

2024 学年第二学期学校八年级数学

(考试时间 90 分钟, 总分 100 分)

同学们注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 一次函数 $y = 2x + 4$ 的图像与 y 轴的交点的坐标是 ()

- A. $(0, 4)$ B. $(4, 0)$ C. $(-2, 0)$ D. $(0, -2)$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了求一次函数与 y 轴的交点坐标, 求出当 $x = 0$ 时 y 的值即可得到答案.

【详解】解: 在 $y = 2x + 4$ 中, 当 $x = 0$ 时, $y = 2x + 4 = 4$,

$\therefore$ 一次函数 $y = 2x + 4$ 的图像与 y 轴的交点的坐标是 $(0, 4)$,

故选: A.

2. 下列方程, 一定有实数根的是 ()

- A. $x^2 + a = 0$ B. $x^3 + a = 0$ C. $\sqrt{x^2} - a = 0$ D. $\frac{1}{x^2 - a} = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元二次方程, 解无理方程, 解分式方程, 求平方根的方法解方程, 根据偶次方的非负性和算术平方根的非负性可判断当 $a > 0$ 时 A、C 中的方程无解, B 中的方程有解, D 中方程分子不为 0, 则方程无解.

【详解】解: A、 $\because x^2 + a = 0$,

$\therefore x^2 = -a$,

$\because x^2 \geq 0$,

$\therefore$ 当 $a > 0$ 时, 原方程无实数根, 故 A 不符合题意;

B、 $\because x^3 + a = 0$,

$\therefore x^3 = -a$,

$\therefore x = \sqrt[3]{-a}$,

$\therefore$ 原方程一定有实数根, 故 B 符合题意;

C、 $\because \sqrt{x^2} - a = 0$,

$\therefore \sqrt{x^2} = a$,

$\because \sqrt{x^2} \geq 0$,

$\therefore$ 当 $a < 0$ 时, 原方程无实数根, 故 C 不符合题意;

D、方程 $\frac{1}{x^2 - a} = 0$ 中, 分子不为 0, 故原方程无解, 故 D 不符合题意;

故选: B.

3. 已知一次函数 $y = kx + 1$ 的图像经过第一、二、三象限, k 的取值范围是 ()

A. $k > 0$

B. $k < 0$

C. $k > 1$

D. $k < 1$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数图象与系数的关系, 在一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 中, 当 $k > 0, b > 0$ 时, 一次函数 $y = kx + b$ 经过第一、二、三象限, 当 $k > 0, b < 0$ 时, 一次函数 $y = kx + b$ 经过第一、三、四象限, 当 $k < 0, b > 0$ 时, 一次函数 $y = kx + b$ 经过第一、二、四象限, 当 $k < 0, b < 0$ 时, 一次函数 $y = kx + b$ 经过第二、三、四象限, 据此可得答案.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = kx + 1$ 的图像经过第一、二、三象限,

$\therefore k > 0$,

故选: A.

4. 下列判断中, 不正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$

C. 如果 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$, 那么 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

D. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量是既有方向又有大小的量，向量的加法满足所有的加法运算定律，逐项进行分析判断即可.

【详解】解：A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ，故 A 正确，不符合题意；

B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$ ，故 B 正确，不符合题意；

C. 如果 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ，那么 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 或 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ，故 C 错误，符合题意；

D. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ ，故 D 正确，不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了向量的计算，解题的关键是要考虑向量是既有大小又有方向的量，向量的运算满足所有加法运算定律.

5. 已知四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB \parallel CD$ ， $\angle B = \angle D$ ，如果添加一个条件，即可推出该四边形是正方形，那么这个条件可以是（ ）

A. $\angle D = 90^\circ$

B. $AB = CD$

C. $BC = CD$

D. $AC = BD$

【答案】C

【解析】

【分析】由已知条件可得四边形 $ABCD$ 是矩形，再由正方形的判定可求解.

【详解】如图，



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$,

$\because \angle A = 90^\circ$,

$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ$,

$\because \angle B = \angle D$,

$\therefore \angle A = \angle B = \angle D = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore$ 添加条件 $BC = CD$ 可得四边形 $ABCD$ 是正方形,

故选：C.

【点睛】本题考查了正方形的判定，矩形的性质，掌握一组邻边相等的矩形是正方形是解题的关键.

6. 下列命题中，假命题是（ ）

- A. 两条对角线互相平分的四边形是平行四边形
- B. 两条对角线互相垂直的平行四边形是菱形
- C. 两条对角线相等的平行四边形是矩形
- D. 两条对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

【答案】D

【解析】

【分析】利用平行四边形及特殊的平行四边形的性质分别判断后即可确定正确的选项.

【详解】解：A、对角线互相平分的四边形是平行四边形，正确，是真命题，不符合题意；

B、对角线互相垂直的平行四边形是菱形，正确，是真命题，不符合题意；

C、对角线相等的平行四边形是矩形，正确，是真命题，不符合题意；

D、对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形，不正确，是假命题，符合题意，

故选 D.

【点睛】考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解平行四边形及特殊的平行四边形的性质，难度不大.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分)

7. 已知 $f(x) = 2x - 1$ ，那么 $f(-1) =$ _____.

【答案】-3

【解析】

【分析】本题考查了求函数值，熟练掌握函数值的求解方法是解题关键. 将 $x = -1$ 代入函数的解析式求解即可得.

【详解】解：∵ $f(x) = 2x - 1$,

$$\therefore f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3,$$

故答案为：-3.

8. 与直线 $y = 3x - 1$ 平行且在 y 轴上的截距为 2 的直线一定不经过第 _____ 象限.

【答案】四

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数在 y 轴上的截距问题，一次函数图象的平移问题，一次函数图象经过的象限，一次函数在 y 轴上的截距为一次函数与 y 轴交点的纵坐标的值，据此可得与直线 $y = 3x - 1$ 平行且在 y 轴上的截距为 2 的直线解析式，再根据解析式即可得到答案.

【详解】解：与直线 $y = 3x - 1$ 平行且在 y 轴上的截距为 2 的直线解析式为 $y = 3x + 2$,

$$\because 3 > 0, 2 > 0,$$

$\therefore$ 直线 $y = 3x + 2$ 的图象经过第一、二、三象限, 不经过第四象限,

故答案为: 四.

9. 方程 $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】本题考查了解无理方程, 熟练掌握方程的解法是解题关键. 先得出 $\sqrt{x-1} = 0$ 或 $\sqrt{x-2} = 0$, 则 $x = 1$ 或 $x = 2$, 再根据二次根式的被开方数是非负的进行检验即可得.

【详解】解: $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2} = 0$,

$$\sqrt{x-1} = 0 \text{ 或 } \sqrt{x-2} = 0,$$

$$x-1=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

$$x=1 \text{ 或 } x=2,$$

经检验, 当 $x=1$ 时, $\sqrt{x-2}$ 无意义, 舍去;

当 $x=2$ 时, $\sqrt{x-1}$ 和 $\sqrt{x-2}$ 均有意义, 符合题意,

所以方程的解是 $x=2$,

故答案为: $x=2$.

10. 如果关于 x 的方程 $(m+2)x=1$ 无解, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m = -2$

【解析】

【分析】本题主要考查了一元一次方程的解, 解题时要能熟练掌握并理解.

依据题意, 由一次方程无解, 从而 $m+2=0$, 故可得解.

【详解】解: 由题意, $\because (m+2)x=1$ 无解,

$$\therefore m+2=0,$$

$$\therefore m=-2,$$

故答案为: $m=-2$.

11. 已知函数 $y = \frac{2}{3}x + 1$, 如果函数值 $y > 5$, 那么相应的自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > 6$

【解析】

【详解】 试题分析: 根据 $k = \frac{2}{3} > 0$ 得到 y 随 x 的增大而增大, 求出 $y = 5$ 时 x 的值即可求出答案.

解: $k = \frac{2}{3} > 0$, y 随 x 的增大而增大,

当 $y = 5$ 时, $x = 6$,

故答案为 $x > 6$.

考点: 一次函数的性质; 一次函数图象上点的坐标特征.

12. 解方程 $\frac{3x}{x-1} - \frac{x-1}{x} = 5$ 时, 可以设 $\frac{x}{x-1} = y$, 那么原方程可转化为整式方程: _____.

【答案】 $3y^2 - 5y - 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 熟练掌握分式方程的解法是解题关键. 将 $\frac{x}{x-1} = y$ 代入方程可得

$3y - \frac{1}{y} = 5$, 再方程两边同乘以 y 即可得.

【详解】 解: 解方程 $\frac{3x}{x-1} - \frac{x-1}{x} = 5$ 时, 可以设 $\frac{x}{x-1} = y$,

则 $3y - \frac{1}{y} = 5$,

方程两边同乘以 y , 得 $3y^2 - 1 = 5y$,

则 $3y^2 - 5y - 1 = 0$,

故答案为: $3y^2 - 5y - 1 = 0$.

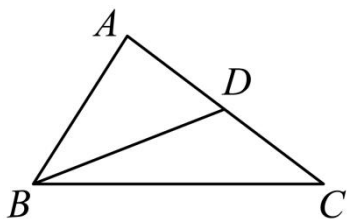
13. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 AC 的中点, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BD} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】 由点 D 是边 AC 的中点, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 可得 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$, 根据 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, 从而可得答案.

【详解】 解: 如图,



$\therefore$ 点 D 是边 AC 的中点, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}),$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

故答案为: $\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$

【点睛】 本题主要考查了平面向量, 注意: 平行向量既有大小又有方向.

14. 四张完全相同的卡片上, 分别画有线段、等边三角形、平行四边形、等腰梯形, 现从中随机抽取一张, 卡片上画的图形不是轴对称图形的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 此题考查概率的求法: 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种可能, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$. 本题卡片共有四张, 不是轴对称图形的只有平行四边形, 根据概率公式即可得到卡片上所画图形恰好不是轴对称图形的概率.

【详解】 解: 卡片中, 不是轴对称图形只有平行四边形,

根据概率公式, $P(\text{不是轴对称图形}) = \frac{1}{4}$.

故答案为: $\frac{1}{4}$.

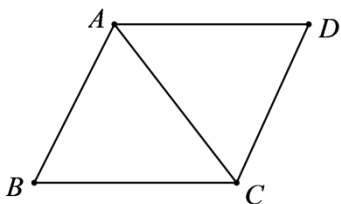
15. 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 68^\circ$, 则 $\angle BAC =$ _____度.

【答案】 56

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质和等腰三角形的性质, 熟练掌握菱形的性质是解题关键. 先根据菱形的性质可得 $AB = BC$, 再根据等腰三角形的性质求解即可得.

【详解】 解: 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形,



$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACB,$$

$$\because \angle ABC = 68^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 68^\circ}{2} = 56^\circ,$$

故答案为：56.

16. 某品牌新能源汽车的某款车型售价为30万元，连续两次降价后售价为24.3万元，假知每次平均降价的百分率都为 x ，那么可列方程为_____.

【答案】 $30(1-x)^2 = 24.3$

【解析】

【分析】 设每次平均降价的百分率都为 x ，根据题意列出一元二次方程.

【详解】 解：设每次平均降价的百分率都为 x ，那么可列方程为 $30(1-x)^2 = 24.3$,

故答案为： $30(1-x)^2 = 24.3$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用，根据增长率问题列出一元二次方程是解题的关键.

17. 如果一个多边形的每一个内角都等于 120° ，那么这个多边形是_____边形

【答案】 正六

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形的内角和定理，根据多边形的内角和定理列出方程，求出答案即可.

【详解】 设这个多边形为 n 边形，根据题意，得

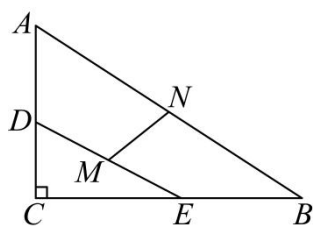
$$120^\circ \times n = (n-2) \times 180^\circ,$$

解得 $n = 6$,

所以这个多边形是正六边形.

故答案为：正六.

18. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$, $AD = 4$, $BE = 5$, M 、 N 分别是 DE 、 AB 的中点，那么线段 MN 的长为_____.

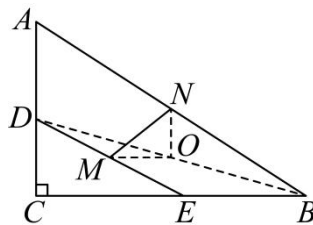


【答案】 $\frac{\sqrt{41}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的中位线定理、勾股定理等知识，熟练掌握三角形的中位线定理是解题关键。连接 BD ，取 BD 的中点 O ，连接 OM, ON ，先根据三角形的中位线定理可得 $OM = \frac{1}{2}BE = \frac{5}{2}, OM \parallel BE$ ， $ON = \frac{1}{2}AD = 2, ON \parallel AD$ ，再证出 $OM \perp ON$ ，然后利用勾股定理求解即可得。

【详解】 解：如图，连接 BD ，取 BD 的中点 O ，连接 OM, ON ，



$\because M, N$ 分别是 DE, AB 的中点，且 $AD = 4, BE = 5$ ，

$\therefore OM = \frac{1}{2}BE = \frac{5}{2}, OM \parallel BE, ON = \frac{1}{2}AD = 2, ON \parallel AD$ ，

$\because \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore AC \perp BC$ ，

$\because OM \parallel BE$ ，

$\therefore AC \perp OM$ ，

又 $\because ON \parallel AD$ ，

$\therefore OM \perp ON$ ，

$\therefore \angle MON = 90^\circ$ ，

$\therefore MN = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$ ，

故答案为： $\frac{\sqrt{41}}{2}$ 。

三、解答题（本大题共 7 题，满分 64 分）

19. 解方程: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$.

【答案】 $x = -5$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 熟练掌握解分式方程的步骤是解题关键. 先方程两边同乘以 $(x+2)(x-2)$ 可得 $(x+2)^2 - 16 = x - 2$, 再利用因式分解法解一元二次方程, 然后进行检验即可得.

【详解】 解: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$,

方程两边同乘以 $(x+2)(x-2)$, 得 $(x+2)^2 - 16 = x - 2$,

去括号, 得 $x^2 + 4x + 4 - 16 = x - 2$,

移项, 得 $x^2 + 4x - x + 4 - 16 + 2 = 0$,

合并同类项, 得 $x^2 + 3x - 10 = 0$,

因式分解, 得 $(x-2)(x+5) = 0$,

所以 $x-2=0$ 或 $x+5=0$,

解得 $x=2$ 或 $x=-5$,

经检验, $x=2$ 不是分式方程的解; $x=-5$ 是分式方程的解,

所以方程的解为 $x=-5$.

20. 解方程组: $\begin{cases} x+2y=8 \\ x^2+5xy-6y^2=0 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1=12 \\ y_1=-2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=\frac{8}{3} \\ y_2=\frac{8}{3} \end{cases}$

【解析】

【分析】 先将第 2 个方程变形为 $x+6y=0$, $x-y=0$, 从而得到两个二元一次方程组, 再分别求解即可.

【详解】 解: $\begin{cases} x+2y=8 \textcircled{1} \\ x^2+5xy-6y^2=0 \textcircled{2} \end{cases}$,

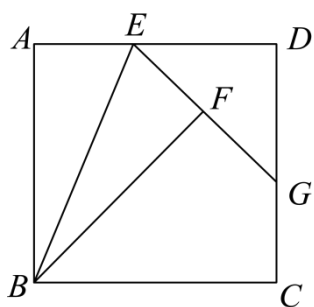
由②得: $x+6y=0$, $x-y=0$,

原方程组可化为 $\begin{cases} x+2y=8 \\ x+6y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+2y=8 \\ x-y=0 \end{cases}$,

故原方程组的解为 $\begin{cases} x_1=12 \\ y_1=-2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=\frac{8}{3} \\ y_2=\frac{8}{3} \end{cases}$.

【点睛】 本题考查的是高次方程，关键是通过分解，把高次方程降次，得到二元一次方程组，用到的知识点是因式分解、加减法.

21. 如图，点 E 是边长为 6 的正方形 $ABCD$ 的 AD 边上的一点，联结 BE ，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠得到 $\triangle FBE$ ，联结 EF 并延长交 CD 于 G



(1) 当 $AE=2$ 时，求 DG 的长；

(2) 设 $AE=x$ ， $CG=y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出函数的定义域.

【答案】 (1) $DG=3$

(2) y 关于 x 的函数解析式为 $y=\frac{36-6x}{x+6}$ ，函数的定义域为 $0 < x < 6$

【解析】

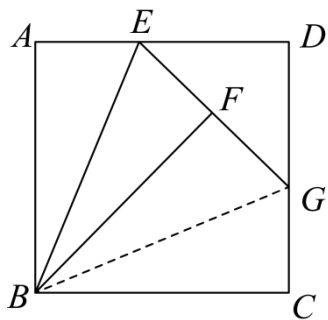
【分析】 本题考查了正方形折叠问题、勾股定理、三角形全等的判定与性质、函数的解析式等知识，熟练掌握正方形和折叠的性质是解题关键.

(1) 连接 BG ，先根据正方形的性质可得 $AB=BC=CD=AD=6$ ， $\angle A=\angle C=\angle D=90^\circ$ ，再根据折叠的性质可得 $EF=AE=2$ ， $BF=AB=6$ ， $\angle BFE=\angle A=90^\circ$ ，然后证出 $\text{Rt}\triangle BFG\cong\text{Rt}\triangle BCG$ ，最后在 $\text{Rt}\triangle DEG$ 中，利用勾股定理求解即可得；

(2) 先求出 $DE=6-x$ ， $DG=6-y$ ，再同 (1) 可得 $EF=AE=x$ ， $FG=CG=y$ ，则可得 $EG=x+y$ ，然后在 $\text{Rt}\triangle DEG$ 中，利用勾股定理求解即可得函数解析式，最后根据点 E 是边长为 6 的正方形 $ABCD$ 的 AD 边上的一点可得函数的定义域.

【小问 1 详解】

解：如图，连接 BG ，



$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 6,

$\therefore AB = BC = CD = AD = 6, \angle A = \angle C = \angle D = 90^\circ,$

由折叠的性质得: $EF = AE = 2, BF = AB = 6, \angle BFE = \angle A = 90^\circ,$

$\therefore BF = BC = 6, \angle BFG = 90^\circ, DE = AD - AE = 4,$

在 $\text{Rt}\triangle BFG$ 和 $\text{Rt}\triangle BCG$ 中,

$$\begin{cases} BG = BG \\ BF = BC \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BFG \cong \text{Rt}\triangle BCG (\text{HL}),$

$\therefore FG = CG,$

设 $DG = a$, 则 $FG = CG = CD - DG = 6 - a$,

$\therefore EG = EF + FG = 8 - a,$

在 $\text{Rt} \triangle DEG$ 中, $DE^2 + DG^2 = EG^2$, 即 $4^2 + a^2 = (8 - a)^2$,

解得 $a = 3$,

即 $DG = 3$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 6,

$\therefore AB = BC = CD = AD = 6, \angle A = \angle C = \angle D = 90^\circ,$

$\therefore AE = x, CG = y,$

$\therefore DE = AD - AE = 6 - x, DG = CD - CG = 6 - y,$

由 (1) 可知, $EF = AE = x, FG = CG = y,$

$\therefore EG = EF + FG = x + y,$

在 $\text{Rt} \triangle DEG$ 中, $DE^2 + DG^2 = EG^2$, 即 $(6 - x)^2 + (6 - y)^2 = (x + y)^2$,

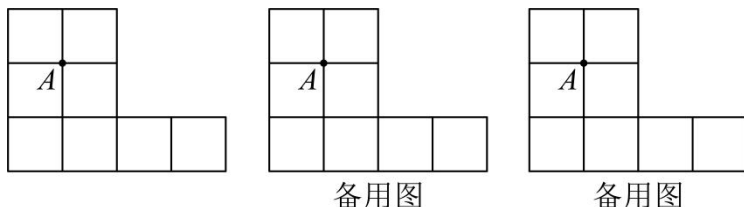
整理得: $y = \frac{36-6x}{x+6}$,

$\because$ 点 E 是边长为 6 的正方形 $ABCD$ 的 AD 边上的一点,

$\therefore 0 < x < 6$,

综上, y 关于 x 的函数解析式为 $y = \frac{36-6x}{x+6}$, 函数的定义域为 $0 < x < 6$.

22. 如图, 是一个由 8 个单位正方形组成的图形, A 是其中一个小正方形的顶点.



(1) 过点 A 画一条直线, 将这个图形分割成面积为 3:5 的两部分, 画出这条直线, 并求出该直线被这个图形所截得的线段长:

(2) 如果经过点 A 的一条直线将这个图形分割成面积相等的两部分, 画出这条直线.

【答案】 (1) 见解析, 所截得的线段长为 3

(2) 见解析

【解析】

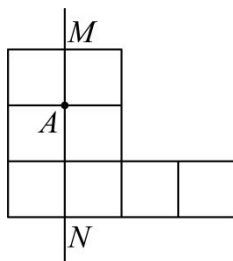
【分析】 本题主要考查了正方形和矩形的性质, 熟练掌握正方形和矩形的性质是解题的关键.

(1) 过点 A 画一条竖直的直线即可, 此时左边的正方形面积为 3, 右边的正方形面积为 5, 那么截得的线段长为 3;

(2) 点 A 为上方正方形的对称中心, 取出下方矩形的对称中心, 根据正方形和矩形均是中心对称图形的性质, 可得经过正方形和矩形对称中心的直线即可将该图形面积等分.

【小问 1 详解】

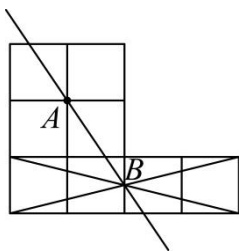
解: 如图, 直线 MN 即为所求:



线段 $MN = 3 \times 1 = 3$

【小问 2 详解】

解: 如图, 直线 AB 即为所求:



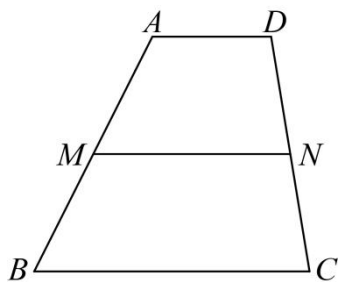
23. 叙述并证明梯形的中位线定理（写出已知、求证，画出图形，写出证明过程）.

【答案】见解析

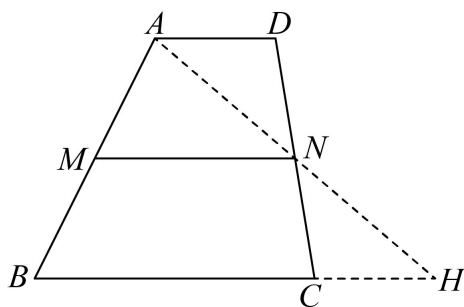
【解析】

【分析】本题主要考查了命题的证明，梯形中位线定理，三角形中位线定理，全等三角形的性质与判定，先根据题意写出已知和求证的内容，然后连接 AN 并延长交 BC 延长线于 H ，证明 $\triangle ADN \cong \triangle HCN$ (AAS)，得到 $AD = CH$ ，再由三角形中位线定理得到 $BH = 2MN$ ， $MN \parallel BH$ ，据此证明即可.

【详解】已知：如图所示，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 M 和点 N 分别是 AB ， BC 的中点；
求证： $AD + BC = 2MN$ ， $MN \parallel AD \parallel BC$.



证明：如图所示，连接 AN 并延长交 BC 延长线于 H ，



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle NAD = \angle NHC$, $\angle NDA = \angle NCH$,

$\therefore N$ 为 CD 的中点,

$\therefore DN = CN$,

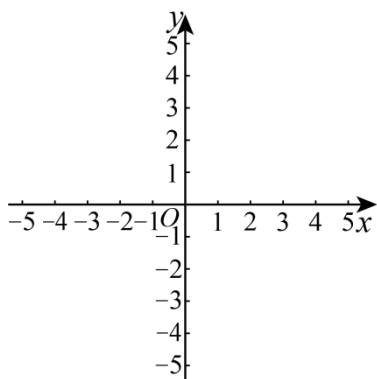
$\therefore \triangle ADN \cong \triangle HCN$ (AAS),

$\therefore AD = CH$,

$\because$ 点 M 和点 N 分别是 AB ， BC 的中点,

$\therefore MN$ 是 $\triangle ABH$ 的中位线,
 $\therefore BH = 2MN, MN \parallel BH$,
 $\therefore BC + CH = 2MN, MN \parallel BC$,
 $\therefore AD + BC = 2MN, MN \parallel AD \parallel BC$.

24. 在直角坐标平面系 xOy 中 (如图), 点 $C(-1, 0)$ 在 x 轴上, 一次函数 $y = kx + 2$ 的图象经过点 $\left(1, \frac{5}{2}\right)$, 与 x 轴和 y 轴分别相交于点 A 、 B .



- (1) 求线段 AB 的长;
- (2) 求点 C 到直线 $y = kx + 2$ 的距离;
- (3) 如果点 Q 在 x 轴上, 且使得 $\triangle BCQ$ 是等腰三角形, 请直接写出点 Q 的坐标.

【答案】(1) $2\sqrt{5}$

(2) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

(3) $Q_1(1, 0)$ 或 $Q_2(-1 + \sqrt{5}, 0)$ 或 $Q_3(-1 - \sqrt{5}, 0)$ 或 $Q_4\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

【解析】

【分析】(1) 根据先确定一次函数的解析式, 再确定函数与坐标轴的交点坐标, 利用两点间距离公式解答即可.

(2) 设点 C 到 AB 的距离为 h , 得 $AC = -1 - (-4) = 3$, 根据 $\frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} AC \cdot |y_B|$ 解答即可.

(3) 利用等腰三角形的定义, 分类计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 一次函数 $y = kx + 2$ 的图象经过点 $\left(1, \frac{5}{2}\right)$, 与 x 轴和 y 轴分别相交于点 A 、 B .

$$\therefore \frac{5}{2} = k + 2,$$

$$\text{解得 } k = \frac{1}{2},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 2,$$

$$\therefore A(-4, 0), B(0, 2),$$

$$\therefore AB = \sqrt{(-4-0)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{5}.$$

【小问 2 详解】

解: 设点 C 到 AB 的距离为 h ,

$$\therefore A(-4, 0), B(0, 2), C(-1, 0),$$

$$\therefore AC = -1 - (-4) = 3,$$

$$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}AC \cdot |y_B|,$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore h = \frac{3 \times 2}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

【小问 3 详解】

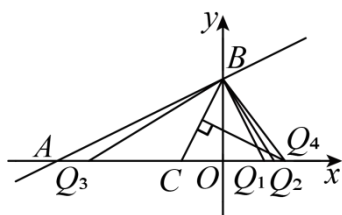
理由如下:

$$\therefore A(-4, 0), B(0, 2), C(-1, 0),$$

$$\therefore BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

以 C 为圆心, 以 BC 为半径画弧, 交 x 轴于点 Q_3, Q_2 ,

则 $Q_3(-1-\sqrt{5}, 0), Q_2(-1+\sqrt{5}, 0)$;



作点 C 关于 y 轴的对称点 Q_1 ，也是符合题意的，此时 $Q_1(1,0)$ ；

作 BC 垂直平分线，交 x 轴于点 Q_4 ，也是符合题意的，

设 $Q_4(n,0)$ ，

$$\text{则 } (n+1)^2 = 2^2 + n^2,$$

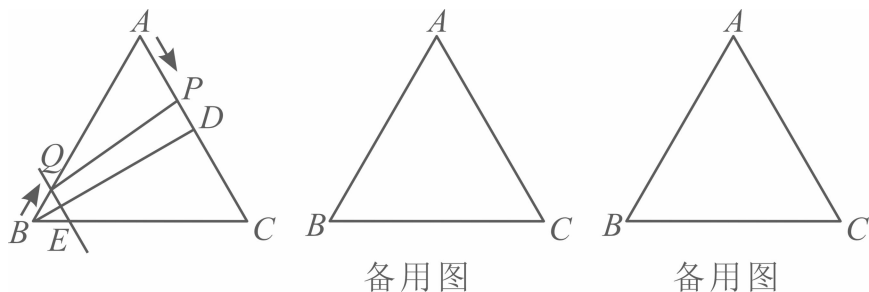
$$\text{解得 } n = \frac{3}{2},$$

此时 $Q_4\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ；

综上所述，存在点 Q ，且分别为 $Q_1(1,0)$ 或 $Q_2(-1+\sqrt{5},0)$ 或 $Q_3(-1-\sqrt{5},0)$ 或 $Q_4\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 。

【点睛】 本题考查了待定系数法，等腰三角形的分类计算，勾股定理，线段垂直平分线的性质，两点间的距离公式，熟练掌握待定系数法，分类计算是解题的关键。

25. 如图，在等边三角形 ABC 中，边长为 12cm ， $BD \perp AC$ ，垂足为 D 。点 P 从点 A 出发，沿 AC 方向匀速运动，速度是 3cm/s ；同时点 Q 由 B 点出发，沿 BA 方向匀速运动，速度为 1cm/s ，过点 Q 的直线 $QE \parallel AC$ ，交 BC 于点 E ，设运动时间为 $t(\text{s})$ ($0 < t < 4$)，试解答下列问题：



- (1) 如果 $PQ \perp AC$ ，求对应的 t 的值；
- (2) 当点 P 在线段 AD 上时，设四边形 $PQEC$ 的面积为 $y\text{cm}^2$ ，求 y 与 t 的关系式；
- (3) 如果使得以 P, Q, E, D 为顶点的四边形是平行四边形，求出相应的 t 的值。

【答案】 (1) $\frac{12}{7}\text{s}$

(2) $y = 36\sqrt{3} - 9\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2}t^2$

(3) $\frac{3}{2}\text{s}$ 或 3s

【解析】

【分析】(1) 由题意得: $AP = 3t\text{cm}$, $AQ = (12-t)\text{cm}$, 可得 $\angle AQP = 30^\circ$, 根据 30° 角直角三角形的性质得到 $AQ = 2AP$, 即可建立方程求解;

(2) 利用等边三角形的性质表示出 AM 、 BN , 再用勾股定理求出 PM 、 QN 、 BD , 求出 $S_{\triangle ABC}$ 和 $S_{\triangle BQE}$, 从而可求出 y ;

(3) 分别对当四边形 $PQED$ 是平行四边形时及当四边形 $PDQE$ 是平行四边形时进行分类讨论, 利用平行四边形的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: 由题意得: $AP = 3t\text{cm}$, $AQ = (12-t)\text{cm}$,

$\because$ 在等边 ABC 中,

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\because PQ \perp AC,$$

$$\therefore \angle AQP = 90^\circ - \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore AQ = 2AP,$$

$$\therefore 2 \times 3t = 12 - t,$$

$$\text{解得: } t = \frac{12}{7};$$

【小问 2 详解】

解: 过点 P 作 $PM \perp AB$ 于 M , 过点 Q 作 $QN \perp BC$ 于 N , 如图 1 所示:

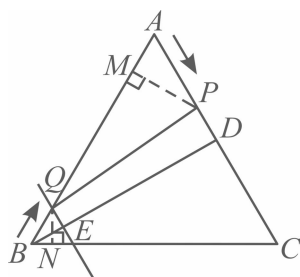


图1

$$\therefore \angle AMP = \angle QNB = 90^\circ,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle A = \angle ABC = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle APM = \angle BQN = 30^\circ,$$

$$\therefore AP = 2AM, \quad QB = 2BN,$$

$$\therefore AM = \frac{3}{2}t \text{ cm}, \quad BN = \frac{1}{2}t \text{ cm},$$

在 $\text{Rt}\triangle AMP$ 中, 由勾股定理得:

$$PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = \sqrt{(3t)^2 - \left(\frac{3}{2}t\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}t,$$

在 $\text{Rt}\triangle ONB$ 中, 由勾股定理得:

$$QN = \sqrt{QB^2 - BN^2} = \sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{2}t\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2}AQ \cdot PM = \frac{1}{2} \times (12-t) \times \frac{3\sqrt{3}}{2}t = -\frac{3\sqrt{3}}{4}t^2 + 9\sqrt{3}t,$$

$$\because OE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle QEB = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle QBE = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle BQE \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore BE = QB = t \text{ cm},$$

$$\therefore S_{\triangle BQE} = \frac{1}{2}BE \cdot QN = \frac{1}{2} \times t \times \frac{\sqrt{3}}{2}t = \frac{\sqrt{3}}{4}t^2,$$

$$\because BD \perp AC,$$

$$\therefore AD = CD = \frac{1}{2}AC = 6 \text{ cm},$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, 由勾股定理得:

$$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3} \text{ cm},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 12 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3},$$

$$\therefore y = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BQE} - S_{\triangle APQ} = 36\sqrt{3} - \left(9\sqrt{3}t - \frac{3\sqrt{3}}{4}t^2\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 9\sqrt{3}t + 36\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{当点 } P \text{ 在线段 } AD \text{ 上时, } y \text{ 与 } t \text{ 的关系式为: } y = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 9\sqrt{3}t + 36\sqrt{3};$$

【小问 3 详解】

解: ①当四边形 $PQED$ 是平行四边形时, 如图 2 所示:

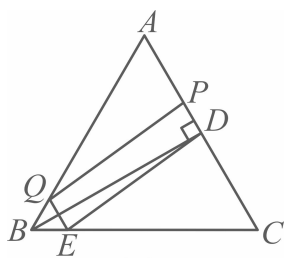


图2

则 $PD = QE$,

$\because QE \parallel AC$,

$\therefore \angle QEB = \angle C = 60^\circ$,

$\therefore \angle QBE = 60^\circ$,

$\therefore \triangle BQE$ 是等边三角形,

$\therefore QB = QE = PD = t\text{cm}$,

$\because AD = 6\text{cm}$,

$\therefore PD = (6 - 3t)\text{cm}$,

$\therefore t = 6 - 3t$,

$\therefore t = \frac{3}{2}$;

②当四边形 $PDQE$ 是平行四边形时, 如图 3 所示:

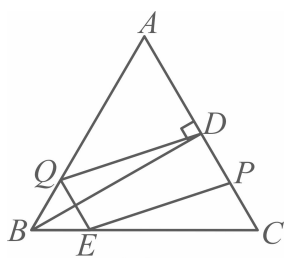


图3

则 $PD = QE$,

同①得: $\triangle BQE$ 是等边三角形,

$\therefore QB = QE = PD = t\text{cm}$,

$\because AD = 6\text{cm}$,

$\therefore PD = (3t - 6)\text{cm}$,

$\therefore t = 3t - 6$,

$\therefore t = 3$;

综上所述，当 t 为 $\frac{3}{2}s$ 或 $3s$ 时，使得以 P, Q, E, D 为顶点的四边形是平行四边形.

【点睛】 本题考查了以等边三角形为背景的动点问题，主要运用了等边三角形的性质、 30° 角的这直角三角形的性质、勾股定理、平行四边形的性质等，掌握动点问题解决方法：“化动为静”是解题的关键.