关键.

根据题意分 ① 当 $x = -1$ ， $y = -2$ ； $x = 1$ ， $y = 4$ ， ② 当 $x = -1$ ， $y = 4$ ； $x = 1$ ， $y = -2$ 待定系数法求解析式即可.

【详解】解：∵ 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ ， $-1 \leq x \leq 1$ 时， $-2 \leq y \leq 4$ ，

∴ ① 当 $x = -1$ ， $y = -2$ ； $x = 1$ ， $y = 4$ ，

$$\therefore \begin{cases} -k + b = -2 \\ k + b = 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 3 \\ b = 1 \end{cases},$$

∴ 一次函数的解析式为 $y = 3x + 1$ ；

② 当 $x = -1$ ， $y = 4$ ； $x = 1$ ， $y = -2$ ，

$$\therefore \begin{cases} -k + b = 4 \\ k + b = -2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -3 \\ b = 1 \end{cases},$$

∴ 一次函数的解析式为 $y = -3x + 1$ ；

故答案为： $y = 3x + 1$ 或 $y = -3x + 1$.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，给出以下定义：对于 x 轴正半轴上的点 $M(a, 0)$ 与 y 轴正半轴上的点 $P(0, b)$ ，

如果坐标平面内存在一点 N ，使得 $\angle MPN = 90^\circ$ ，且 $MP = NP$ ，那么称点 N 为 M 关于 P 的“垂转点”. 例

如图 1，已知点 $M(1, 0)$ 和点 $P(0, 1)$ ，以 MP 为腰作等腰直角三角形 MPN ，可以得到 M 关于 P 的其中一个

垂转点 $N(-1, 0)$. 如图 2，如果 $M(2, 0)$ 关于 y 轴上一点 P 的垂转点 N 在一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象上，那

么垂转点 N 的坐标为_____.

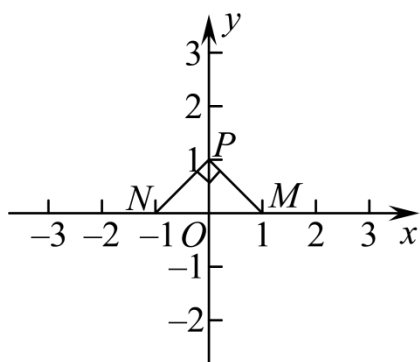


图1

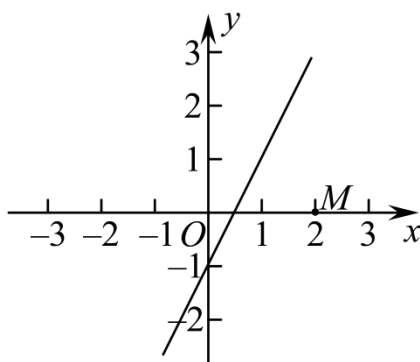


图2

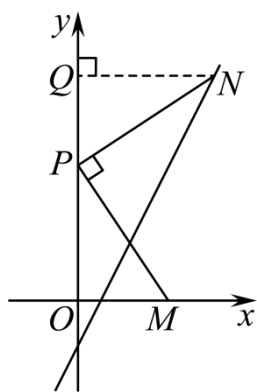
【答案】 $N(3,5)$ 或 $N\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质与判定，旋转的性质，坐标与图形，一次函数的性质；分两种情况讨论，将 PM ，分别绕点 P 顺时针和逆时针旋转 90° ，点 N 在 $y = 2x - 1$ 上，进而根据全等三角形的性质求得点 N 的坐标，即可求解。

【详解】 解： 如图所示，将 PM 绕点 P 逆时针旋转 90° ， N 点在 $y = 2x - 1$ 上时，

过点 N 作 $NQ \perp y$ 轴于点 Q ，



依题意， $PM = PN, \angle MPN = 90^\circ$

又 $\angle POM = \angle NQP = 90^\circ$

$\therefore \angle QPN = 90^\circ - \angle OPM = \angle OMP$

$\therefore \triangle QPN \cong \triangle OMP$

$\therefore OM = QP, QN = OP$

$\therefore M(2,0)$ ， 则 $OP = OM = 2$

设 $P(0, p)$, 则 $Q(0, p+2)$,

$$\therefore N(p, p+2)$$

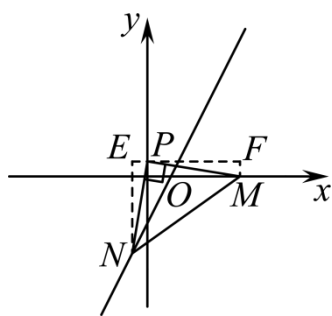
又 $\because N$ 在 $y = 2x - 1$ 上,

$$\therefore p + 2 = 2p - 1$$

解得: $p = 3$

$$\therefore N(3, 5);$$

如图所示, 将 PM 绕点 P 顺时针旋转 90° , N 点在 $y = 2x - 1$ 上时,



同理可得 $EN = PF = OM = 2$, $FM = OP = p$

$$\therefore N(-p, p-2)$$

又 $\because N$ 在 $y = 2x - 1$ 上,

$$\therefore p - 2 = -2p - 1$$

解得: $p = \frac{1}{3}$

$$\therefore N\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

综上所述, $N(3, 5)$ 或 $N\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

故答案为: $N(3, 5)$ 或 $N\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

三、简答题

19. 解关于 x 的方程: $m(x-1) = 1 (m \neq 0)$.

【答案】 $x = \frac{m+1}{m}$.

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次方程，熟练掌握解一元一次方程的步骤是解题的关键.

按照移项，系数化为1的步骤解方程即可.

【详解】 解： $m(x-1)=1$

$$mx - m = 1$$

$$mx = m + 1$$

$$\because m \neq 0,$$

$$\therefore x = \frac{m+1}{m}.$$

20. 解方程： $\frac{x-1}{x+3} = \frac{x-1}{2x-3}$.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = 6$.

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，解一元二次方程，掌握解方程的方法及步骤是解题的关键.

方程两边乘以 $(x+3)(2x-3)$ ，转化为一元二次方程方程，然后解一元二次方程并检验即可.

【详解】 解： $\frac{x-1}{x+3} = \frac{x-1}{2x-3}$

$$(x-1)(2x-3) = (x-1)(x+3)$$

$$2x^2 - 3x - 2x + 3 = x^2 + 2x - 3$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0,$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = 6,$$

经检验： $x_1 = 1$ 和 $x_2 = 6$ 原方式方程的解，

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1 = 1, x_2 = 6$.

21. 解方程组：
$$\begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = \frac{3}{2} \\ y_2 = -\frac{3}{2} \end{cases};$

【解析】

【分析】由代入消元法，消去一个未知数 x ，得到关于 y 的一元二次方程，然后用公式法解出 y 的值，然后计算出 x ，即可得到方程组的解.

【详解】解： $\begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \textcircled{1} \\ x - y = 3 \textcircled{2} \end{cases},$

由②得： $x = y + 3$ ③，

把③代入①，得 $(y+3)^2 - 3y(y+3) - 4y^2 = 0$ ，

整理得： $6y^2 + 3y - 9 = 0$ ，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 4 \times 6 \times 9 = 225 > 0$ ，

$\therefore$ 用求根公式法，得

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{225}}{2 \times 6},$$

解得： $y_1 = 1, y_2 = -\frac{3}{2}$;

$\therefore x_1 = 4, x_2 = \frac{3}{2}$;

$\therefore$ 方程组的解为： $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = \frac{3}{2} \\ y_2 = -\frac{3}{2} \end{cases};$

【点睛】本题考查了解二元二次方程组，利用代入消元法把解方程组转变为解一元二次方程，掌握公式法解一元二次方程是解题的关键.

22. 解方程组： $\begin{cases} \frac{5}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 7 \\ \frac{3}{x+y} + \frac{1}{y-x} = 1 \end{cases}$

【答案】
$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程组，令 $m = \frac{1}{x+y}$, $n = \frac{1}{x-y}$ ，则原方程组可化为 $\begin{cases} 5m+n=7 \text{①} \\ 3m-n=1 \text{②} \end{cases}$ ，

解方程组 $\begin{cases} 5m+n=7 \text{①} \\ 3m-n=1 \text{②} \end{cases}$ 得到 $m=1$, $n=2$ ，则可得到 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\frac{1}{2} \end{cases}$ ，据此求解即可.

【详解】 解：令 $m = \frac{1}{x+y}$, $n = \frac{1}{x-y}$ ，则原方程组可化为 $\begin{cases} 5m+n=7 \text{①} \\ 3m-n=1 \text{②} \end{cases}$ ，

①+②得 $8m=8$ ，解得 $m=1$ ，

把 $m=1$ 代入①得 $5 \times 1 + n = 7$ ，解得 $n=2$ ，

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{1}{x-y} = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\frac{1}{2} \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ ，

检验，当 $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ 时， $x+y \neq 0$, $x-y \neq 0$ ，

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ 是原方程组的解.}$$

四、解答题

23. 已知直线 $y = kx + b$ 平行于直线 $y = -3x + 4$ ，且与直线 $y = 2x - 6$ 的交点在 x 轴上，求这个一次函数的解析式.

【答案】这个一次函数的解析式为 $y = -3x + 9$.

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的图象与性质，掌握一次函数的图象与性质是解题的关键.

由直线 $y = kx + b$ 平行于直线 $y = -3x + 4$ 可得 $k = -3$ ，又直线 $y = 2x - 6$ 的交点在 x 轴上，则交点坐标为 $(3, 0)$ ，然后代入直线 $y = -3x + b$ ，求出 b 的值即可.

【详解】解：∵ 直线 $y = kx + b$ 与直线 $y = -3x + 4$ 平行，

∴ 根据两个一次函数的图象平行，则一次项系数一定相等，即 $k = -3$ ，

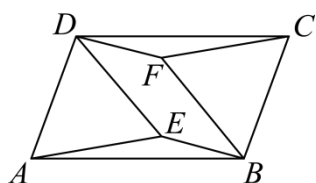
由直线 $y = 2x - 6$ 的交点在 x 轴上，当 $y = 0$ 时， $2x - 6 = 0$ ，解得 $x = 3$ ，

∴ 交点坐标为 $(3, 0)$ ，

∴ 直线 $y = -3x + b$ 过 $(3, 0)$ 点，代入得： $-9 + b = 0$ ，则 $b = 9$ ，

∴ 这个一次函数的解析式为 $y = -3x + 9$.

24. 在平行四边形 $ABCD$ 中，分别以 AD, BC 为边向平行四边形 $ABCD$ 内作等边三角形 ADE 和等边三角形 BCF ，连接 BE, DF ．求证：四边形 $BEDF$ 是平行四边形.



【答案】见详解

【解析】

【分析】本题主要考查了平行四边形的判定与性质、等边三角形的性质、全等三角形的判定与性质等知识，熟练掌握平行四边形的判定定理是解题关键. 分别证明 $DE = BF$ 、 $BE = DF$ ，利用“两组对边分别相等的四边形为平行四边形”证明结论即可.

【详解】证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD = BC$ ， $AB = CD$ ， $\angle DAB = \angle DCB$ ，

∵ $\triangle ADE$ 、 $\triangle BCF$ 是等边三角形，

∴ $DE = AE = AD$ ， $BF = CF = BC$ ， $\angle DAE = \angle BCF = 60^\circ$ ，

又 $\because AD = BC$,

$\therefore DE = BF$,

$\therefore \angle BAD = \angle BCD$, $\angle BCF = \angle DAE = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAD - \angle DAE = \angle BCD - \angle BCF$, 即 $\angle BAE = \angle DCF$,

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDF$ 中,

$\therefore AB = CD$, $\angle BAE = \angle DCF$, $CF = AE$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ (SAS),

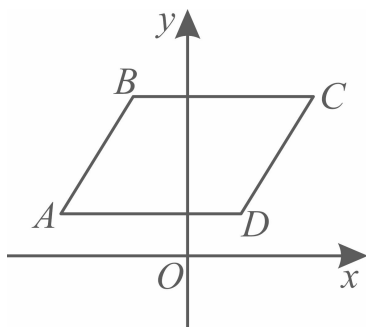
$\therefore BE = DF$,

又 $\because DE = BF$,

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

25. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知 O 为原点, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, A 、 B 、 C 的坐标分别是

$A(-3, \sqrt{2})$, $B(-\frac{3}{2}, 3\sqrt{2})$, $C(3, 3\sqrt{2})$, 点 D 在第一象限. 回答以下问题:



(1) D 点的坐标为_____.

(2) 将平行四边形 $ABCD$ 先向右平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度, 再向下平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度, 得到新的平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$, 那么它的四个顶点的坐标分别是: A_1 (_____), B_1 (_____), C_1 (_____), D_1 (_____);

(3) 平行四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 重叠部分的面积是_____.

【答案】 (1) $(\frac{3}{2}, \sqrt{2})$

(2) $(-3 + \sqrt{2}, 0)$, $(-\frac{3}{2} + \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(3 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(\frac{3}{2} - \sqrt{2}, 0)$

(3) $\frac{9\sqrt{2}}{2} - 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了坐标与图形变化—平移，平行四边形的性质与判定，熟知平行四边形的性质与判定定理和平移的性质即可得到答案；

(1) 根据平行四边形对边平行且相等可得 $AD = BC$, $AD \parallel x$ 轴，据此求解即可；

(2) 根据“上加下减，左减右加”的平移规律求解即可；

(3) 设 A_1B_1 、 AD 交于 E , B_1C_1 、 CD 交于 F , 则两个平行四边形重叠的部分为平行四边形 B_1EDF , 求出 DE 的长和点 B_1 到 AD 的距离即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC,$$

$$\therefore B\left(-\frac{3}{2}, 3\sqrt{2}\right), C(3, 3\sqrt{2}),$$

$$\therefore BC = 3 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}, BC \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore AD = \frac{9}{2}, AD \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore A(-3, \sqrt{2}), \text{ 且点 } D \text{ 在点 } A \text{ 右侧},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } \left(-3 + \frac{9}{2}, \sqrt{2}\right), \text{ 即 } \left(\frac{3}{2}, \sqrt{2}\right);$$

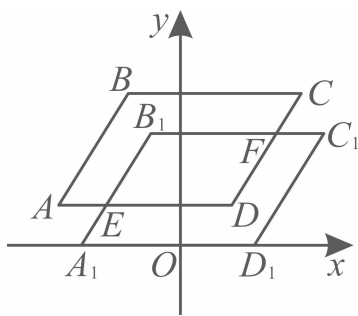
【小问 2 详解】

解: $\because$ 将平行四边形 $ABCD$ 先向右平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度, 再向下平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度, 得到新的平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$,

$$\therefore A_1(-3 + \sqrt{2}, 0), B_1\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right), C_1(3 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2}), D_1\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}, 0\right);$$

【小问 3 详解】

解: 如图所示, 设 A_1B_1 、 AD 交于 E , B_1C_1 、 CD 交于 F , 则两个平行四边形重叠的部分为平行四边形 B_1EDF ($BC \parallel B_1C_1 \parallel AD$, $B_1E \parallel CD \parallel C_1D_1$),



$$\therefore B_1\left(-\frac{3}{2}+\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right), AD \parallel x \text{ 轴}, A(-3, \sqrt{2}),$$

$$\therefore \text{点 } B_1 \text{ 到 } AD \text{ 的距离为 } 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 将平行四边形 $ABCD$ 先向右平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度, 再向下平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度, 得到新的平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$,

$$\therefore AE = \sqrt{2},$$

$$\therefore DE = AD - AE = \frac{9}{2} - \sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\text{四边形 } B_1EDF} = \left(\frac{9}{2} - \sqrt{2}\right) \times \sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} - 2,$$

$$\therefore \text{重叠部分的面积为 } \frac{9\sqrt{2}}{2} - 2.$$

26. 某商场准备购进 A、B 两种型号电脑, 每台 A 型号电脑进价比每台 B 型号电脑多 500 元, 用 40 000 元购进 A 型号电脑的数量与用 30 000 元购进 B 型号电脑的数量相同, 请解答下列问题:

(1) A, B 型号电脑每台进价各是多少元?

(2) 若每台 A 型号电脑售价为 2 500 元, 每台 B 型号电脑售价为 1 800 元, 商场决定同时购进 A, B 两种型号电脑 20 台, 且全部售出, 请写出所获的利润 y (单位: 元) 与 A 型号电脑 x (单位: 台) 的函数关系式, 若商场用不超过 36 000 元购进 A, B 两种型号电脑, A 型号电脑至少购进 10 台, 则有几几种购买方案?

(3) 在 (2) 问的条件下, 将不超过所获得的最大利润再次购买 A, B 两种型号电脑捐赠给某个福利院, 请直接写出捐赠 A, B 型号电脑总数最多是多少台.

【答案】 (1) 每台 A 型号电脑进价为 2000 元, 每台 B 型号电脑进价为 1500 元; (2) $y = 200x + 6000$, 有三种方案; (3) 捐赠 A, B 型号电脑总数最多是 5 台.

【解析】

【分析】 (1) 设每台 A 型号电脑进价为 a 元, 则每台 B 型号电脑进价为 $(a - 500)$ 元, 根据题意列出分式

方程求解即可；

(2) 若 A 型号电脑 x 台，则 B 型号电脑 $(20-x)$ 台，根据题意列出 y 与 x 的关系式；根据题意可列出关于

x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} 2000x + 1500(20-x) \leq 36000 \\ x \geq 10 \end{cases}$ ，求解即可得到方案；

(3) 根据 (2) 得到最大利润，优先购买 B 型号电脑，即可求解。

【详解】(1) 设每台 A 型号电脑进价为 a 元，则每台 B 型号电脑进价为 $(a-500)$ 元，

由题意，得 $\frac{40000}{a} = \frac{30000}{a-500}$ ，解得： $a=2000$ ，

经检验 $a=2000$ 是原方程的解，且符合题意，

$2000-500=1500$ (元)。

答：每台 A 型号电脑进价为 2000 元，每台 B 型号电脑进价为 1500 元。

(2) 由题意，得 $y=(2500-2000)x+(1800-1500)(20-x)=200x+6000$ ，

$\therefore \begin{cases} 2000x + 1500(20-x) \leq 36000 \\ x \geq 10 \end{cases}$ ，解得 $10 \leq x \leq 12$ ，

$\therefore x$ 是整数， $\therefore x=10, 11, 12$ ， $\therefore$ 有三种方案。

(3) $\therefore$ 利润 $y=200x+6000$ ，随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x=12$ 时可获得最大利润，最大利润为 $200 \times 12 + 6000 = 8400$ (元)，

若要使捐赠 A, B 型号电脑总数尽可能多，则优先购买 B 型号电脑，可购买 5 台，

所以捐赠 A, B 型号电脑总数最多 5 台。

【点睛】本题考查分式方程的实际应用，一元一次不等式组的实际应用，一次函数的实际应用等内容，理解题意并列出方程或不等式组是解题的关键。

27. 点 P 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 所在直线上的一个动点 (点 P 不与点 A, C 重合)，分别过点 A, C 向直线 BP 作垂线，垂足分别为点 E, F 。点 O 为 AC 的中点。

(1) 如图 1，当点 P 与点 O 重合时，线段 OE 和 OF 的关系是_____；

(2) 当点 P 运动到如图 2 所示的位置时，请在图中补全图形并通过证明判断 (1) 中的结论是否仍然成立？

(3) 如图 3，点 P 在线段 OA 的延长线上运动，当 $\angle OEF = 30^\circ$ 时，试探究线段 CF, AE, OE 之间的关系。

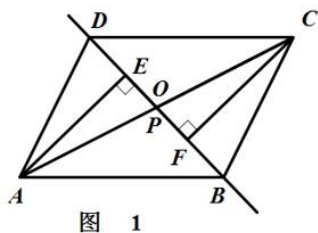


图 1

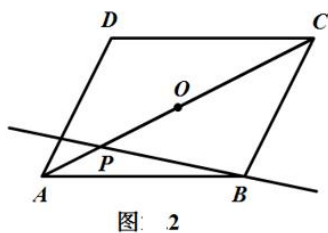


图 2

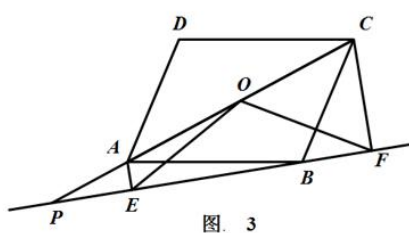


图 3

【答案】(1) $OE = OF$; (2) 补图见解析, $OE = OF$ 仍然成立, 证明见解析; (3) $OE = CF + AE$, 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ 即可得出结论;

(2) (1) 中的结论仍然成立, 作辅助线, 构建全等三角形, 证明 $\triangle AOE \cong \triangle CGO$, 得 $OE = OG$, 再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得出结论;

(3) $FC + AE = OE$, 理由是: 作辅助线, 构建全等三角形, 与 (2) 类似, 同理得 $\triangle AOE \cong \triangle COH$, 得出 $AE = CH$, $OE = OH$, 再根据 $\angle OEF = 30^\circ$, $\angle HFE = 90^\circ$, 推出 $HF = \frac{1}{2}EH = OE$, 即可得证.

【详解】解: (1) 如图 1, $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$$\therefore OA = OC,$$

$$\because AE \perp BP, CF \perp BP,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle CFO = 90^\circ,$$

$$\because \angle AOE = \angle COF,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore OE = OF;$$

(2) 补全图形如图所示, $OE = OF$ 仍然成立,

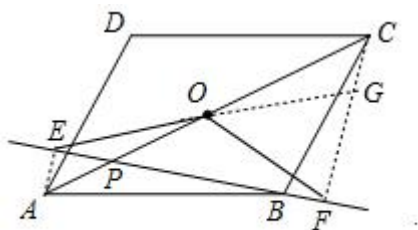


图2

证明如下: 延长 EO 交 CF 于点 G ,

$$\because AE \perp BP, CF \perp BP,$$

$$\therefore AE \parallel CF,$$

$$\therefore \angle EAO = \angle GCO,$$

$$\because \text{点 } O \text{ 为 } AC \text{ 的中点},$$

$$\therefore AO = CO,$$

$$\text{又} \because \angle AOE = \angle COG,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COG,$$

$$\therefore OE = OG,$$

$$\because \angle GFE = 90^\circ,$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2}EG = OE;$$

(3) 当点 P 在线段 OA 的延长线上时, 线段 CF 、 AE 、 OE 之间的关系为 $OE = CF + AE$,

证明如下: 延长 EO 交 FC 的延长线于点 H , 如图所示,

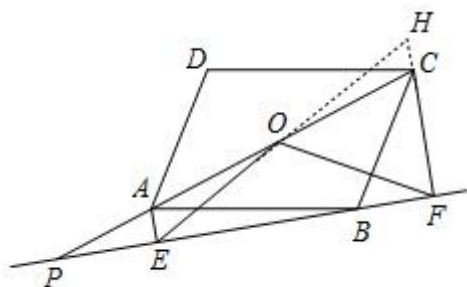


图3

由 (2) 可知 $\triangle AOE \cong \triangle COH$,

$$\therefore AE = CH, OE = OH,$$

$$\text{又} \because \angle OEF = 30^\circ, \angle HFE = 90^\circ,$$

$$\therefore HF = \frac{1}{2}EH = OE,$$

$$\therefore OE = CF + CH = CF + AE.$$

【点睛】 本题考查了平行四边形、全等三角形的性质和判定以及等腰三角形的性质和判定, 以构建全等三角形和证明三角形全等这突破口, 利用平行四边形的对角线互相平分得全等的边相等的条件, 从而使问题得以解决.