

2024 学年第二学期期末考试八年级数学试卷

考生注意：

1. 本试卷共 25 题.
2. 试卷满分 150 分，考试时间 100 分钟.
3. 答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
4. 除第一、二答题外，其余各题如无特殊说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. 下列说法正确的是（ ）

A. $x^4 + x = 0$ 是二项方程

B. $xy = 1$ 是二元二次方程

C. $\frac{x^2 - x}{4} = x$ 是分式方程

D. $\sqrt{2}x = 3$ 是无理方程

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了整式方程、分式方程、无理方程及二元二次方程的定义. 根据整式方程、分式方程、无理方程及二元二次方程的定义逐一判断各选项即可.

【详解】解：选项 A：方程 $x^4 + x = 0$ 是整式方程，但二项方程要求仅含两项且为同一未知数的正整数次幂（形如 $ax^n + b = 0$ ）. 此方程含 x^4 和 x （次数不同），不符合二项方程定义，故错误；

选项 B：方程 $xy = 1$ 含两个未知数 x 和 y ，且 xy 的次数为 $1+1=2$ ，符合二元二次方程的定义（含两个未知数且最高次数为 2 的整式方程），故正确；

选项 C：方程 $\frac{x^2 - x}{4} = x$ 的分母为常数 4，不含未知数，属于整式方程（去分母后为 $x^2 - 5x = 0$ ），而非分式方程，故错误；

选项 D：方程 $\sqrt{2}x = 3$ 中， $\sqrt{2}$ 是常数，根号下不含未知数，属于一次整式方程，不是无理方程，故错误；

综上，正确答案为 B.

故选：B.

2. 下列事件中，是随机事件的是（ ）

A. 抛掷一枚质地均匀的硬币 10 次，正面朝上的次数是 5 次

B. 从一个装有白球和黑球的袋子中随机摸出一个球，摸出的是红球

- C. 任意画一个多边形，其外角和是 360°
- D. 从八年级学生中任选 13 个人，其中有 2 人出生的月份相同

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查事件的分类. 根据随机事件的定义，可能发生也可能不发生的事件为随机事件. 逐一分析各选项是否为必然事件、不可能事件或随机事件.

【详解】解：选项 A：抛硬币 10 次，正面朝上的次数可能为 0 到 10 次中的任意值，虽然理论期望为 5 次，但实际结果不确定，属于随机事件；

选项 B：袋中无红球，摸出红球不可能发生，属于不可能事件；

选项 C：多边形外角和恒为 360° ，无论边数多少均成立，属于必然事件；

选项 D：根据鸽巢原理，13 人中至少有 2 人生日在同一月份，属于必然事件.

综上，只有选项 A 是随机事件.

故选：A.

3. 下列判断正确的是 ()

A. $\vec{a} - \vec{a} = 0$

B. 方向相反的两个向量叫做互为相反向量

C. 如果 $\vec{a} = \vec{b}$ ，那么 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

D. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} = \vec{b}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查向量的基本概念和运算. 根据向量的基本概念和运算逐一分析各选项的正确性.

【详解】解：选项 A： $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$.

向量相减的结果应为零向量，但题目中的“0”未用向量符号（如 $\vec{0}$ 或黑体 0），表示标量 0，因此该选项表述不严谨，错误；

选项 B：方向相反的两个向量叫做互为相反向量.

相反向量的定义是方向相反且长度相等的两个向量. 选项仅提到方向相反，未说明长度相等，错误；

选项 C：若 $\vec{a} = \vec{b}$ ，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

向量相等的充要条件是方向与长度均相同，因此模必然相等，正确；

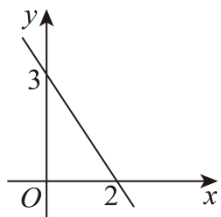
选项 D：若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$.

模相等仅说明长度相同，方向可能不同（如两个不同方向的等长向量），因此错误.

综上，正确选项为 C.

故选：C.

4. 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象如图所示，那么下列说法错误的是（ ）



A. $k < 0$

B. $b = 3$

C. 当 $x > 2$ 时， $y > 0$

D. 当 $y > 3$ 时， $x < 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查一次函数图象的性质. 利用待定系数法求出一次函数的解析式，然后根据函数的性质进行判断即可.

【详解】解：将 $(0, 3)$ ， $(2, 0)$ 代入一次函数解析式 $y = kx + b$ ，

$$\text{得} \begin{cases} b = 3 \\ 2k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 3 \\ k = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

所以解析式为 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ ；

$k = -\frac{3}{2} < 0$ ，故 A 选项不符合题意；

$b = 3$ ，故 B 选项不符合题意；

观察图象可知，当 $x > 2$ 时， $y < 0$ ，故 C 选项符合题意；

观察图象可知，当 $y > 3$ 时， $x < 0$ ，故 D 选项不符合题意；

故选：C.

5. 已知四边形 $ABCD$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，下列条件中，能判断它是平行四边形的是（ ）

A. $AB \parallel CD, AD = BC$

B. $AB = CD, AO = CO$

C. $AB = CD, \angle DAB = \angle BCD$

D. $AB \parallel CD, DO = BO$

【答案】D

【解析】

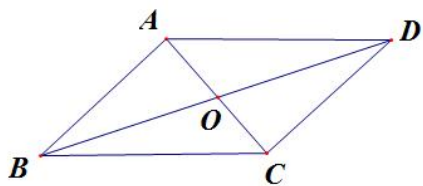
【分析】 本题考查了平行四边形的判定. 根据平行四边形的判定定理逐一分析选项, 选项 D 满足对角线互相平分且一组对边平行的条件.

【详解】 解: 选项 A 中, $AB \parallel CD, AD = BC$, 但无法证明另一组对边平行或相等, 可能存在等腰梯形的情况, 故排除;

选项 B 中, $AB = CD, AO = CO$, 仅说明 AC 被平分, 但未给出 BD 被平分的条件, 无法确定四边形为平行四边形;

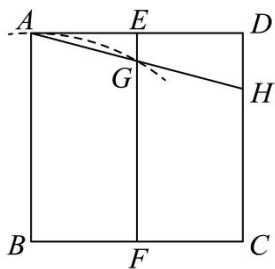
选项 C 中, $AB = CD$ 且 $\angle DAB = \angle BCD$, 但这两个角并非对角, 无法通过边角关系直接判定为平行四边形;

选项 D 中, $AB \parallel CD, DO = BO$ (即 BD 被 O 平分); 由 $AB \parallel CD$ 可得 $\angle ABO = \angle CDO$ (内错角相等), 结合 $BO = DO, \angle AOB = \angle COD$, 可证 $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ (AAS), 从而 $AO = CO$, 此时对角线 AC, BD 均被 O 平分, 满足对角线互相平分的判定条件, 故四边形 $ABCD$ 为平行四边形.



故选: D.

6. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别为边 AD, BC 的中点, 以点 B 为圆心、 AB 的长为半径画弧交线段 EF 于点 G , 直线 AG 交 CD 于点 H , 如果 $CH = 4$, 那么正方形的边长为 ()



- A. 5 B. $2\sqrt{3} + 2$ C. $\sqrt{3} + 3$ D. $3\sqrt{3} - 1$

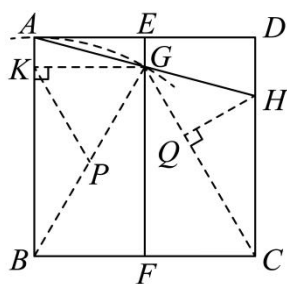
【答案】 B

【解析】

【分析】 过点 G 作 $GK \perp AB$ 于点 K , 设 BG 的中点为 P , 连接 PK, CG , 过点 H 作 $HQ \perp CG$ 于点 Q , 证明四边形 $ABFE$, 四边形 $AKGE$ 是矩形, 则 $GK = AE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BG$, 根据直角三角形斜边中线性

得 $PK = PG = PB = \frac{1}{2}BG$, 则 $PK = PG = GK$, 由此得 $\triangle PGK$ 是等边三角形, 进而得 $\angle PGK = 60^\circ$, $\angle KBG = 30^\circ$, $\angle GBC = 60^\circ$, 继而得 $\triangle BCG$ 是等边三角形, 由此得 $\angle GCH = 30^\circ$, 则 $HQ = \frac{1}{2}CH = 2$, $CQ = 2\sqrt{3}$, 再求出 $\angle QGH = 45^\circ$ 得 $\triangle GQH$ 是等腰直角三角形, 则 $GQ = HQ = 2$, 进而得 $CG = 2\sqrt{3} + 2$, 由此即可得出正方形的边长.

【详解】解: 如图, 过点 G 作 $GK \perp AB$ 于点 K , 设 BG 的中点为 P , 连接 PK , CG , 过点 H 作 $HQ \perp CG$ 于点 Q ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
 $\therefore AB = BC = CD = AD$, $\angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, $AD \parallel BC$,
 $\because$ 点 E 、 F 分别为边 AD 、 BC 的中点,
 $\therefore AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB$, $BF = \frac{1}{2}BC$,
 $\therefore AE = BF$,
 $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是平行四边形,
 又 $\because \angle ABC = 90^\circ$,
 $\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是矩形,
 $\therefore \angle AEF = 90^\circ$,
 $\because GK \perp AB$,
 $\therefore \angle BAD = \angle AEF = 90^\circ = \angle GKA = \angle GKB$,
 $\therefore$ 四边形 $AKGE$ 是矩形,
 $\therefore GK = AE = \frac{1}{2}AB$,
 由作图可知: $BG = AB$,
 $\therefore GK = \frac{1}{2}BG$,
 在 $\text{Rt}\triangle BKG$ 中, 点 P 是 BG 的中点,

$$\therefore PK = \frac{1}{2}BG = PG = PB,$$

$$\therefore PK = PG = GK,$$

$\therefore \triangle PGK$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle PGK = 60^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BKG$ 中, $\angle KBG = 90^\circ - \angle PGK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$$\therefore \angle GBC = \angle ABC - \angle KBG = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

又 $\because BG = AB = BC$,

$\therefore \triangle BCG$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BCG = \angle BGC = 60^\circ, \quad BC = CG,$$

$$\therefore \angle GCH = \angle BCD - \angle BCG = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore HQ \perp CG,$$

$$\therefore \angle CQH = \angle GQH = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle CHQ$ 中, $\angle GCH = 30^\circ$, $CH = 4$,

$$\therefore HQ = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$\therefore CQ = \sqrt{CH^2 - HQ^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

在 $\triangle ABG$ 中, $AB = BG$, $\angle KBG = 30^\circ$,

$$\therefore \angle BGA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KBG) = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle AGC = \angle BGA + \angle BGC = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle QGH = 180^\circ - \angle AGC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle GQH$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore GQ = HQ = 2,$$

$$\therefore CG = CQ + GQ = 2\sqrt{3} + 2,$$

$$\therefore BC = CG = 2\sqrt{3} + 2,$$

$$\therefore \text{正方形的边长为 } 2\sqrt{3} + 2.$$

故选: B.

【点睛】 本题考查正方形的性质, 矩形的判定和性质, 等腰三角形的性质, 等边三角形的判定和性质, 等

腰直角三角形的判定和性质，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，含 30° 角的直角三角形的性质及勾股定理等知识点，通过作辅助线构造等边三角形是解题的关键.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 直线 $y = 2x - 3$ 的截距是_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 一次函数 $y=kx+b$ 在 y 轴上的截距是 b .

【详解】 解： $\because$ 在一次函数 $y=2x-3$ 中， $b=-3$,

$\therefore$ 一次函数 $y=2x-3$ 在 y 轴上的截距 $b=-3$.

【点睛】 本题考查一次函数图象上点的坐标特征，数形结合思想解题是本题的解题关键.

8. 方程 $x^3 = \frac{1}{8}$ 的解是_____.

【答案】 $x = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查立方根，根据立方根的定义求解即可.

【详解】 解： $\because \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$,

$\therefore$ 方程 $x^3 = \frac{1}{8}$ 的解是 $x = \frac{1}{2}$,

故答案为： $x = \frac{1}{2}$.

9. 方程组 $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=21 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组，解题的关键是掌握消元的思想.

先将①式变形，然后利用代入消元法求解即可.

【详解】 解： $\begin{cases} x+y=10 \text{ ①} \\ xy=21 \text{ ②} \end{cases}$,

由①得： $x=10-y$,

将 $x=10-y$ 代入②得: $(10-y)y=21$,

整理得: $y^2-10y+21=0$,

解得: $y=3$ 或 $y=7$,

当 $y=3$ 时, $x=10-3=7$;

当 $y=7$ 时, $x=10-7=3$,

∴ 原方程组的解为: $\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$.

故答案为: $\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$.

10. 将直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 向上平移 5 个单位后所得直线解析式为_____.

【答案】 $y=\frac{1}{3}x+4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图象与几何变换, 解题时要熟练掌握并能灵活运用“上加下减, 左加右减”的平移规律是关键. 由直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 向上平移 5 个单位, 从而结合“上加下减, 左加右减”的平移规律, 即可计算得解.

【详解】 解: 由题意, ∵ 直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 向上平移 5 个单位,

∴ 结合“上加下减, 左加右减”的平移规律, 可得平移后的直线解析式为 $y=\frac{1}{3}x+4$,

故答案为: $y=\frac{1}{3}x+4$.

11. 如果直线 $y=(m+1)x-3$ 经过第二象限, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m<-1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图象与系数的关系, 解题时要熟练掌握并能灵活运用一次函数的性质是关键. 依据题意, 由直线 $y=(m+1)x-3$ 经过第二象限, 则 $m+1<0$, 进而可以判断得解.

【详解】 解: 由题意, ∵ 直线 $y=(m+1)x-3$ 经过第二象限,

∴ $m+1<0$.

∴ $m<-1$.

故答案为： $m < -1$.

12. 用换元法解方程 $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = 5$ 时，如果设 $\frac{x}{x^2-1} = y$ ，那么原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $2y^2 - 5y + 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查换元法解分式方程，正确进行计算是解题关键.

设 $\frac{x}{x^2-1} = y$ ，则： $\frac{x^2-1}{x} = \frac{1}{y}$ ，将方程转化为： $2y + \frac{1}{y} = 5$ ，再去分母转化为整式方程即可.

【详解】 设 $\frac{x}{x^2-1} = y$ ，则： $\frac{x^2-1}{x} = \frac{1}{y}$ ，

$\therefore$ 原方程化为： $2y + \frac{1}{y} = 5$ ，

$\therefore$ 去分母转化为整式方程可得：

$$2y^2 - 5y + 1 = 0,$$

故答案为： $2y^2 - 5y + 1 = 0$.

13. 一个不透明的口袋里装有 2 个红球、3 个白球，它们除了颜色外其他都相同. 每次从口袋里摸出 1 个球，观察记录颜色后再放回搅匀. 如果连续 5 次摸出的都是白球，那么第 6 次摸出红球的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】 此题考查概率公式求概率，可以直接应用求概率的公式计算即可.

【详解】 解：因为每次只摸出一只小球时，布袋中共有小球 $2 + 3 = 5$ 个，其中红球有 2 个，

所以第 6 次摸出黄球的概率是 $\frac{2}{5}$ ，

故答案为： $\frac{2}{5}$.

14. 2024 年世界人工智能大会上展示的无人汽车和飞行汽车的技术突破备受瞩目. 已知某品牌飞行汽车的最高时速比无人汽车快 150 千米/小时，若两车分别以各自的最高速度行驶 80 千米，飞行汽车所用时间比无人

汽车少 0.5 小时. 设无人汽车的最高时速为 x 千米/小时, 那么根据题意可列出方程_____.

【答案】 $\frac{80}{x} - \frac{80}{x+150} = 0.5$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的实际应用, 去理解题意是解题的关键.

设无人汽车的最高时速为 x 千米/小时, 则飞行汽车的最高时速为 $(x+150)$ 千米/小时, 分别表示其飞行时间, 根据飞行汽车所用时间比无人汽车少 0.5 小时建立方程即可.

【详解】 解: 设无人汽车的最高时速为 x 千米/小时, 则飞行汽车的最高时速为 $(x+150)$ 千米/小时,

由题意得: $\frac{80}{x} - \frac{80}{x+150} = 0.5$,

故答案为: $\frac{80}{x} - \frac{80}{x+150} = 0.5$.

15. 一个多边形的内角和等于 900° , 这个多边形的边数是_____.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形的知识, 熟练掌握多边形内角和公式是解题关键. 设该多边形的边数为 n , 根据多边形内角和公式 $(n-2) \times 180^\circ$ 求解即可.

【详解】 解: 设该多边形的边数为 n , 根据题意,

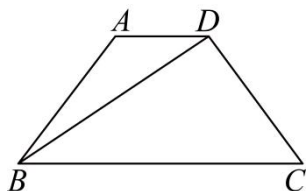
可得 $(n-2) \times 180^\circ = 900^\circ$,

解得 $n = 7$,

所以, 这个多边形的边数是 7.

故答案为: 7.

16. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 2$, $BC = 8$, $AB = CD = 5$, 那么 $BD =$ _____.



【答案】 $\sqrt{41}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行四边形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 勾股定理等知识, 过点 D

作 $DF \parallel AB$ 交 BC 于点 F ，证明四边形 $ABFD$ 是平行四边形，由平行四边形的性质进一步得出 $\triangle DFC$ 是等腰三角形，过点 D 作 $DE \perp FC$ 于点 E ，由三线合一可得出 $FE = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}(BC - BF) = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ ，然后利用勾股定理求出 DE ，进而再利用勾股定理即可求出答案。

【详解】解：过点 D 作 $DF \parallel AB$ 交 BC 于点 F ，

$\because AD \parallel BC$ ，

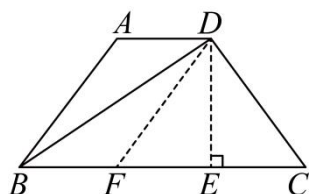
$\therefore$ 四边形 $ABFD$ 是平行四边形，

$\therefore AD = BF = 2$ ， $DF = AB = 5$ ，

又 $\because CD = 5$ ，

$\therefore \triangle DFC$ 是等腰三角形，

过点 D 作 $DE \perp FC$ 于点 E ，



则点 E 是 FC 的中点，

$$FE = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}(BC - BF) = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$\therefore BE = 5$

在 $\text{Rt}\triangle DFE$ 中，

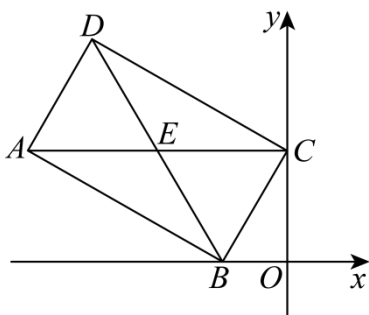
$$DE = \sqrt{DF^2 - FE^2} = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中，

$$BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{41},$$

故答案为： $\sqrt{41}$

17. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 E ， $B(-1,0)$ ， $C(0,\sqrt{3})$ ，如果 $AC \parallel x$ 轴，那么 BE 的长为_____.

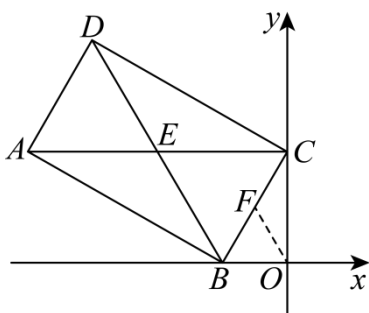


【答案】2

【解析】

【分析】 本题考查了平面直角坐标系、矩形的性质、直角三角形的性质、等边三角形性质和判定、勾股定理，解题的关键是证明 $\triangle EBC$ 是等边三角形，进而求解. 取 BC 的中点 F ，连接 OF ，先根据勾股定理求得 BC 的长度，根据直角三角形的性质得到 $OF = BF = \frac{1}{2}BC = 1$ ，进而得出 $\triangle OBF$ 是等边三角形，再根据矩形的性质及 $AC \parallel x$ 轴证明 $\triangle EBC$ 是等边三角形，从而得到答案.

【详解】 解：如图，取 BC 的中点 F ，连接 OF ，



在 $\text{Rt}\triangle BCO$ 中， $OB = 1$ ， $OC = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{BO^2 + CO^2} = 2,$$

$\because BC$ 的中点 F ，

$$\therefore OF = BF = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\therefore OF = BF = OB,$$

$\therefore \triangle BOF$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle OBF = 60^\circ,$$

$\because AC \parallel x$ 轴，

$$\therefore \angle ECB = \angle OBF = 60^\circ,$$

$\because$ 矩形 $ABCD$ ，

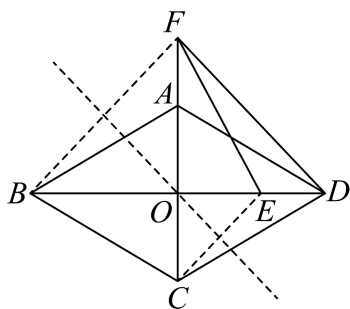
$$\therefore EB = EC,$$

$\therefore \triangle EBC$ 是等边三角形,

$\therefore BE = BC = 2$,

故答案为: 2.

18. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AC = 6, BD = 10$. 将边 BC 沿着过点 O 的一条直线翻折, 点 C 的对应点为 E , 点 B 的对应点为 F , 连接 EF 、 DF , 如果点 E 落在线段 OD 上, 那么 $\triangle DEF$ 的面积为_____.



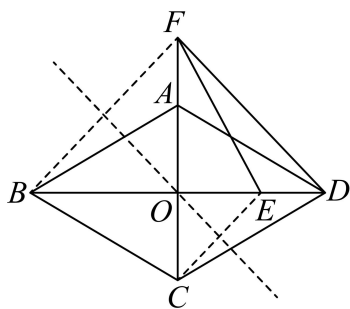
【答案】5

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质, 折叠的性质, 解题的关键是确定折叠后点 B 落在射线 OA 上.

由菱形得到 $AC \perp BD$, $OB = OD = 5$, $OC = \frac{1}{2}AC = 3$, 然后根据折叠的性质确定点 B 落在射线 OA 上, $OE = OC = 3, OF = OB = 5$, 在由三角形公式即可求解.

【详解】 解: 如图



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD$, $OB = OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 10 = 5$, $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$,

$\therefore$ 折叠, 点 C 的对应点为 E , 且点 E 落在线段 OD 上,

$\therefore OE = OC = 3, OF = OB = 5$, 折痕平分 $\angle EOC$, 即平分 $\angle AOB$,

$\therefore F$ 在射线 OA 上,

$\therefore DE = 5 - 3 = 2$,

$$\therefore \triangle DEF \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} DE \times OF = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5,$$

故答案为: 5.

三、解答题: (本大题共 7 题, 其中第 19 至 22 题每题 10 分, 第 23 至 24 题每题 12 分, 第 25 题 14 分, 满分 78 分)

19. 解方程: $x + \sqrt{2x-3} = 3$.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解法解一元二次方程. 熟练掌握解一元二次方程是解题的关键.

由 $\sqrt{2x-3} = 3-x$, 可得 $2x-3 = (3-x)^2$, 整理得 $x^2 - 8x + 12 = 0$, 然后计算求出满足要求的解即可.

【详解】 解: $x + \sqrt{2x-3} = 3$,

$$\sqrt{2x-3} = 3-x,$$

$$2x-3 = (3-x)^2,$$

$$2x-3 = 9-6x+x^2,$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0,$$

$$(x-2)(x-6) = 0,$$

解得, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$,

检验, 当 $x = 2$ 时, $x + \sqrt{2x-3} = 3$, 当 $x = 6$ 时, $x + \sqrt{2x-3} = 9 \neq 3$,

$\therefore$ 方程的解为 $x = 2$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x + 2y = 12 \text{ ①} \\ x^2 + 5xy - 6y^2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

【答案】:
$$\begin{cases} x_1 = 18 \\ y_1 = -3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组, 掌握消元的方法是解题的关键.

先将②式进行因式分解为两个二元一次方程, 再与①式组合成两个新的方程组, 分别求解即可.

【详解】解：
$$\begin{cases} x+2y=12 \textcircled{1} \\ x^2+5xy-6y^2=0 \textcircled{2} \end{cases},$$

由②得： $(x+6y)(x-y)=0,$

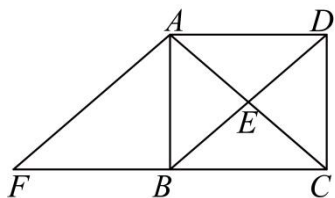
$\therefore x+6y=0$ 或 $x-y=0,$

原方程组可化为：
$$\begin{cases} x+2y=12 \\ x+6y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+2y=12 \\ x-y=0 \end{cases},$$

分别解得：
$$\begin{cases} x=18 \\ y=-3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$$

$\therefore$ 原方程组的解为：
$$\begin{cases} x_1=18 \\ y_1=-3 \end{cases}, \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=4 \end{cases}.$$

21. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于点 E ，点 F 在 CB 的延长线上，且 $BF=BC$ ，连接 AF 。



(1) 写出图中所有与 $\overrightarrow{AD}$ 相等的向量：_____；

(2) 填空： $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} =$ _____， $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BF} =$ _____；

(3) 在图中直接作出 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC}$ (保留作图痕迹，不要求写作法，写出结论)。

【答案】(1) $\overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{FB}$

(2) $\overrightarrow{AD}$ ； $\overrightarrow{AC}$

(3) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了向量的线性运算，相等向量的定义，熟练掌握向量线性运算法则，是解题的关键。

(1) 根据相等向量的方向和长度都相同，找出与 $\overrightarrow{AD}$ 相等的向量即可；

(2) 根据向量的线性运算法则进行运算即可；

(3) 过点 B 作 $BG \parallel EC$ ，截取 $BG = EC$ ，连接 GD ，则 $\overrightarrow{GD}$ 即为所求。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore AD = BC, AD \parallel BC,$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC},$$

$$\therefore BF = BC,$$

$$\therefore AD = BF,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FB},$$

综上所述可知：与 $\overrightarrow{AD}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{FB}$ ；

【小问 2 详解】

$$\text{解：} \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$$

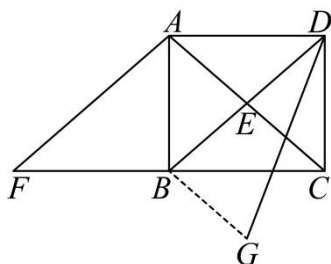
$$= \overrightarrow{AD};$$

$$\therefore \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BF},$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC};$$

【小问 3 详解】

解： $\overrightarrow{GD}$ 即为所求.



$$\therefore BG \parallel EC, \quad BG = EC,$$

$$\therefore \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EC},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GD}.$$

22. 为提高控制精度从而减少误差导致的输液不良事件，医疗输液器（图 1）中的流量调节器从滚轮式改进为带刻度的旋钮式（图 2）。小明发现，在相同档位下，不同粘度的液体流速存在着差异。于是他对此展开实验研究。（实验假设：对于旋钮式输液器设定的任意一个档位，同种液体的输液速度保持恒定。）



图1



图2

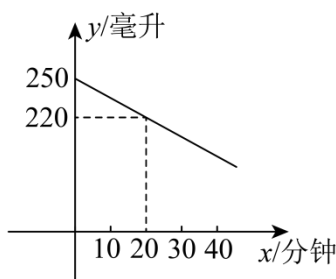


图3

(1) 小明用旋钮式输液器设定了每小时 120 毫升的档位测试液体 A 的流速，输液袋内初始药液量为 250 毫升，得到输液袋剩余药液量 y (毫升) 和时间 x (分钟) 之间的关系如图 3 所示：

①求 y 关于 x 的函数解析式 (不写定义域)；

②判断液体 A 的实际流速是否与设定流速 (120 毫升/小时) 一致？若一致，请说明理由；若不一致，假设液体 A 的实际流速与设定流速成正比，则想要达到每小时 120 毫升的流速，应该把旋钮式输液器的流速设定为多少毫升/小时？

(2) 小明用相同档位测试液体 B 和液体 C 的实际流速，实验发现：液体 B 的流速比液体 C 每小时快 60 毫升，因此输 250 毫升液体 C 所需时间是输 200 毫升液体 B 所需时间的 2 倍，求用该档位输液时液体 B 和液体 C 的实际流速。

【答案】 (1) ① $y = -\frac{3}{2}x + 250$ ②不一致，160

(2) 该档位输液时液体 B 的流速为 160ml/h ，液体 C 的实际流速为 100ml/h

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的图形和性质，利用待定系数法求函数解析式，列分式方程解决实际问题等内容，解题的关键是熟练掌握一次函数的性质，并找出等量关系列出方程。

(1) ①利用待定系数法即可求出函数解析式；

②求出实际流速进行比较即可，利用待定系数法求出正比例函数，代入求值即可；

(2) 假设液体 C 的实际流速为 $t\text{ml/h}$ ，则液体 B 的实际流速为 $(t + 60)\text{ml/h}$ ，根据等量关系列出分式方程，进行求解即可。

【小问 1 详解】

解：①假设函数解析式为 $y = kx + b$ ，

将 $(0, 250)$ ， $(20, 220)$ 代入解析式得，

$$\begin{cases} b = 250 \\ 220 = 20 \cdot k + b \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{3}{2}, \\ b = 250 \end{cases}$$

$\therefore$ 函数解析式为 $y = -\frac{3}{2}x + 250$;

②不一致, 理由如下:

当 $y = -\frac{3}{2}x + 250$ 函数值为 0 时,

$$-\frac{3}{2}x + 250 = 0,$$

$$\text{解得 } x = \frac{500}{3},$$

$$250 - \frac{500}{3} = 1.5 \text{ml/min},$$

$$120 \text{ml/h} = 2 \text{ml/min},$$

$$2 \neq 1.5,$$

所以, 液体 A 的实际流速是否与设定流速不一致,

假设液体 A 的实际流速为 m , 设定流速为 n , $m = an$,

将 $(2, 1.5)$ 代入上式得, $1.5 = 2a$,

$$\text{解得 } a = 0.75,$$

$$\therefore m = 0.75n$$

当 $m = 2$ 时, 代入 $m = 0.75n$ 得,

$$n = \frac{8}{3},$$

$$\frac{8}{3} \text{ml/min} = 160 \text{ml/h},$$

所以, 应该把旋钮式输液器的流速设定为 160 毫升/小时;

【小问 2 详解】

解: 假设液体 C 的实际流速为 $t \text{ml/h}$, 则液体 B 的实际流速为 $(t + 60) \text{ml/h}$,

$$\text{根据题意得 } \frac{250}{t} = 2' \frac{200}{t + 60},$$

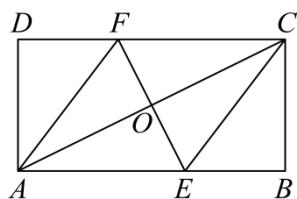
解方程得 $t = 100$,

经检验, $t = 100$ 是分式方程的解, 并符合题意,

$$\text{此时, } t + 60 = 160,$$

所以, 该档位输液时液体 B 的流速为 160ml/h , 液体 C 的实际流速为 100ml/h .

23. 已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 O 为对角线 AC 的中点，过点 O 作 $EF \perp AC$ 交边 AB 、 CD 于点 E 、 F ，联结 AF 、 CE 。



(1) 求证：四边形 $AECF$ 为菱形；

(2) 如果四边形 $ABCD$ 为矩形， $AD=8$ ， $CD=16$ ，求 EF 的长。

【答案】 (1) 见解析 (2) $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查矩形的性质，菱形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，熟练掌握以上知识是解题关键。

(1) 由矩形的性质可 $CF \parallel AE$ ，进而得出 $\angle FCO = \angle EAO$ ，结合 O 为对角线 AC 的中点得出 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA)，即 $CF = AE$ ，即可得出四边形 $AECF$ 是平行四边形，结合 $EF \perp AC$ 即可得出四边形 $AECF$ 是菱形；

(2) 根据勾股定理求出 AC ，然后根据菱形的性质和勾股定理求出 OF ，进而可以解决问题。

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore CF \parallel AE$ ，

$\therefore \angle FCO = \angle EAO$ ，

$\because O$ 为对角线 AC 的中点，

$\therefore AO = CO$ ，

$\therefore \angle AOE = \angle COF$ ，

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA)，

$\therefore CF = AE$ ，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，

$\because EF \perp AC$ ，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形， $AD=8$ ， $CD=16$ ，

$$\therefore \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 8\sqrt{5},$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = 4\sqrt{5},$$

$\because$ 四边形 $AECF$ 是菱形,

$$\therefore AF = CF,$$

$$\therefore DF = CD - CF = 16 - AF,$$

$$\because AD^2 + DF^2 = AF^2,$$

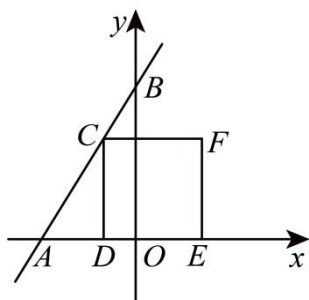
$$\therefore 8^2 + (16 - AF)^2 = AF^2,$$

$$\therefore AF = 10,$$

$$\therefore OF = \sqrt{AF^2 - OA^2} = \sqrt{10^2 - (4\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore EF = 2OF = 4\sqrt{5}.$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $y = \frac{3}{2}x + 6$ 与 x 轴交于点 A , y 轴交于点 B , 点 C 在射线 AB 上 (不与点 A 重合), 点 D 、 E 在 x 轴上 (点 D 在点 E 左侧), 四边形 $CDEF$ 是正方形.



(1) 当点 C 的横坐标为 -2 时, 求直线 AF 的表达式;

(2) 当点 C 在射线 AB 上运动时, 设点 C 的横坐标为 t , 用 t 表示点 F 的坐标, 判断点 F 是否始终在 (1) 中的直线 AF 上? 并说明理由;

(3) 点 G 在 x 轴上, 如果四边形 $ABFG$ 是等腰梯形, 求点 G 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{3}{5}x + \frac{12}{5}$

(2) $F\left(\frac{5}{2}t + 6, \frac{3}{2}t + 6\right)$, 在, 理由见解析

(3) $G\left(-\frac{22}{25}, 0\right)$ 或 $G(10, 0)$

【解析】

【分析】(1) 根据题意, 先求出 $C(-2,3)$ 、 $A(-4,0)$, 再由正方形性质得到 $F(1,3)$, 最后由待定系数法列方程组求解即可得到答案;

(2) 由 (1) 的求解过程, 同理求解即可得到 $F\left(\frac{5}{2}t+6, \frac{3}{2}t+6\right)$, 将 $x=\frac{5}{2}t+6$ 代入 $y=\frac{3}{5}x+\frac{12}{5}$ 验证即可得到答案;

(3) 由 (2) 中知 $F\left(\frac{5}{2}t+6, \frac{3}{2}t+6\right)$, 根据四边形 $ABFG$ 是等腰梯形, 分两种情况讨论求解即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $AB: y=\frac{3}{2}x+6$, 点 C 在直线 AB 上, 点 C 的横坐标为 -2 ,

$$\therefore y=\frac{3}{2}\times(-2)+6=-3+6=3, \text{ 即 } C(-2,3),$$

$$\therefore CD=3,$$

当 $y=0$ 时, 则 $0=\frac{3}{2}x+6$, 解得 $x=-4$, 即 $A(-4,0)$,

$\because$ 四边形 $CDEF$ 是正方形,

$$\therefore CF=CD=3,$$

$$\therefore F(1,3),$$

设直线 AF 的表达式为 $y=kx+b$,

$$\text{将 } A(-4,0)、F(1,3) \text{ 代入 } y=kx+b \text{ 得 } \begin{cases} 0=-4k+b \\ 3=k+b \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k=\frac{3}{5} \\ b=\frac{12}{5} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AF \text{ 的表达式为 } y=\frac{3}{5}x+\frac{12}{5};$$

【小问 2 详解】

解: 在, 理由如下:

$$\text{由 (1) 知, 直线 } AF \text{ 的表达式为 } y=\frac{3}{5}x+\frac{12}{5},$$

当点 C 在射线 $AB: y = \frac{3}{2}x + 6$ 上运动时, 设点 C 的横坐标为 t ,

$$\therefore C\left(t, \frac{3}{2}t + 6\right),$$

$$\text{则 } CD = \frac{3}{2}t + 6,$$

$\because$ 四边形 $CDEF$ 是正方形,

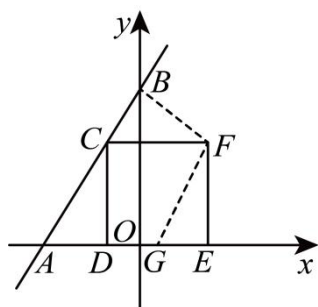
$$\therefore CF = CD = \frac{3}{2}t + 6, \text{ 则 } F\left(\frac{5}{2}t + 6, \frac{3}{2}t + 6\right),$$

$$\text{将 } x = \frac{5}{2}t + 6 \text{ 代入 } y = \frac{3}{5}x + \frac{12}{5}, \text{ 得 } y = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{2}t + 6\right) + \frac{12}{5} = \frac{3}{2}t + 6,$$

即此时, $F\left(\frac{5}{2}t + 6, \frac{3}{2}t + 6\right)$ 在 (1) 中的直线 AF 上;

【小问 3 详解】

解: 如图所示:



$$\text{由 (2) 知, } F\left(\frac{5}{2}t + 6, \frac{3}{2}t + 6\right),$$

根据题意, 分两种情况:

当 $AB \parallel FG$ 时,

$$\because \text{直线 } AB: y = \frac{3}{2}x + 6,$$

当 $x = 0$ 时, $y = 6$, 即 $B(0, 6)$,

$$\text{设直线 } FG: y = \frac{3}{2}x + b', \text{ 将 } F\left(\frac{5}{2}t + 6, \frac{3}{2}t + 6\right) \text{ 代入得 } b' = -\frac{9}{4}t - 3,$$

$$\therefore \text{直线 } FG: y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}t - 3,$$

当 $y=0$ 时, 则 $0 = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}t - 3$, 解得 $x = \frac{3}{2}t + 2$,

$$\therefore G\left(\frac{3}{2}t + 2, 0\right),$$

如果四边形 $ABFG$ 是等腰梯形, 则 $AG = BF$,

$$\therefore \frac{3}{2}t + 6 = \sqrt{\left(\frac{5}{2}t + 6\right)^2 + \left(\frac{3}{2}t + 6 - 6\right)^2}, \text{ 即 } 25t^2 + 48t = 0,$$

$$\text{解得 } t = 0 \text{ 或 } t = -\frac{48}{25},$$

当 $t = 0$ 时, $F(6, 6)$ 、 $G(2, 0)$,

$$\therefore A(-4, 0)、B(0, 6),$$

$\therefore$ 四边形 $ABFG$ 是平行四边形 (舍去);

$$\text{当 } t = -\frac{48}{25} \text{ 时, } F\left(\frac{6}{5}, \frac{78}{25}\right)、G\left(-\frac{22}{25}, 0\right),$$

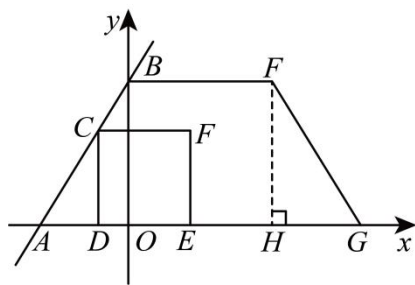
$$\therefore A(-4, 0)、B(0, 6),$$

$$\therefore \text{四边形 } ABFG \text{ 是等腰梯形, 此时 } G\left(-\frac{22}{25}, 0\right);$$

当 $AG \parallel FB$ 时, 则点 C 与点 $B(0, 6)$ 重合,

如果四边形 $ABFG$ 是等腰梯形, 则 $AB = FG$,

过点 F 作 $FH \perp x$ 轴, 如图所示:



$\therefore$ 四边形 $OBFH$ 是正方形,

$$\therefore BO = BF = FH = OH = 6,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle GHF,$$

$$\therefore HG = OA = 4,$$

$$\therefore G(10, 0);$$

∴ 综上，点 G 的坐标为 $\left(-\frac{22}{25}, 0\right)$ 或 $(10, 0)$ 。

【点睛】 本题考查一次函数与四边形综合，涉及一次函数图象与性质、正方形性质、待定系数法确定函数表达式、等腰梯形定义、两点之间距离公式等知识。数形结合，灵活运用一次函数图象与性质是解决问题的关键。

25. 在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $AC = 2\sqrt{3}$ ， $BD = 2$ ， E 是边 AB 上的一点，连接 DE 。

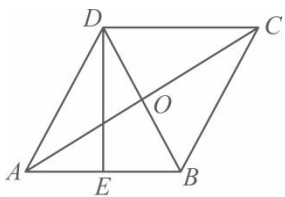


图1

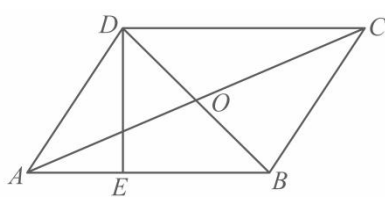
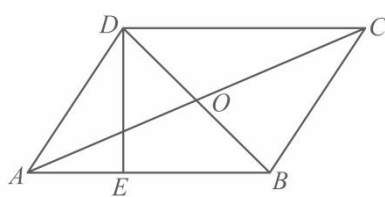


图2



备用图

(1) 如果 $DE \perp AB$ ，

①如图 1，当点 E 为 AB 中点时，求证：四边形 $ABCD$ 为菱形；

②如图 2，设 $AE = x$ ， $AB = y$ ，求 y 与 x 的函数解析式（不用写定义域）；

(2) 连接 OE ，如果 $\triangle ODE$ 是以 OE 为腰的等腰直角三角形，求 BE 的长。连接

【答案】 (1) ①见解析； ② $y = \frac{2}{x}$

(2) $\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) ①可得 DE 垂直平分 AB ，则 $DA = DB = 2$ ，再由平行四边形的性质以及勾股定理逆定理证明 $DO^2 + AO^2 = AD^2$ ，则 $AC \perp BD$ ，即可证明其为菱形；

②过点 C 作 $CH \perp AB$ 交 AB 延长线于点 H ，根据平行线间的距离相等得到 $CH = DE$ ，然后证明

$\text{Rt}\triangle AED \cong \text{Rt}\triangle BHC$ ，则 $AE = BH = x$ ，由勾股定理得到 $AC^2 - AH^2 = DB^2 - BE^2$ ，代入化简即可得到函数解析式；

(2) 分两种情况讨论：①当 $OE = OD$ ， $\angle EOD = 90^\circ$ 时，则 $\angleEOB = 90^\circ$ ， $OB = OE = 1$ ，再由勾股定理即可求解；当 $ED = EO$ ， $\angleDEO = 90^\circ$ 时，

过点 E 作 $EH \perp BD$ 于点 H ，则 $DH = HO = HE = \frac{1}{2}DO = \frac{1}{2}$ ，则 $BH = BO + OH = \frac{3}{2}$ ，再 $\text{Rt}\triangle BHE$ 运用勾股定理即可求解。

【小问 1 详解】

①证明：∵ 平行四边形 $ABCD$ 中， $AC = 2\sqrt{3}$ ， $BD = 2$ ，

$$\therefore AO = OC = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}, \quad DO = BO = \frac{1}{2}BD = 1,$$

$$\because DE \perp AB, \quad EA = EB,$$

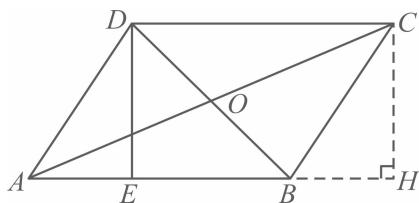
$$\therefore DA = DB = 2,$$

$$\therefore DO^2 + AO^2 = AD^2,$$

$$\therefore \angle DOA = 90^\circ, \text{ 即 } AC \perp BD,$$

∴ 四边形 $ABCD$ 为菱形；

②解：过点 C 作 $CH \perp AB$ 交 AB 延长线于点 H ，



∵ 平行四边形 $ABCD$ ，

$$\therefore AD = BC, AB \parallel CD,$$

$$\because DE \perp AB, \quad CH \perp AB,$$

$$\therefore CH = DE,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AED \cong \text{Rt}\triangle BHC,$$

$$\therefore AE = BH = x,$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle ACH \text{ 中, } CH^2 = AC^2 - AH^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEB \text{ 中, } DE^2 = DB^2 - BE^2,$$

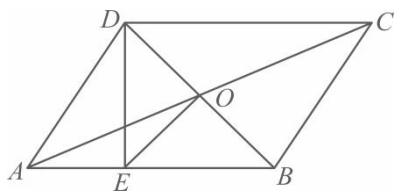
$$\therefore AC^2 - AH^2 = DB^2 - BE^2,$$

$$\therefore (2\sqrt{3})^2 - (x+y)^2 = 2^2 - (y-x)^2,$$

$$\text{化简整理得: } y = \frac{2}{x};$$

【小问 2 详解】

解：①当 $OE = OD$, $\angle EOD = 90^\circ$ 时，如图



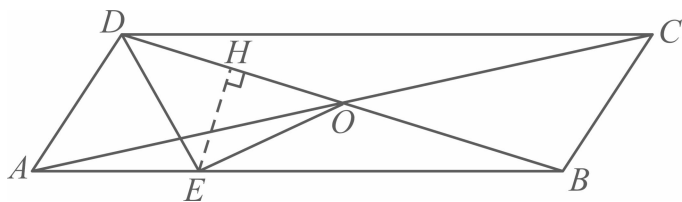
$$\therefore \angle EOB = 90^\circ,$$

$$\because OD = OB = 1,$$

$$\therefore OB = OE = 1,$$

$$\therefore BE = \sqrt{OB^2 + OE^2} = \sqrt{2};$$

当 $ED = EO$, $\angle DEO = 90^\circ$ 时, 如图:



过点 E 作 $EH \perp BD$ 于点 H ,

$\therefore H$ 为 DO 中点,

$$\therefore DH = HO = HE = \frac{1}{2} DO = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BH = BO + OH = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore BE = \sqrt{BH^2 + HE^2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

综上: 当 $\triangle ODE$ 是以 OE 为腰的等腰直角三角形, BE 的长为 $\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质, 菱形的判定, 勾股定理及其逆定理, 等腰三角形的性质, 直角三角形斜边中线的性质, 函数关系式, 全等三角形的判定与性质等知识点, 难度较大.