

2024-2025 学年八年级数学下学期期末模拟卷 03

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 本试卷共 26 题, 选择 6 题, 填空 12 题, 解答 8 题
2. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
4. 回答客观题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
5. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 下列方程中, 是二项方程的为 ()

- A. $(x-2)^3 = 8$ B. $3y^2 = 0$ C. $x^4 = 16x$ D. $x = -3$

【答案】D

【分析】本题考查二项方程的定义, 注意二项方程的左边只有两项, 一项含未知数, 一项是常数, 右边为 0, 熟练掌握二项方程的定义是解决问题的关键。

二项方程的左边只有两项, 其中一项含未知数 x , 另一项是常数项; 方程的右边是 0, 结合选项进行判断即可。

【详解】解: A. $(x-2)^3 = 8$ 不是二项方程, 方程右边不等于 0, 不符合题意;

B. $3y^2 = 0$ 不是二项方程, 方程左边没有常数项, 不符合题意;

C. $x^4 = 16x$ 不是二项方程, 不符合题意;

D. $x = -3$ 即 $x+3=0$ 是二项方程, 符合题意;

故选: D.

2. 下列事件中, 是必然事件的是 ()

- A. 购买一张彩票中奖一百万元 B. 在地球上, 上抛的篮球会下落
C. 明天太阳从西边出来 D. 上海地区明天降水

【答案】B

【分析】本题考查的是必然事件、不可能事件、随机事件的概念．必然事件指在一定条件下，一定发生的事件．不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件，不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件．根据事件发生的可能性大小判断即可．

【详解】解：A．购买一张彩票中奖一百万元是随机事件，不符合题意；

B．地球上，上抛的篮球会下落是必然事件，符合题意；

C．明天太阳从西边出来是不可能事件，不符合题意；

D．上海地区明天降水是随机事件，不符合题意；

故选：B．

3. 函数 $y = -3x + b$ 的图象不经过第一象限，则 b 的取值范围是（ ）

A. $b > 0$

B. $b \geq 0$

C. $b < 0$

D. $b \leq 0$

【答案】D

【分析】本题主要考查了一次函数图象的性质，解题的关键是熟练掌握一次函数图象的性质，注意用数形结合的思想解答．根据一次函数 $y = -3x + b$ 的图象不经过第一象限，可知 $b \leq 0$ ，即可求解．

【详解】 $\because$ 一次函数 $y = -3x + b$ 的图象不经过第一象限，

$\therefore b \leq 0$ ，

故选：D．

4. 下列方程中，没有实数根的是（ ）

A. $x + 1 = 0$

B. $x^2 - 1 = 0$

C. $\sqrt{x} + 1 = 0$

D. $\frac{x^2 - 8}{x - 3} = \frac{1}{x - 3}$

【答案】C

【分析】本题考查了解无理方程，算术平方根，解分式方程等知识点，能把无理方程转化成有理方程和把分式方程转化成整式方程是解此题的关键．

移项，即可判断 A；根据平方根的定义可判断 B；根据算术平方根的非负性即可判断 C；方程两边都乘以 $x - 3$ ，再求出方程的解，进行检验后即可判断 D．

【详解】解：A、 $x + 1 = 0$ ，

移项，得 $x = -1$ ，

$\therefore$ 此方程有实数根，故本选项不符合题意；

B、 $x^2 - 1 = 0$ ，

$$\therefore x^2=1,$$

则 $x=1$ 或 $x=-1$

即原方程有实数根，故本选项不符合题意；

C、 $\because \sqrt{x}+1=0,$

$$\therefore \sqrt{x}=-1<0,$$

此时 x 不存在，

即原方程无实数根，故本选项符合题意；

D、 $\frac{x^2-8}{x-3}=\frac{1}{x-3},$

方程两边都乘以 $x-3$ ，得 $x^2-8=1,$

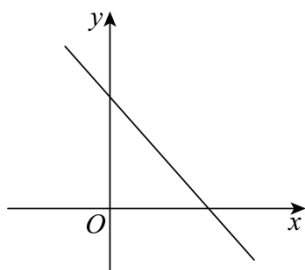
解得： $x=\pm 3,$

经检验 $x=3$ 是增根， $x=-3$ 是原方程的解，

即原方程有实数根，故本选项不符合题意；

故选：C.

5. 如图是某一次函数的图像，点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 为该图像上两点，如果 $x_1 > x_2$ 时，那么 y_1 与 y_2 的大小关系是（ ）



A. $y_1 < y_2$

B. $y_1 > y_2$

C. $y_1 = y_2$

D. 无法判断

【答案】A

【分析】本题考查一次函数的性质，一次函数 $y=kx+b$ ，当 $k>0$ 时， y 随 x 增大而增大；当 $k<0$ 时， y 随 x 增大而减小.

根据一次函数性质求解即可.

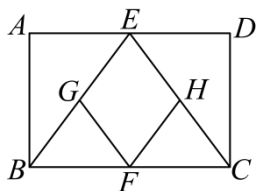
【详解】解：根据一次函数的图象可知， y 随 x 增大而减小，

$$\because x_1 > x_2,$$

$$\therefore y_1 < y_2;$$

故选：A.

6. 如图，矩形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点， G 、 H 分别是 BE 、 CE 的中点，要使四边形 $EGFH$ 是正方形，只需添加一个条件，这个条件可以是（ ）



A. $BC = AB$

B. $BC = 2AB$

C. $BC = \sqrt{2}AB$

D. $BC = \sqrt{3}AB$

【答案】B

【分析】先利用矩形的性质进一步得出 $BE = CE$ ，再根据三角形中位线的判定和性质得出四边形 $EGFH$ 是菱形，再证明 $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形，进而可得出 $\angle GEH = 90^\circ$ ，即可证明四边形 $EGFH$ 是正方形.

【详解】解：添加的条件可以是 $BC = 2AB$ ，理由如下：

$\because$ 点 E 是 AD 的中点，

$$\therefore AE = DE,$$

$\because ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ, \quad AB = DC,$$

$$\therefore \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{CD^2 + DE^2},$$

$$\therefore BE = CE,$$

$\because$ 点 G 、 F 、 H 分别是 EB 、 BC 、 CE 的中点，

$$\therefore GF = \frac{1}{2}EC = EH = HC, \quad HF = \frac{1}{2}BE = GE = BG,$$

$$\therefore EG = GF = FH = HE,$$

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是菱形，

$\because BC = 2AB$ ，点 E 是 AD 的中点，

$\therefore \triangle ABE$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore \angle AEB = 45^\circ,$$

同理可得 $\angle DEC = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle GEH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是正方形.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了正方形的判定，矩形的性质，等腰直角三角形的判定和性质，三角形中位线的判定和性质等知识，掌握正方形的判定是解题的关键.

第二部分（非选择题 共 82 分）

二、填空题（本大题共 12 小题，每小题 2 分，满分 24 分）

7. 在一个盒子中有 4 张形状、大小相同质地均匀的卡片，上面分别标着 1, 2, 3, 4 这四个数字，从盒子里随机抽出两张卡片，则所得卡片上的两数之和是 5 的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析】本题主要考查了列举法求概率，概率公式等知识点，熟练掌握列举法求概率是解题的关键. 列举出所有可能出现的情况，再用所求情况数除以总的情况数即可得解.

【详解】解：从 4 张卡片中随机抽出两张卡片共有 6 种可能的结果，即：

$(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$,

所得卡片上的两数之和是 5 的情况共有 2 种，即： $(1,4)$, $(2,3)$,

$\therefore$ 所得卡片上的两数之和是 5 的概率是 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

故答案为： $\frac{1}{3}$.

8. 方程 $(x-1)\sqrt{x-3}=0$ 的解是_____.

【答案】 $x=3/3$

【分析】本题考查解无理方程，由方程得到 $x-1=0$ 或 $\sqrt{x-3}=0$ ，进而求解即可.

【详解】解： $\because (x-1)\sqrt{x-3}=0$,

$\therefore x-1=0$ 或 $\sqrt{x-3}=0$,

解得 $x_1=1$, $x_2=3$,

$\because$ 当 $x=1$ 时, $x-3<0$, $\sqrt{x-3}$ 无意义,

$\therefore$ 该方程的解为 $x=3$.

故答案为： $x=3$.

9. 直线 $y=\sqrt{2}x-3$ 的截距是_____.

【答案】 -3

【分析】结合一次函数 $y=kx+b$ ，则 b 就是直线在 y 轴上的截距，据此进行作答即可；本题考查一次函数

图象上点的坐标特征，熟记截距的定义是解题的关键.

【详解】解：由截距定义得：直线 $y = \sqrt{2}x - 3$ 的截距是 -3 .

故答案为： -3

10. 分式方程 $\frac{x^2-4}{x-2} = 1$ 的解为_____.

【答案】 $x = -1$

【分析】此题考查了解分式方程. 分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解： $\frac{x^2-4}{x-2} = 1$,

去分母，方程的两边同时乘以 $x-2$ 得： $x^2 - 4 = x - 2$

移项合并同类项得， $x^2 - x - 2 = 0$,

$$\therefore (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x+1=0 \text{ 或 } x-2=0$$

解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

检验：将 $x_1 = -1$ 代入 $x-2 \neq 0$ ；将 $x_2 = 2$ 代入 $x-2 = 0$ ，应舍去；

$\therefore x = -1$ 是原分式方程的解.

故答案为： $x = -1$.

11. 一次函数的图像经过点 $(0, 2)$ ，且与直线 $y = 2x - 5$ 平行，则这个一次函数的解析式是_____.

【答案】 $y = 2x + 2$

【分析】本题考查待定系数法求解析式，根据一次函数的图像与直线 $y = 2x - 5$ 平行，可设该一次函数为 $y = 2x + b$ ，再将点 $(0, 2)$ 代入，即可解答.

【详解】解： $\because$ 一次函数的图像与直线 $y = 2x - 5$ 平行，

$\therefore$ 设该一次函数为 $y = 2x + b$,

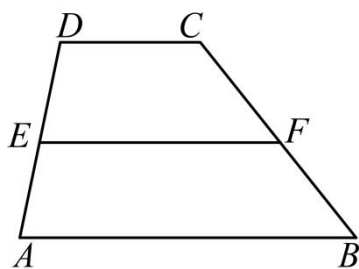
$\because$ 该函数的图像经过点 $(0, 2)$,

$$\therefore b = 2,$$

$\therefore$ 这个一次函数的解析式为 $y = 2x + 2$.

故答案为： $y = 2x + 2$

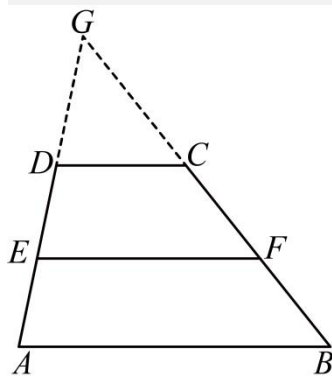
12. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle D = 2\angle B$ ， $AD = 4$ ， $DC = 3$ ，则中位线 $EF =$ _____.



【答案】5

【分析】本题考查了梯形中位线定理、等角对等边，熟练掌握梯形中位线定理是解题的关键. 延长 AD 与 BC 交于点 G ，设 $\angle B = \alpha$ ，则 $\angle ADC = 2\alpha$ ，利用平行线的性质得到 $\angle GCD = \angle B = \alpha$ ，得到 $\angle G = \angle ADC - \angle GCD = \alpha$ ，得出 $DG = DC = 3$ ，则有 $AG = AD + DG = 7$ ，再由 $\angle B = \angle G = \alpha$ 得到 $AB = AG = 7$ ，最后利用梯形中位线定理即可求解.

【详解】解：如图，延长 AD 与 BC 交于点 G ，



$$\because \angle ADC = 2\angle B,$$

$$\therefore \text{设 } \angle B = \alpha, \text{ 则 } \angle ADC = 2\alpha,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle GCD = \angle B = \alpha,$$

$$\therefore \angle G = \angle ADC - \angle GCD = 2\alpha - \alpha = \alpha,$$

$$\therefore \angle G = \angle GCD,$$

$$\therefore DG = DC = 3,$$

$$\therefore AG = AD + DG = 4 + 3 = 7,$$

$$\because \angle B = \angle G = \alpha,$$

$$\therefore AB = AG = 7,$$

$\because EF$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{DC + AB}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5.$$

故答案为：5.

13. 已知直线 $y = kx + 3$ 经过点 $(1, 0)$, 那么该直线与坐标轴围成的三角形的面积为_____

【答案】 $\frac{3}{2}$

【分析】 本题考查了一次函数与坐标轴的交点问题, 求出当 $x = 0$ 时, $y = 3$, 再结合三角形面积公式计算即可得解, 熟练掌握一次函数的性质是解此题的关键.

【详解】 解: 在直线 $y = kx + 3$ 中, 当 $x = 0$ 时, $y = 3$,

$\therefore$ 直线 $y = kx + 3$ 经过点 $(1, 0)$,

$\therefore$ 该直线与坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$,

故答案为: $\frac{3}{2}$.

14. 已知方程 $\frac{x-1}{2x+2} - \frac{x+1}{3-3x} = 1$, 如果设 $\frac{x-1}{x+1} = y$, 那么原方程可以化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $3y^2 - 6y + 2 = 0$

【分析】 本题考查换元法解分式方程, 根据题意, 先化成关于 y 的分式方程, 再去分母转化为关于 y 的整式方程即可.

【详解】 解: $\frac{x-1}{2x+2} - \frac{x+1}{3-3x} = 1$,

$\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+1}{1-x} = 1$,

$\therefore \frac{x-1}{x+1} = y$,

$\therefore$ 原方程化为: $\frac{1}{2}y + \frac{1}{3y} = 1$,

去分母, 得: $3y^2 + 2 = 6y$, 整理, 得: $3y^2 - 6y + 2 = 0$;

故答案为: $3y^2 - 6y + 2 = 0$.

15. 已知点 A 是直线 $y = -2x + 1$ 在第一象限内的一点, 且它到两坐标轴的距离相等, 那么点 A 的坐标是_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

【分析】 本题考查直线上的点的坐标特点, 点到坐标轴的距离, 解一元一次方程. 根据点 A 是直线 $y = -2x + 1$ 在第一象限内的一点, 设 $A(a, -2a + 1)$, 其中 $a > 0$, $-2a + 1 > 0$, 根据点 A 到两坐标轴的距离相等列出方程, 求解即可.

【详解】 解: $\because$ 点 A 是直线 $y = -2x + 1$ 在第一象限内的一点,

$\therefore$ 设 $A(a, -2a+1)$, 其中 $a > 0$, $-2a+1 > 0$,

$\therefore$ 点 A 到两坐标轴的距离相等,

$$\therefore |-2a+1| = |a|,$$

$$\therefore -2a+1 = a,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{3},$$

$$\therefore A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

故答案为: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

16. 我们把一条直线上满足纵坐标是横坐标一半的点称为“横倍点”, 那么直线 $y = x + 2$ 上的“横倍点”坐标是_____.

【答案】 $(-4, -2)$

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 根据“横倍点”的定义, 得纵坐标是横坐标一半的点, 即 $y = \frac{1}{2}x$, 解方程组即可求得坐标, 理解“横倍点”的定义是解题的关键.

【详解】 解: 设“横倍点”的横坐标是 x , 则纵坐标是 $\frac{1}{2}x$, 即 $y = \frac{1}{2}x$, 代入 $y = x + 2$,
得: $\frac{1}{2}x = x + 2$,

$$\text{解得: } x = -4,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x = -2,$$

$\therefore$ 直线 $y = x + 2$ 上的“横倍点”的坐标是 $(-4, -2)$,

故答案为: $(-4, -2)$.

17. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$ ($AD < BC$), $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $CD = 3$, 过点 D 作 $DE \parallel AB$ 交边 BC 于点 E , 过点 A 作 $AF \perp DE$ 交边 BC 于点 F , 交射线 DE 于点 P . 连接 DF , 当 $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{5} S_{\text{梯形}ABCD}$ 时, 求边 AD 的长为_____.

【答案】 $\frac{17\sqrt{3}}{7}$ 或 $\frac{23\sqrt{3}}{3}$

【分析】 本题属于四边形综合题, 含 30° 度的直角三角形的相关计算, 勾股定理, 平行四边形的判定和性质, 三角形的面积等知识, 解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题, 学会利用参数构建方程解决问题. 分

两种情形：当点 P 在梯形内部时，当点 P 在梯形外部时，分别画出图形，构建方程求解即可。

【详解】解： $\because AD \parallel BC$ ， $DE \parallel AB$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形，

$\therefore AD = BE$ ， $ED = AB$ ，

$\because DE \parallel AB$ ，

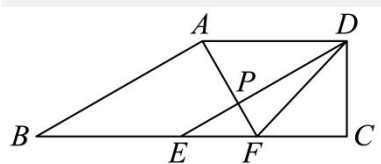
$\therefore \angle DEC = \angle B = 30^\circ$ ，

$\because CD = 3$ ，

$\therefore DE = 2CD = 6$ ，

$\therefore CE = \sqrt{ED^2 - CD^2} = 3\sqrt{3}$ ，

如图，当点 P 在梯形内部时，设 $AD = m$ 。



则 $AD = BE = m$ ，

$\because AF \perp DE$ ，

$\therefore \angle EPF = 90^\circ$ ，

$\because DE \parallel AB$ ，

$\therefore \angle BAF = \angle EPF = 90^\circ$ ，

$\because \angle B = 30^\circ$ ， $AB = DE = 6$ ，

$\therefore BF = 2AF$ ，

$\therefore BF^2 - AF^2 = AB^2$ ，

即 $BF^2 - \left(\frac{1}{2}BF\right)^2 = 6^2$ ，

解得： $BF = 4\sqrt{3}$ ， 负值舍去，

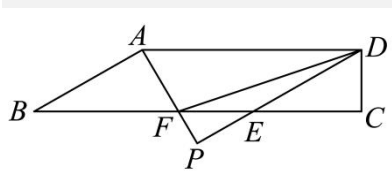
$\therefore BC = BE + CE = m + 3\sqrt{3}$ ， $EF = BF - BE = 4\sqrt{3} - m$ ，

$\because S_{\triangle DEF} = \frac{1}{5}S_{\text{梯形}ABCD}$ ， 即 $\frac{1}{2}EF \cdot CD = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CD$ ，

$\therefore \frac{1}{2}(4\sqrt{3} - m) \times 3 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}(m + m + 3\sqrt{3}) \times 3$ ，

解得： $m = \frac{17\sqrt{3}}{7}$ ；

当点 P 在梯形外部时，设 $AD = m$.



则 $BE = AD = m$,

$\because AF \perp DE$,

$\therefore \angle EPF = 90^\circ$,

$\because DE \parallel AB$,

$\therefore \angle BAF = \angle EPF = 90^\circ$,

$\because \angle B = 30^\circ$, $AB = DE = 6$,

$\therefore BF = 2AF$,

$\therefore BF^2 - AF^2 = AB^2$,

即 $BF^2 - \left(\frac{1}{2}BF\right)^2 = 6^2$,

解得: $BF = 4\sqrt{3}$, 负值舍去,

$\therefore BC = BE + CE = m + 3\sqrt{3}$, $EF = BE - BF = m - 4\sqrt{3}$,

$\because S_{\triangle DEF} = \frac{1}{5} S_{\text{梯形}ABCD}$, 即 $\frac{1}{2} EF \cdot CD = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot CD$,

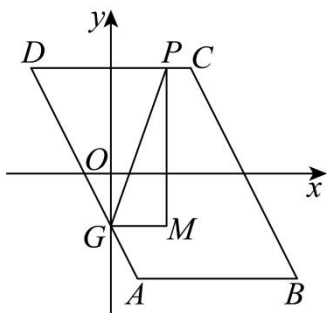
$\therefore \frac{1}{2} (m - 4\sqrt{3}) \times 3 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} (m + m + 3\sqrt{3}) \times 3$

解得: $m = \frac{23\sqrt{3}}{3}$;

综上所述, 满足条件的 AD 长为 $\frac{17\sqrt{3}}{7}$ 或 $\frac{23\sqrt{3}}{3}$.

故答案为: $\frac{17\sqrt{3}}{7}$ 或 $\frac{23\sqrt{3}}{3}$.

18. 如图, $\square ABCD$ 中, $AB \parallel x$ 轴, $AB = 12$. 点 A 的坐标为 $(2, -8)$, 点 D 的坐标为 $(-6, 8)$, 点 B 在第四象限, 点 G 是 AD 与 y 轴的交点, 点 P 是 CD 边上不与点 C , D 重合的一个动点, 过点 P 作 y 轴的平行线 PM , 过点 G 作 x 轴的平行线 GM , 它们相交于点 M , 将 $\triangle PGM$ 沿直线 PG 翻折, 当点 M 的对应点落在坐标轴上时, 点 P 的坐标为____.



【答案】 $\left(\frac{12\sqrt{5}}{5}, 8\right)$ 或 $\left(-\frac{12}{5}\sqrt{5}, 8\right)$

【分析】先求出直线 AD 的解析式为 $y = -2x - 4$ ，则可求 $G(0, -4)$ ，设 $P(m, 8)$ ，则 $M(m, -4)$ ，可求 $PM = 12$ ， $PN = 8$ ，分两种情况讨论：当 M' 在 x 轴负半轴时，由折叠可知 $PM' = 12$ ，在 $Rt \triangle M'NP$ 中，由勾股定理可求 $M'N = 4\sqrt{5}$ ，在 $Rt \triangle M'OG$ 中， $M'G = x$ ， $OG = 4$ ，可求 $M'O = \sqrt{x^2 - 16}$ ，所以 $\sqrt{x^2 - 16} + x = 4\sqrt{5}$ ，解得 $x = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ ，则 $\left(\frac{12\sqrt{5}}{5}, 8\right)$ ；当 M' 在 x 轴正半轴时，同理可得， $-x + \sqrt{x^2 - 16} = 4\sqrt{5}$ ，解得 $x = -\frac{12}{5}\sqrt{5}$ ，求得 $\left(-\frac{12}{5}\sqrt{5}, 8\right)$ 。

【详解】解：设直线 AD 解析式为 $y = kx + b$ ， PM 与 x 轴交于 N ，

将 $A(2, -8)$ ， $D(-6, 8)$ 代入 $y = kx + b$ 可得，
$$\begin{cases} 2k + b = -8 \\ -6k + b = 8 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} k = -2 \\ b = -4 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AD 解析式为 $y = -2x - 4$ ，

在 $y = -2x - 4$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = -4$ ，

$\therefore G(0, -4)$ ，

$\because$ 点 P 是 CD 边上， $CD \parallel x$ 轴，

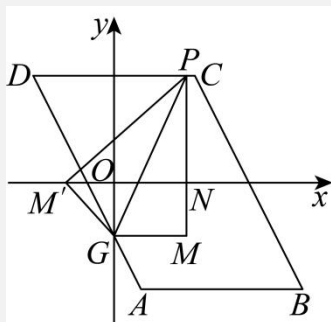
$\therefore$ 可设 $P(m, 8)$ ，

$\because GM \parallel y$ 轴，

$\therefore M(m, -4)$ ，

$\therefore PM = 12$ ， $PN = 8$ ，

当 M' 在 x 轴负半轴时，如图，



由折叠可知 $GM = GM'$ ， $PM = PM' = 12$ ，

在 $\text{Rt}\triangle M'NP$ 中，由勾股定理 $M'N = \sqrt{M'P^2 - PN^2} = 4\sqrt{5}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle M'OG$ 中，设 $M'G = x$ ， $OG = 4$ ，

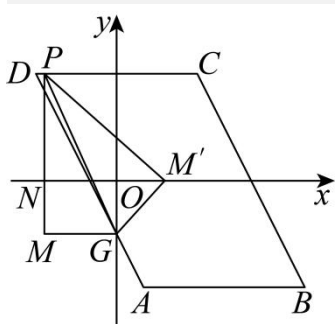
$$\therefore M'O = \sqrt{x^2 - 16},$$

$$\therefore \sqrt{x^2 - 16} + x = 4\sqrt{5},$$

$$\text{解得 } x = \frac{12\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore P\left(\frac{12\sqrt{5}}{5}, 8\right);$$

当 M' 在 x 轴正半轴时，如图，



同理可得， $-x + \sqrt{x^2 - 16} = 4\sqrt{5}$ ，

$$\text{解得 } x = -\frac{12}{5}\sqrt{5},$$

$$\therefore P\left(-\frac{12}{5}\sqrt{5}, 8\right), 8);$$

综上所述： P 点坐标为 $\left(\frac{12\sqrt{5}}{5}, 8\right)$ 或 $\left(-\frac{12}{5}\sqrt{5}, 8\right)$ ，

故答案为： $\left(\frac{12\sqrt{5}}{5}, 8\right)$ 或 $\left(-\frac{12}{5}\sqrt{5}, 8\right)$ 。

【点睛】 本题主要考查了平行四边形的性质，折叠的性质，勾股定理，一次函数与几何综合， 解题的关键

在于求出点 G 的坐标, 进而分点 M' 在 x 正半轴和负半轴两种情况讨论求解.

三.解答题 (本大题共 8 小题, 58 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

【分析】 本题考查了解二元二次方程组, 正确的计算是解题的关键.

将方程组因式分解后, 由②得 $x + y = \pm 3$, 分别代入①, 解关于 x, y 的二元一次方程组, 即可求解.

【详解】 解:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$$

方程组可变形为
$$\begin{cases} (x+y)(x-y) = 12 \text{ ①} \\ (x+y)^2 = 9 \text{ ②} \end{cases}$$

由②, 得 $x + y = \pm 3$,

把 $x + y = 3$ 代入①, 得 $3(x - y) = 12$, 即 $x - y = 4$,

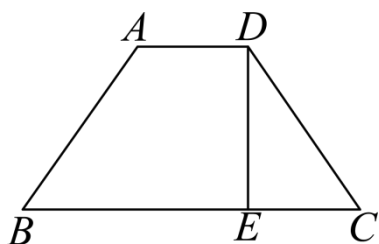
解方程组
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

把 $x + y = -3$ 代入①, 得 $-3(x - y) = 12$, 即 $x - y = -4$,

解方程组
$$\begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = -4 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\therefore \text{方程组的解为 } \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

20. 已知: 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $DE \perp BC$, 垂足为 E , $BE = \frac{1}{2}(AD + BC)$. 求证: $AB = CD$.

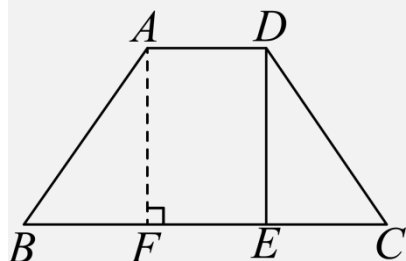


【答案】见解析

【分析】本题主要考查了平行四边形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，证明 $\triangle ABF \cong \triangle DCE$ 是解题的关键.

过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ，四边形 $ADEF$ 是平行四边形，可得 $AD = EF$ ，再由 $BE = \frac{1}{2}(AD + BC)$ ，可得 $BF = CE$ ，可证明 $\triangle ABF \cong \triangle DCE$ ，即可求证.

【详解】证明：如图，过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ，



$\because DE \perp BC$ ， $AD \parallel BC$ ，

$\therefore DE = AF$ ， $DE \parallel AF$ ， $\angle AFB = \angle DEC = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形，

$\therefore AD = EF$ ，

$\because BE = \frac{1}{2}(AD + BC)$ ，

$\therefore 2BE = AD + BE + CE$ ，即 $BE = AD + CE$ ，

$\therefore BF + EF = AD + CE$ ，

$\therefore BF = CE$ ，

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DCE$ ，

$\therefore AB = CD$ 。

21. 今年新型“和谐号”高速列车正式投入沪宁线运行，已知上海到南京全程约为 300 公里，如果新型“和谐号”高速列车行驶的平均速度比原来“和谐号”动车行驶的平均速度每分钟快 2 公里，那么从上海到南京比原来“和谐号”动车少用 40 分钟，问新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要多少分钟？

【答案】60 分钟

【分析】 本题主要考查了分式方程的实际应用，设新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 x 分钟，根据已知上海到南京全程约 300 公里，如果新型“和谐号”高速列车行驶的平均速度比原来的“和谐号”动车行驶的平均速度每分钟快 2 公里，那么从上海到南京比原来“和谐号”动车少用 40 分钟，可列方程求解.

【详解】解：设新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 x 分钟，则原来“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 $(x+40)$ 分钟，

由题意得，
$$\frac{300}{x} - \frac{300}{x+40} = 2,$$

解得 $x=60$ 或 $x=-100$ (舍去)，

经检验， $x=60$ 是原方程的解，且符合题意，

答：新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要 60 分钟.

22. 木盒里有红球和白球，共 4 个，每个球除了颜色外其他都相同. 从盒子里先摸出一个球，放回去摇匀后，再摸出一个球，继续放回去摇匀后，再摸第 3 次、第 4 次...

(1)甲同学摸球 10 次，都没有摸到红球，于是他就判断“摸到红球”是“不可能事件”. 他的判断正确吗？

(2)如果盒子里有 3 个红球、1 个白球，乙同学按照摸球的规则，摸球 2 次，那么摸到一个红球和 1 个白球的概率是多少？（用列表展现所有等可能的结果）

【答案】(1)他的判断不正确

(2) $\frac{3}{8}$

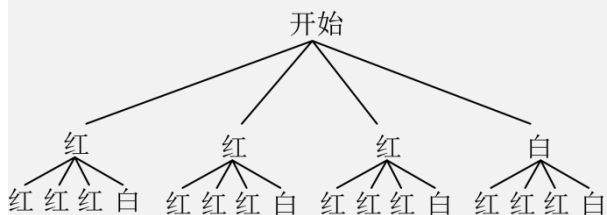
【分析】 本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式求事件 A 或 B 的概率.

(1) 根据概率的可能性进行判断即可；

(2) 根据题意画出树状图得出所有等可能的情况数，找出摸到一个红球和 1 个白球的情况数，然后根据概率公式即可得出答案.

【详解】(1) 他的判断不正确，因为此事件是随机事件，不能因为事件发生的可能性小就认为它是不可能事件；

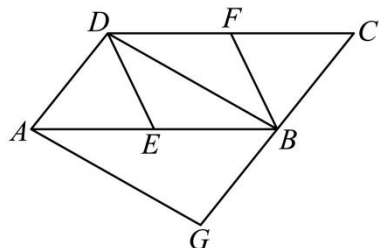
(2) 根据题意画树状图如下：



共有 16 种等可能的结果，其中摸到一个红球和一个白球的有 6 种结果，

所以摸到一个红球和一个白球的概率是 $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

23. 已知：如图，在 $\square ABCD$ 中， E 、 F 分别为边 AB 、 CD 的中点， BD 是对角线， $AG \perp DB$ 交 CB 的延长线于 G .



(1) 求证： $DE = BF$ ；

(2) 若四边形 $BEDF$ 是菱形，则四边形 $AGBD$ 是什么特殊四边形？并证明你的结论.

【答案】 (1) 见解析

(2) 矩形，理由见解析

【分析】 此题考查了平行四边形的性质和判定，菱形的性质，矩形的判定，解题的关键是掌握以上知识点.

(1) 根据平行四边形的性质得到 $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ，然后证明出四边形 $DEBF$ 是平行四边形，即可得到 $DE = BF$ ；

(2) 首先证明出四边形 $AGBD$ 是平行四边形，如图所示，连接 DG ，由菱形得到 $DE = BE$ ，然后证明出 $AB = DG$ ，即可得到平行四边形 $AGBD$ 是矩形.

【详解】 (1) $\because$ 在 $\square ABCD$ 中，

$\therefore AB \parallel CD$ ， $AB = CD$

$\because E$ 、 F 分别为边 AB 、 CD 的中点

$\therefore BE = \frac{1}{2} AB$ ， $DF = \frac{1}{2} CD$

$\therefore BE = DF$

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形

$\therefore DE = BF$ ；

(2) 矩形，理由如下：

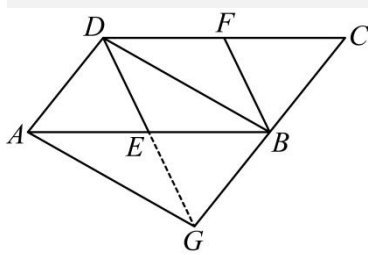
$\because$ 在 $\square ABCD$ 中，

$\therefore AD \parallel BC$

$\because AG \perp DB$ ，

$\therefore$ 四边形 $AGBD$ 是平行四边形

如图所示，连接 DG



$\because E$ 为边 AB 的中点

$\therefore$ 点 E 在 DG 上

$\because$ 四边形 $BEDF$ 是菱形

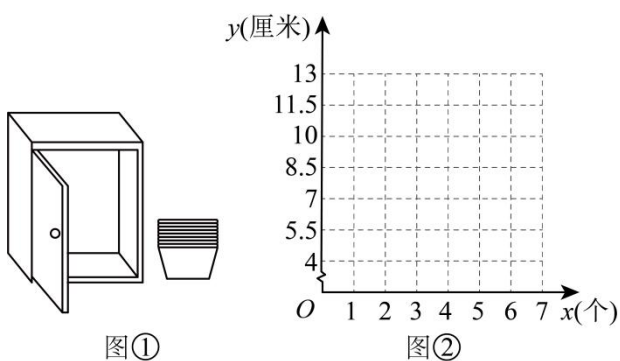
$\therefore DE = BE$

$\because AE = BE, DE = EG$

$\therefore AB = DG$

$\therefore$ 平行四边形 $AGBD$ 是矩形.

24. 小丽在帮妈妈整理厨房时，想把一些规格相同的碗尽可能多地放入内侧高为 35cm 的柜子里。她把碗按如图那样整齐地叠放成一摞（如图①），但她不知道一摞最多叠放几个碗可以一次性放进柜子里。



【探究发现】小丽测量后发现，按这样叠放，这摞碗的总高度随着碗个数的变化而变化，记录的数据如下表：

碗的个数 x (个)	1	2	3	4	5
这摞碗的总高度 y (厘米)	5.5	7	8.5	10	11.5

【建立模型】

(1) 建立平面直角坐标系，如图②，横轴表示碗的个数 x ，纵轴表示这摞碗的总高度 y ，请根据表中信息描出对应点；

(2) 观察上述各点的分布规律，判断它们是否在同一条直线上，如果在同一条直线上，求出这条直线所对

应的函数表达式，如果不在同一条直线上，说明理由；

【结论应用】应用上述发现的规律计算：

(3) 当碗的个数量为 12 个时，求这摞碗的总高度.

(4) 请帮小丽算一算，一摞最多能叠几个碗可以一次性放进柜子里？

【答案】(1) 见解析；(2) 它们在同一条直线上； $y = 1.5x + 4$ ；(3) 22 厘米；(4) 一摞最多能叠 20 个碗可以一次性放进柜子里

【分析】本题主要考查了一次函数的应用，求一次函数解析式，画一次函数图象，解题的关键是熟练掌握待定系数法.

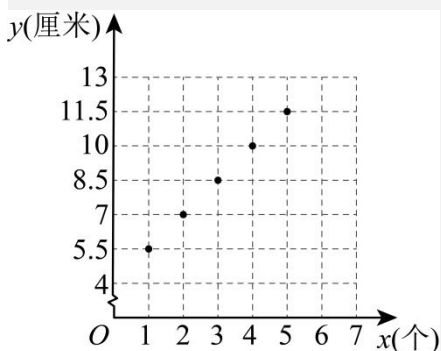
(1) 根据表格中数据描点即可；

(2) 用待定系数法求出函数解析式即可；

(3) 把 $x = 12$ 代入函数解析式，求出 y 的值即可；

(4) 把 $y = 35$ 代入函数解析式，求出 x 的值，得出答案即可.

【详解】解：(1) 描点如图所示：



(2) 这些点在一条直线上.

设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$).

将点 $(1, 5.5)$ 、 $(2, 7)$ 代入，得：

$$\begin{cases} 5.5 = k + b \\ 7 = 2k + b \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} k = 1.5 \\ b = 4 \end{cases}$,

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y = 1.5x + 4$.

(3) 把 $x = 12$ 代入 $y = 1.5x + 4$ 得： $y = 1.5 \times 12 + 4 = 22$,

$\therefore$ 当碗的个数为 12 个时，这摞碗的总高度为 22 厘米.

(4) 把 $y = 35$ 代入 $y = 1.5x + 4$ 得： $35 = 1.5x + 4$,

解得: $x = \frac{62}{3}$,

∴一摞最多能叠 20 个碗可以一次性放进柜子里.

25. 已知一次函数 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B .

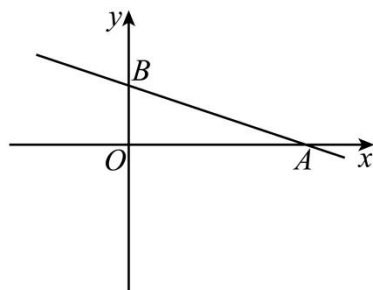


图1

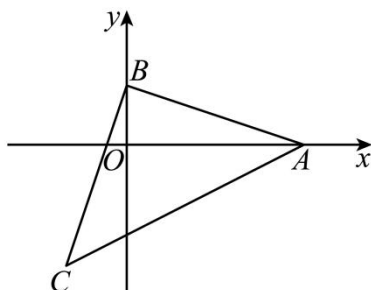


图2

(1)求 $\triangle AOB$ 的面积及点 O 到直线 AB 的距离;

(2)若第三象限存在一点 C , 如图 2 所示, 使得 $BC = BA$, 且 $\angle ABC = 90^\circ$, 求点 C 的坐标;

(3)在 (2) 的条件下, 双曲线 $y = \frac{16}{x}$ 图像上有一点 M , 满足 $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC}$, 直接写出所有满足条件的点 M 坐标.

【答案】(1)6, $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

(2) $C(-2, -4)$

(3) $M(-8, -2)$ 或 $M(-6, -\frac{8}{3})$ 或 $M(2, 8)$ 或 $M(24, \frac{2}{3})$

【分析】 本题考查一次函数与几何的综合应用, 反比例函数与几何的综合应用, 熟练掌握相关知识点, 利用数形结合的思想进行求解, 是解题的关键:

(1) 分别令 $x = 0, y = 0$, 求出 A, B 的坐标, 三角形的面积公式求出 $\triangle AOB$ 的面积, 等积法求出点 O 到直线 AB 的距离即可;

(2) 过点 B 作 x 轴的平行线 DE , 作 $CD \perp DE, AE \perp DE$, 证明 $\triangle CDB \cong \triangle BEA$, 进行求解即可;

(3) 根据 $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC}$, 过点 C 作 AB 的平行线, 等距平移, 在 AB 的上方作 AB 的平行线, 两条平行线与双曲线的交点即为点 M .

【详解】(1) 解: $\because y = -\frac{1}{3}x + 2$,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = 2$, 当 $y = 0$ 时, $-\frac{1}{3}x + 2 = 0$, 解得: $x = 6$,

$\therefore A(6, 0), B(0, 2)$,

$\therefore OA = 6, OB = 2$,

$$\therefore AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6,$$

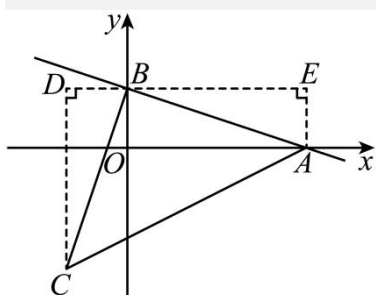
设点 O 到直线 AB 的距离为 h ,

$$\text{则: } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot h = 6,$$

$$\therefore h = \frac{3\sqrt{10}}{5};$$

$$\therefore \text{点 } O \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

(2) 过点 B 作 x 轴的平行线 DE , 作 $CD \perp DE, AE \perp DE$,



则: $AE = OB = 2, BE = OA = 6, \angle D = \angle E = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DCB = \angle ABE = 90^\circ - \angle CBD,$$

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore \triangle CDB \cong \triangle BEA,$$

$$\therefore CD = BE = 6, BD = AE = 2,$$

$$\therefore C(-2, 2-6), \text{ 即: } C(-2, -4);$$

(3) ①过点 C 作 AB 的平行线, 设解析式为 $y = -\frac{1}{3}x + b$,

把 $C(-2, -4)$ 代入, 得: $-4 = \frac{2}{3} + b$,

$$\therefore b = -\frac{14}{3},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x - \frac{14}{3},$$

$$\therefore \text{当点 } M \text{ 在直线 } y = -\frac{1}{3}x - \frac{14}{3} \text{ 上时, } S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC},$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - \frac{14}{3} \\ y = \frac{16}{x} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x = -8 \\ y = -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -6 \\ y = -\frac{8}{3} \end{cases},$$

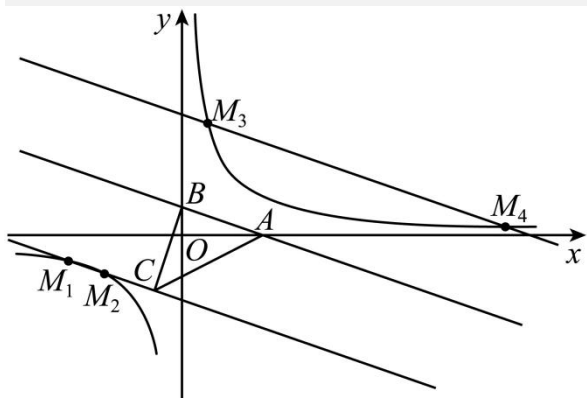
$$\therefore M(-8, -2) \text{ 或 } M\left(-6, -\frac{8}{3}\right);$$

②将直线 AB 向上平移 $2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}$ 个单位, 得到直线 $y = -\frac{1}{3}x + 2 + \frac{20}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3}$,

则: 当点 M 在直线 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3}$ 上时, $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC}$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3} \\ y = \frac{16}{x} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 24 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases},$$

$$\therefore M(2, 8) \text{ 或 } M\left(24, \frac{2}{3}\right);$$



综上: $M(-8, -2)$ 或 $M\left(-6, -\frac{8}{3}\right)$ 或 $M(2, 8)$ 或 $M\left(24, \frac{2}{3}\right)$.

26. 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = \angle C$, 点 P 在边 AB 上.

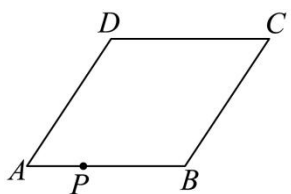


图1

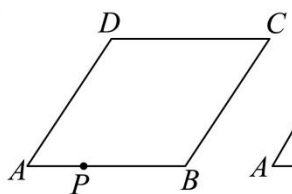


图2

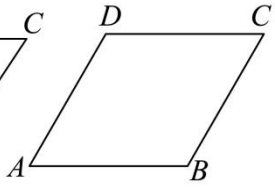


图3

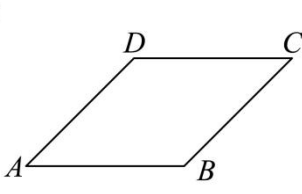


图4

(1)判断四边形 $ABCD$ 的形状并加以证明;

(2)以过点 P 的直线为轴, 将四边形 $ABCD$ 折叠, 使点 B, C 分别落在点 B', C' 上, 且 $B'C'$ 经过点 D , 折痕与四边形的另一交点为 Q ;

①在图 2 中作出四边形 $PB'C'Q$ (保留作图痕迹, 不必说明作法和理由)

(提示: 为使折叠后 $B'C'$ 经过点 D , 可以先考虑 BC 边上与点 D 对应的点 D');

②如图 3, 如果 $AB = AD, \angle C = 60^\circ$, 且 $B'P \perp AB$, 试求 $\frac{AP}{BP}$ 的值:

③如图 4, 如果 $AB = AD, \angle C = 45^\circ$, 且 $B'P \perp AB$, 请直接写出 $\frac{AP}{BP}$ 的值.

【答案】(1) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形; 证明见解析

(2) ①见解析; ② $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; ③ 1

【分析】(1) 根据两组对边分别平行的四边形是平行四边形进行判断;

(2) ①过点 P 作 AB 的垂线, 交 AD 于点 E , 截取 $PB' = PB$, 在 BC 上截取 $BD' = B'D$, 交 BC 于点 D' , 再以 B, B' 为圆心, 适当长度为半径画弧交于一点, 连接点 P 与该点作射线交 CD 于点 Q , 过点 Q 作 CD 的垂线, 作射线 $B'D$, 交 CD 的垂线于点 C' , 连接 $C'Q$ 即可; ②先根据折叠得出一些对应边相等, 对应角相等, 并推导出 $B'D = B'E$, 再设 $AP = a$, $BP = b$, 利用解直角三角形将 DQ 和 CQ 长用含 a 的代数式表示出来, 最后根据 $CD = DQ + CQ$ 列出关于 a, b 的关系式, 求得 a, b 的比值即可; ③连接 AB' , 易得平行四边形 $ABCD$ 是菱形, 推出 $\angle ABC = 135^\circ$, 由折叠的性质得到 $\angle PB'C' = 135^\circ, PB' = PB$, 再求出 $\angle AB'P = 45^\circ$, 推出 A, B', D, C' 四点共线, 得到点 B' 在 AD 上, $\triangle APB'$ 是等腰直角三角形, 得到 $AP = PB'$, 进而得到 $AP = PB$, 即可求解.

【详解】(1) 解: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

证明: $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

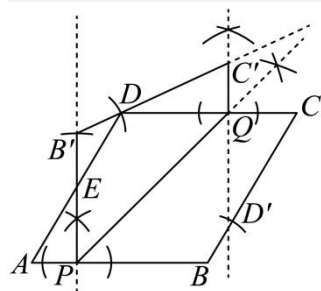
$$\because \angle A = \angle C,$$

$$\therefore \angle C + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

(2) 解: ①作图如下:



②当 $AB = AD$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 是菱形,

由折叠可得, $BP = B'P$, $CQ = C'Q$, $BC = B'C'$, $\angle C = \angle C' = 60^\circ = \angle A$,

当 $B'P \perp AB$ 时, 由 $B'P \parallel C'Q$, 可得 $C'Q \perp CD$,

$$\therefore \angle PEA = 30^\circ = \angle DEB', \quad \angle QDC' = 30^\circ,$$

$$\because \angle ADC = 180^\circ - \angle A = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle B'DE = 180^\circ - \angle ADC - \angle QDC' = 30^\circ,$$

$$\therefore B'D = B'E,$$

设 $AP = a$, $BP = b$, 则直角三角形 APE 中, $PE = \sqrt{3}a$, 且 $B'P = b$, $BC = B'C' = CD = a + b$,

$$\therefore B'E = b - \sqrt{3}a = B'D,$$

$$\therefore C'D = a + b - (b - \sqrt{3}a) = a + \sqrt{3}a,$$

$$\therefore \text{直角三角形 } C'QD \text{ 中, } C'Q = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}a = CQ,$$

$$\therefore DQ = \sqrt{3}C'Q = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}a,$$

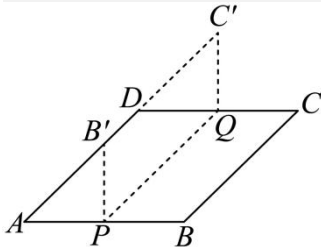
$$\therefore CD = DQ + CQ = a + b,$$

$$\therefore \frac{3 + \sqrt{3}}{2}a + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}a = a + b,$$

$$\text{整理得 } (\sqrt{3} + 1)a = b,$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad \text{即 } \frac{AP}{PB} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2};$$

③连接 AB' ,



当 $AB = AD$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 135^\circ, \quad \angle A = 45^\circ,$$

由折叠的性质得到 $\angle PB'C' = 135^\circ$, $PB' = PB$,

$$\therefore B'P \perp AB,$$

$$\therefore \angle APB' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AB'P = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AB'P + \angle PB'C' = 180^\circ,$$

$\therefore A, B', D, C'$ 四点共线,

$\therefore$ 点 B' 在 AD 上,

$\therefore \triangle APB'$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AP = PB'$,

$\therefore AP = PB$,

$\therefore \frac{AP}{BP} = 1$.

【点睛】 本题主要考查了平行四边形以及菱形，解题的关键是掌握平行四边形的判定以及菱形的判定与性质．在解题时注意，菱形的四条边都相等，此外在折叠问题中，需要抓住对应边相等，对应角相等这些等量关系，折叠问题的实质是轴对称的性质．