

2024-2025 学年八年级数学下学期期末模拟卷 02

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 本试卷共 26 题, 选择 6 题, 填空 12 题, 解答 8 题
2. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
4. 回答客观题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
5. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 直线 $y=kx+b$ 经过一、二、四象限, 则 k 和 b 应满足的条件是 ()

A. $k>0, b>0$ B. $k>0, b<0$ C. $k<0, b>0$ D. $k<0, b<0$

【答案】C

【分析】本题考查了一次函数图象与系数的关系: 对于一次函数 $y=kx+b$ (k 为常数, $k \neq 0$), 当 $k>0, b>0$, $y=kx+b$ 的图象在一、二、三象限; 当 $k>0, b<0$, $y=kx+b$ 的图象在一、三、四象限; 当 $k<0, b>0$, $y=kx+b$ 的图象在一、二、四象限; 当 $k<0, b<0$, $y=kx+b$ 的图象在二、三、四象限。

【详解】解: $\because$ 直线 $y=kx+b$ 经过一、二、四象限,
 $\therefore k<0, b>0$,

故选: C.

2. 下列事件中是必然事件的是 ()

A. 方程 $x^2+a=0$ 在实数范围内有解
B. 在十进制中 $1+1>2$
C. 两个非零实数的积为负
D. 平面直角坐标系中, 直线 $y=3x-1$ 不经过第二象限

【答案】D

【分析】根据一元二次方程根的判别式, 二进制, 有理数的乘法, 直线的性质判断即可得出答案.

【详解】解：A、针对于方程 $x^2+a=0$ ， $\Delta=0-4a=-4a$ ，当 $a\leq 0$ 时，方程有两个实数根，当 $a>0$ 时，方程没有实数根，故此选项不符合题意；

B、在十进制中 $1+1=10$ 和十进制中的 2 不能比较大小，故此选项不符合题意；

C、两个非零数相乘，同号得正，异号得负，故此选项不符合题意；

D、针对于直线 $y=3x-1$ ， $k=3>0$ ， $b=-1<0$ ， $\therefore$ 直线 $y=3x-1$ 经过第一、三、四象限，不经过二象限，故此选项符合题意；

故选：D.

【点睛】此题主要考查了一元二次方程根的判别式，二进制，有理数的乘法，一次函数的性质.

3. 下列命题中是真命题的是 ()

A. 对角线相等的矩形是正方形

B. 对角线互相垂直的四边形是菱形

C. 对角线互相垂直的平行四边形是矩形 D. 对角线互相平分且相等的四边形是矩形

【答案】D

【分析】本题考查了判断命题真假，平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理，熟练掌握平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理是解此题的关键.

根据平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定定理判断即可得出答案.

【详解】解：A、对角线垂直的矩形是正方形，故原说法错误，不符合题意；

B、对角线互相垂直的平行四边形是菱形，故原说法错误，不符合题意；

C、对角线相等的平行四边形是矩形，故原说法错误，不符合题意；

D、对角线互相平分且相等的四边形是矩形，正确，符合题意.

故选：D.

4. 用换元法解方程 $\frac{3x}{x-1} + \frac{2x-2}{x} + 3 = 0$ 时，若设 $\frac{x}{x-1} = y$ ，则原方程可以化为 ()

A. $3y^2 + 2y + 3 = 0$ B. $3y^2 + 3y + 2 = 0$ C. $2y^2 + 3y + 3 = 0$ D. $2y^2 + 2y + 3 = 0$

【答案】B

【分析】本题考查了解分式方程，解题的关键是熟练掌握利用换元法，把一个式子做为整体进行替换，将分式方程化简为一元二次方程.

把 $\frac{x}{x-1} = y$ 代入原方程，得出 $3y + \frac{2}{y} + 3 = 0$ ，再进行整理即可.

【详解】解：整理 $\frac{3x}{x-1} + \frac{2x-2}{x} + 3 = 0$ ，得 $\frac{3x}{x-1} + \frac{2(x-1)}{x} + 3 = 0$ ，

把 $\frac{x}{x-1} = y$ 代入方程得: $3y + \frac{2}{y} + 3 = 0$,

整理得: $3y^2 + 3y + 2 = 0$.

故选 B.

5. 下列说法正确的是 ()

A. $x^2 + \frac{1}{y} = \sqrt{3}$ 是二元二次方程

B. $x^2 = 0$ 是二项方程

C. $\frac{x}{3} - \frac{1}{x} = 1$ 是分式方程

D. $\frac{x^2 - 1}{x} = \sqrt{2}$ 是无理方程

【答案】C

【分析】本题考查二元二次方程, 分式方程, 无理方程等概念, 根据二元二次方程, 分式方程, 无理方程等概念逐项判断即可.

【详解】解: A、 $x^2 + \frac{1}{y} = \sqrt{3}$ 是分式方程, 故本选项说法错误;

B、 $x^2 = 0$ 不是二项方程, 故本选项说法错误;

C、 $\frac{x}{3} - \frac{1}{x} = 1$ 是分式方程, 故本选项说法正确;

D、 $\frac{x^2 - 1}{x} = \sqrt{2}$ 是分式方程, 故本选项说法错误.

故选: C

6. 已知点 $A(a, y_1)$, 点 $B(a+1, y_2)$ 都在直线 $y = -\frac{4}{3}x - 7$ 上, 则 y_1, y_2 的大小关系 ()

A. $y_1 > y_2$

B. $y_1 = y_2$

C. $y_1 < y_2$

D. 无法确定

【答案】A

【分析】本题考查了一次函数的性质, 熟练掌握一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小是解题的关键. 根据 $a < a+1$, 以及直线 $y = -\frac{4}{3}x - 7$ 中 y 随 x 的增大而减小, 即可得到答案.

【详解】解: 对于 $y = -\frac{4}{3}x - 7$ 来说,

$$\because -\frac{4}{3} < 0,$$

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

$\because$ 点 $A(a, y_1)$, 点 $B(a+1, y_2)$ 都在直线 $y = -\frac{4}{3}x - 7$ 上, 且 $a < a+1$,

$$\therefore y_1 > y_2,$$

故选：A.

第二部分（非选择题 共 82 分）

二、填空题（本大题共 12 小题，每小题 2 分，满分 24 分）

7. 方程 $x^5 + 32 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = -2$

【分析】 此题考查了解二项方程，根据 $x^5 = -32$ 及 $(-2)^5 = -32$ 即可得到答案.

【详解】 解： $\because x^5 + 32 = 0$,

$$\therefore x^5 = -32,$$

$$\therefore (-2)^5 = -32,$$

$$\therefore x = -2,$$

故答案为： $x = -2$

8. 桌上有 6 个同样型号的杯子，其中 1 杯白糖水、2 杯盐水、3 杯矿泉水. 从这 6 杯中随机抽取 1 杯，在下列事件中，发生的可能性最大的是_____.（填序号）

①取到盐水；②取到白糖水；③取到矿泉水；④没有取到盐水；⑤没有取到白糖水；⑥没有取到矿泉水

【答案】 ⑤

【分析】 本题主要考查了简单的概率计算，根据概率计算公式分别求出对应的 6 个事件发生的概率，比较即可得到答案.

【详解】 解：取到盐水的概率为 $\frac{2}{1+2+3} = \frac{1}{3}$ ，取到白糖水的概率为 $\frac{1}{1+2+3} = \frac{1}{6}$ ，取到矿泉水的概率为 $\frac{3}{1+2+3} = \frac{1}{2}$ ，没有取到盐水的概率为 $\frac{1+3}{1+2+3} = \frac{2}{3}$ ；没有取到白糖水的概率 $\frac{2+3}{1+2+3} = \frac{5}{6}$ ，没有取到矿泉水 $\frac{1+2}{1+2+3} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 没有取到白糖水的概率最大，即可能性最大，

故答案为： ⑤.

9. 已知方程 $\frac{x}{3x^2-1} + \frac{3x^2-1}{x} = 4$ ，如果设 $\frac{3x^2-1}{x} = y$ ，那么原方程可以变形为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 4y + 1 = 0$

【分析】 本题考查了解可化为一元二次方程的分式方程，掌握换元法是解题关键.

设 $\frac{3x^2-1}{x} = y$ ，则 $\frac{3x^2-1}{x} = \frac{1}{y}$ ，则原方程化为： $y + \frac{1}{y} = 4$ ，再去分母即可.

【详解】解：设 $\frac{3x^2-1}{x} = y$ ，则 $\frac{3x^2-1}{x} = \frac{1}{y}$ ，

$\therefore$ 原方程化为： $y + \frac{1}{y} = 4$ ，

去分母得： $y^2 - 4y + 1 = 0$ ，

故答案为： $y^2 - 4y + 1 = 0$ 。

10. 如果关于 x 的无理方程 $\sqrt{x+1} = 1+m$ 没有实数解，那么 m 的取值范围是_____。

【答案】 $m < -1$

【分析】 本题考查无理方程，解题的关键是明确无理方程的解答方法，无实数根应满足什么条件。

根据 $\sqrt{x+1} \geq 0$ ，则得到 $1+m < 0$ 时，无理方程 $\sqrt{x+1} = 1+m$ 没有实数解，再解不等式即可。

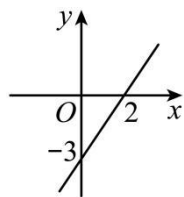
【详解】解： $\because$ 关于 x 的无理方程 $\sqrt{x+1} = 1+m$ 没有实数解，

$\therefore 1+m < 0$ ，

解得： $m < -1$ ，

故答案为： $m < -1$ 。

11. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象如图所示，那么不等式 $kx + b \geq 0$ 的解集是_____。



【答案】 $x \geq 2$

【分析】 本题考查了一次函数与一元一次不等式：从函数的角度看，就是寻求使一次函数 $y = kx + b$ 的值大于（或小于）0 的自变量 x 的取值范围；从函数图象的角度看，就是确定直线 $y = kx + b$ 在 x 轴上（或下）方部分所有的点的横坐标所构成的集合。结合函数图象，写出直线在 x 轴上方所对应的自变量的范围即可。

【详解】解：由图象可知，不等式 $kx + b \geq 0$ 的解集为 $x \geq 2$ ，

故答案为： $x \geq 2$ 。

12. 若直线 $y = (m^2 - 4)x + 3$ 与 $y = (m + 2)x - 5$ 平行，则 $m =$ _____。

【答案】 3 或 -2

【分析】 本题主要考查了一次函数图象的平移问题，根据坐标系中若两一次函数所在的直线平行，那么这个一次函数的一次项系数相同进行求解即可。

【详解】解： $\because$ 直线 $y = (m^2 - 4)x + 3$ 与 $y = (m + 2)x - 5$ 平行，

$$\therefore m^2 - 4 = m + 2,$$

$$\therefore m = 3 \text{ 或 } m = -2,$$

故答案为：3 或 -2.

13. 一个正多边形的内角和是其外角和的 2 倍，则这个正多边形的边数是_____.

【答案】6

【分析】本题主要考查了多边形内角和和外角和综合，设这个正多边形的边数为 n ，则这个多边形的内角和为 $180^\circ \cdot (n-2)$ ，再根据多边形外角和为 360° ，结合题意建立方程求解即可.

【详解】解：设这个正多边形的边数为 n ,

$$\text{由题意得, } 180(n-2) = 360 \times 2,$$

$$\text{解得 } n = 6,$$

$\therefore$ 这个正多边形的边数是 6,

故答案为：6.

14. 已知平行四边形 $ABCD$ 的周长是 22cm, AC 和 BD 交于点 O , $\triangle OAB$ 比 $\triangle OBC$ 的周长小 3, 则 AB 的长为_____ cm.

【答案】4

【分析】本题考查了平行四边形的性质，三角形的周长，熟练掌握知识点是解决本题的关键.

根据平行四边形的性质可得 $AB + BC = 11\text{cm}$, $OA = OC$, 再根据 $\triangle OAB$ 比 $\triangle OBC$ 的周长小 3, 即可求得.

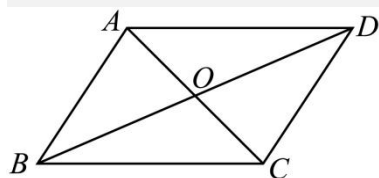
【详解】解： $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长是 22cm,

$$\therefore AB + BC = 11\text{cm}, OA = OC,$$

$\because \triangle OAB$ 比 $\triangle OBC$ 的周长小 3,

$$\therefore (OB + OC + BC) - (OA + OB + AB) = BC - AB = 3\text{cm},$$

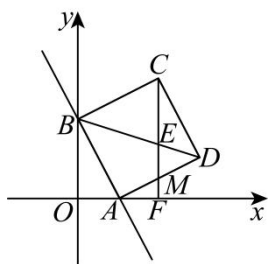
$$\therefore AB = 4\text{cm}, BC = 7\text{cm}.$$



故答案为：4.

15. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 与 x 轴和 y 轴分别交于点 A 和点 B ，以 AB 为边在直

线右侧作正方形 $ABCD$ ，连接 BD ，过点 C 作 $CF \perp x$ 轴，垂足为点 F ，交 BD 于点 E ，连接 AE ，则三角形 AFE 的周长为_____.



【答案】 16

【分析】 本题考查了全等三角形的性质与判定，正方形的性质与判定，求一次函数与坐标轴的交点坐标，解本题的关键在熟练掌握相关的性质与判定定理.

首先通过一次函数解析式，得到点 A 和 B 的坐标，进而即可得出 AO ， BO 的长，再过点过点 B 作 BN 平行于 OF ，交 CF 于 N ，证明 $\triangle CBN \cong \triangle ABO$ ，得出 $BN = BO = 8$ ， $CN = OA = 6$ ，再证明四边形 $OBNF$ 为正方形，得到 $OF = NF = OB = 8$ ，则 $CF = CN + NF = 14$ $AF = OF - OA = 2$ ，再证明 $\triangle CDE \cong \triangle ADE$ ，进而得到 $AE = CE$ ，所以 $AE + EF = CE + EF = CF$ ，即可算出三角形 AFE 的周长.

【详解】 解：在 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 中，当 $y = -\frac{4}{3}x + 8 = 0$ 时， $x = 6$ ，当 $x = 0$ 时， $y = -\frac{4}{3}x + 8 = 8$ ，

$\therefore A(6, 0)$ ， $B(0, 8)$ ，

$\therefore AO = 6$ ， $BO = 8$ ，

过点 B 作 BN 平行于 OF ，交 CF 于 N ，

$\because CF \perp x$ 轴

$\therefore CF \parallel y$ 轴

$\therefore \angle NBO = 180^\circ - \angle BNF = 90^\circ$ ，

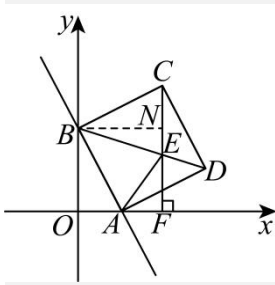
$\therefore \angle ABO + \angle ABN = 90^\circ$ ；

$\because CF \perp OF$ ，

$\therefore BN \perp CF$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，



$$\therefore \angle CBN + \angle ABN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBN = \angle ABO,$$

在 $\triangle CBN$ 和 $\triangle ABO$ 中,

$$\begin{cases} \angle CBN = \angle ABO \\ \angle BNC = \angle BOA = 90^\circ \\ BC = BA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CBN \cong \triangle ABO (\text{AAS}),$$

$$\therefore BN = BO = 8, \quad CN = OA = 6,$$

$$\because \angle BOF = \angle CFO = \angle OBN = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OBNF$ 为矩形,

$\therefore$ 矩形 $OBNF$ 为正方形,

$$\therefore OF = NF = OB = 8,$$

$$\therefore CF = CN + NF = 14$$

$$\therefore AF = OF - OA = 2,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore CD = AD, \quad \angle CDE = \angle ADE,$$

在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle ADE$ 中,

$$\begin{cases} CD = AD \\ \angle CDE = \angle ADE, \\ DE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle ADE (\text{SAS}),$$

$$\therefore AE = CE,$$

$$\therefore AE + EF = CE + EF = CF,$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 周长} = AE + EF + AF = CF + AF = 14 + 2 = 16.$$

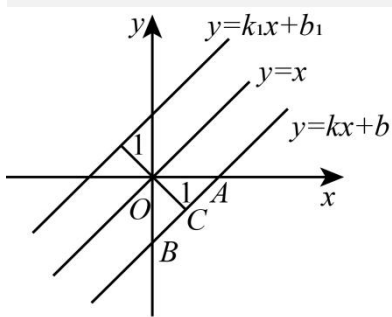
故答案为：16.

16. 定义：在平面直角坐标系 xOy 中，距离为 1 的两条直线叫做“互为伴随线”. 如果直线 $y = kx + b$ 与直线 $y = x$ 互为伴随线，那么直线 $y = kx + b$ 的函数解析式为_____.

【答案】 $y = x - \sqrt{2}$ 或 $y = x + \sqrt{2}$

【分析】本题考查了一次函数的性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理，由题意得： $k = k_1 = 1$ ， $OC = 1$ ， $\angle OAB = 45^\circ$ ， $OC \perp AB$ ， $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形，由勾股定理结合等腰直角三角形的性质求出 $OB = \sqrt{2}$ ，得到 $b = -\sqrt{2}$ ，即可得出解析式，同理计算即可得出 $b_1 = \sqrt{2}$ ，熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】解：如图：



由题意得： $k = k_1 = 1$ ， $OC = 1$ ， $\angle OAB = 45^\circ$ ， $OC \perp AB$ ，

$\therefore \triangle OAB$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AC = OC = BC = 1$ ，

$\therefore OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{2}$ ，

$\therefore b = -\sqrt{2}$ ，即 $y = x - \sqrt{2}$ ，

同理可得： $b_1 = \sqrt{2}$ ，即 $y = x + \sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ 的函数解析式为 $y = x - \sqrt{2}$ 或 $y = x + \sqrt{2}$ ，

故答案为： $y = x - \sqrt{2}$ 或 $y = x + \sqrt{2}$.

17. 直角三角形的斜边 AB 在 x 轴的正半轴上，点 A 与原点重合，点 B 的坐标是 $(6,0)$ 且 $\angle BAC = 45^\circ$ ，若将 ABC 绕着点 O 旋转 90° ，点 B 和 C 点分别落在点 E 和点 F 处，那么直线 EF 的解析式是_____.

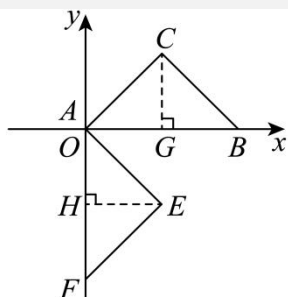
【答案】 $y = x - 6$ 或 $y = x + 6$ 或 $y = -x - 6$ 或 $y = -x + 6$

【分析】分点 C 在第一象限和第四象限讨论，然后每种情况分顺时针和逆时针旋转讨论，根据等腰直角三

角形的判定与性质，旋转的性质，全等三角形的判定与性质等求出点 E 、 F 的坐标，然后根据待定系数法求解即可。

【详解】解：当点 C 在第一象限时，

若按顺时针旋转，如图，过 C 作 $CG \perp OB$ 于 G ，过 E 作 $EH \perp OF$ 于 H ，



$\because \angle BAC = 45^\circ$ ， ABC 是直角三角形，

$\therefore ABC$ 是直角三角形，

$\therefore OG = BG$

$\because A$ 、 O 重合， $B(6,0)$ ，

$\therefore OB = AB = 6$ ，

$\therefore OG = BG = AG = \frac{1}{2}OB = 3$ ，

$\because ABC$ 绕着点 O 旋转 90° ，点 B 和 C 点分别落在点 E 和点 F 处，

$\therefore OF = OB = 6$ ， $OC = OE$ ， $\angle BOF = \angle COE = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 点 F 在 y 的负半轴上，

$\therefore F(0, -6)$ ，

又 $\angle BOF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EOH = \angle COG$ ，

又 $\angle CGO = \angle EHO = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle EOH \cong \triangle COG$ ，

$\therefore EH = CG = 3$ ， $OH = OG = 3$ ，

$\therefore E(3, -3)$ ，

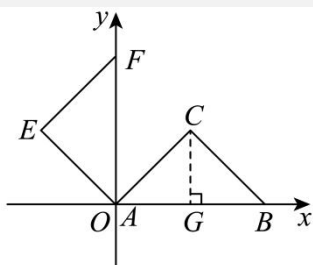
设直线 EF 解析式为 $y = kx + b$ ，

$$\text{则} \begin{cases} 3k + b = -3 \\ b = -6 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k=1 \\ b=-6 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 EF 解析式为 $y = x - 6$,

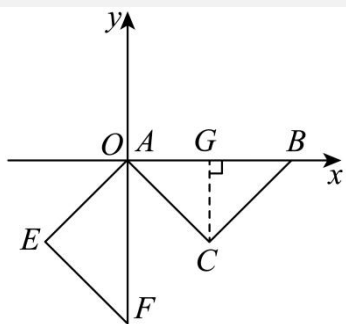
若按照逆时针旋转, 如图



同理可求 $E(-3, 3)$, $F(0, 6)$, 直线 EF 解析式为 $y = x + 6$;

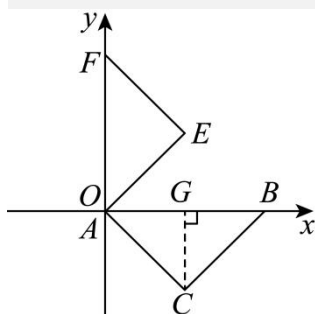
当点 C 在第四象限时,

若按顺时针旋转, 如图,



同理可求 $E(-3, -3)$, $F(0, -6)$, 直线 EF 解析式为 $y = -x - 6$;

若按逆时针旋转, 如图,



同理可求 $E(3, 3)$, $F(0, 6)$, 直线 EF 解析式为 $y = -x + 6$;

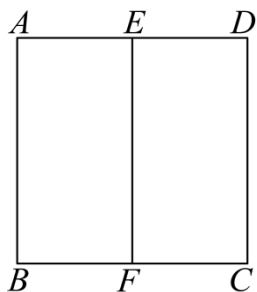
综上, 直线 EF 解析式为 $y = x - 6$ 或 $y = x + 6$ 或 $y = -x - 6$ 或 $y = -x + 6$.

故答案为: $y = x - 6$ 或 $y = x + 6$ 或 $y = -x - 6$ 或 $y = -x + 6$.

【点睛】 本题考查了等腰直角三角形的判定与性质, 旋转的性质, 全等三角形的判定与性质, 待定系数法

求一次函数解析式等知识，明确题意，灵活应用以上知识，合理分类讨论是解题的关键.

18. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别为边 AD 、 BC 的中点，点 P 在边 CD 上，如果将 $\triangle BPC$ 沿直线 BP 翻折后，点 C 恰好落在线段 EF 上的点 Q 处，线段 EQ 的长为 1，那么正方形 $ABCD$ 的边长为_____.

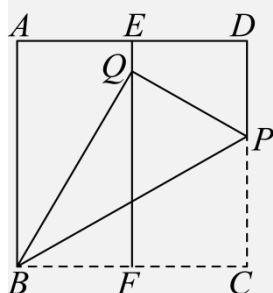


【答案】 $4 + 2\sqrt{3}/2\sqrt{3} + 4$

【分析】 本题考查了正方形的性质，勾股定理，折叠的性质，解一元二次方程，解题的关键是掌握正方形的性质和折叠的不变性.

先得到四边形 $AEFB$ 为矩形，根据正方形的性质以及折叠的性质得到可设 $BQ = BC = AB = EF = 2x$ ， $BF = x$ ， $FQ = 2x - 1$ ，在 $\text{Rt}\triangle BFQ$ 中由勾股定理建立方程 $x^2 + (2x - 1)^2 = (2x)^2$ ，即可求解.

【详解】 解：如图：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD = BC = AB$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，

$\because$ 点 E 、 F 分别为边 AD 、 BC 的中点，

$\therefore AE = BF$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEFB$ 为平行四边形，

$\because \angle A = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEFB$ 为矩形，

$\therefore EF = AB$ ， $EF \perp BC$ ，

$\because$ 翻折，

$\therefore BQ = BC$ ，

设正方形的边长为 $2x$ ，则 $BQ = BC = AB = EF = 2x$ ， $BF = x$ ， $FQ = 2x - 1$ ，

∴ 在 $\text{Rt}\triangle BFQ$ 中，由勾股定理得： $x^2 + (2x - 1)^2 = (2x)^2$ ，

解得： $x = 2 + \sqrt{3}$ 或 $x = 2 - \sqrt{3}$ （舍），

∴ 正方形的边长为 $2x = 4 + 2\sqrt{3}$ ，

故答案为： $4 + 2\sqrt{3}$ 。

三.解答题（本大题共 8 小题，58 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

19. 解方程（组）

(1)解方程： $\sqrt{-2x+3} = x$

(2)解方程组：
$$\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0 & \text{①} \\ x + y = 2 & \text{②} \end{cases}$$

(3)解方程： $x^2 - 2x - \frac{6}{x^2 - 2x} = 1$

【答案】(1) $x = 1$

(2) $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

(3) $x = 3$ 或 $x = -1$

【分析】本题主要考查了解无理方程，解二元二次方程，解分式方程，熟知相关解方程的方法是解题的关键。

(1) 把方程两边同时平方得到一个一元二次方程，解方程即可得到答案；

(2) 先把方程①的左边利用十字相乘法分解因式，再由②得 $x = 2 - y$ ，把 $x = 2 - y$ 代入①分解因式的方程中求出 y 的值，进而求出 x 的值即可；

(3) 设 $x^2 - 2x = t$ ，则原方程可化为 $t - \frac{6}{t} = 1$ ，再去分母得到整式方程，解方程并验证和检验即可得到答案。

【详解】(1) 解：∵ $\sqrt{-2x+3} = x$ ，

$$\therefore -2x + 3 = x^2,$$

$$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore (x+3)(x-1) = 0,$$

$$\therefore x+3=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$\therefore x=1 \text{ 或 } x=-3 \text{ (舍去, 算术平方根的非负性);}$$

(2) 解:
$$\begin{cases} x^2 + 5xy + 6y^2 = 0 \text{①} \\ x + y = 2 \text{②} \end{cases}$$

由①得: $(x+2y)(x+3y)=0$ ③,

由②得: $x=2-y$ ④,

把④代入③中得: $(2-y+2y)(2-y+3y)=0$,

$$\therefore y+2=0 \text{ 或 } 2y+2=0,$$

解得 $y=-2$ 或 $y=-1$,

当 $y=-2$ 时, $x=2-(-2)=4$,

当 $y=-1$ 时, $x=2-(-1)=3$,

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$.

(3) 解: 设 $x^2-2x=t$, 则原方程可化为 $t-\frac{6}{t}=1$,

$$\therefore t^2-t-6=0,$$

$$\therefore (t-3)(t+2)=0,$$

$$\therefore t-3=0 \text{ 或 } t+2=0,$$

$$\therefore t=3 \text{ 或 } t=-2,$$

$$\therefore x^2-2x=3 \text{ 或 } x^2-2x=-2,$$

$$\therefore x^2-2x-3=0 \text{ 或 } x^2-2x+2=0,$$

解方程 $x^2-2x-3=0$ 得 $x=3$ 或 $x=-1$, 解方程 $x^2-2x+2=0$ 可得原方程无解,

经检验, $x=3$ 和 $x=-1$ 都是原方程的解,

$\therefore$ 原方程的解为 $x=3$ 或 $x=-1$.

20. 新定义 $[a,b]$ 为一次函数 $y=ax+b$ ($a \neq 0$, a, b 为实数) 的“关联数”.

(1) 若“关联数” $[3, 2-b]$ 的一次函数为正比例函数, 求 b 的值.

(2) 已知直角坐标系中点 $A(1, 3)$, 点 $B(2, 7)$, 求图像过 A, B 两点的一次函数的关联数.

【答案】(1) $b=2$

(2) $[4, -1]$

【分析】 本题考查了新定义，待定系数法求一次函数的解析式，理解新定义是解题的关键；

(1) 由新定义及正比例函数知， $2-b=0$ ，即可求得 b 的值；

(2) 利用待定系数法求出直线 AB 的函数解析式，即可求得“关联数”.

【详解】 (1) 解： $\because$ “关联数” $[3, 2-b]$ 的一次函数为正比例函数，

$$\therefore 2-b=0,$$

解得 $b=2$ ；

(2) 解： 将 $A(1, 3)$ ， $B(2, 7)$ 代入 $y=ax+b$ 中，

$$\text{得, } \begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=7 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=4 \\ b=-1 \end{cases};$$

即图像过 A 、 B 两点的一次函数的关联数为 $[4, -1]$.

21. 有四张完全相同的卡片 A 、 B 、 C 、 D ，分别面有不同的几何图形： A （等边三角形）； B （圆）； C （矩形）； D （等腰梯形），将这四张卡片放在不透明的盒子中洗匀.

(1) 从盒子中抽出一张卡片，取出的卡片所画的图形是轴对称图形的概率是_____；

(2) 小莉从盒子中同时抽取了两张卡片，取出的两张卡片所画的图形都是中心对称图形的概率是多少？（请用树形图说明，卡片可用 A 、 B 、 C 、 D 表示）

【答案】 (1) 1

$$(2) \frac{1}{6}$$

【分析】 (1) 先判断 A （等边三角形）、 B （圆）、 C （矩形）、 D （等腰梯形）都是轴对称图形，再根据概率公式求解；

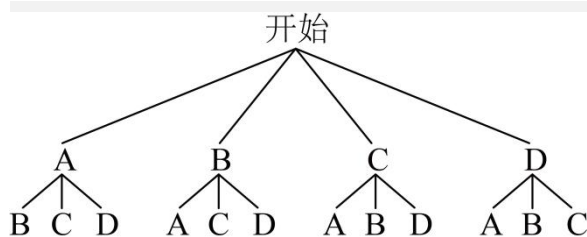
(2) 先画出树状图展示 12 种等可能的结果数，再找出抽取的两张卡片都是中心对称图形的结果数，然后根据概率公式求解即可.

【详解】 (1) $\because A$ （等边三角形）、 B （圆）、 C （矩形）、 D （等腰梯形）都是轴对称图形，

$\therefore$ 从盒子中抽出一张卡片，取出的卡片所画的图形是轴对称图形的概率是 1；

(2) B （圆）、 C （矩形）是中心对称图形，

所有等可能的情况如图所示：

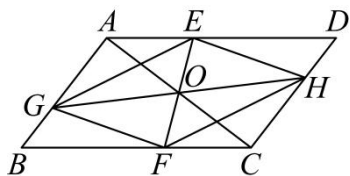


共有 12 种等可能的结果数，其中抽取的两张卡片都是中心对称图形的结果有 2 种，

所以取出的两张卡片所画的图形都是中心对称图形的概率是 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

【点睛】本题考查了求两次事件的概率，正确理解题意、熟练掌握利用树状图或列表法求解的方法是关键。

22. 已知 $\square ABCD$ ，点 O 为对角线 AC 的中点，过点 O 分别作直线 EF ， GH ，直线 EF 交边 AD 、 BC 于点 E 、 F ，直线 GH 交边 AB 、 CD 于点 G 、 H 。求证：四边形 $EHFG$ 为平行四边形。



【答案】见解析

【分析】此题考查了平行四边形的性质和判定，全等三角形的性质和判定，平行线的性质，解题的关键是掌握以上知识点。

由平行四边形得到 $OA = OC$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle DAO = \angle BCO$ ，证明出 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA)，得到 $OE = OF$ ，同理得到 $OG = OH$ ，即可证明四边形 $EHFG$ 为平行四边形。

【详解】 $\because \square ABCD$ ，点 O 为对角线 AC 的中点，

$$\therefore OA = OC, AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle DAO = \angle BCO$$

$$\text{又} \because \angle AOE = \angle COF$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF \text{ (ASA)}$$

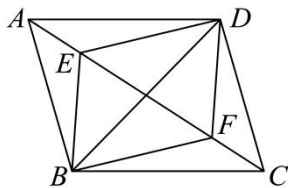
$$\therefore OE = OF$$

$$\therefore \text{同理可证, } \triangle AOG \cong \triangle COH$$

$$\therefore OG = OH$$

$\therefore$ 四边形 $EHFG$ 为平行四边形。

23. 如图已知点 E 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上的一点，连结 DE ，过点 B 作 $BF \parallel DE$ 交 AC 于点 F 。



(1) 求证: $AE = CF$;

(2) 若 $AB = BC = 8$, $DE = 6$, 当 $\angle ABF = 90^\circ$, 求 AE 的长.

【答案】(1) 见解析

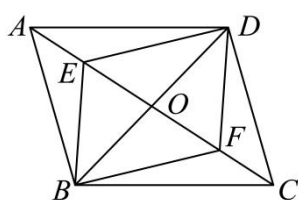
(2) $\frac{14}{5}$

【分析】 本题考查了平行四边形的判定与性质, 等腰三角形的性质, 勾股定理等知识, 解题的关键是:

(1) 根据平行四边形的性质得出 $AO = CO$, $BO = DO$, 证明 $\triangle BEO \cong \triangle DFO$, 得出 $EO = FO$, 然后根据等式的性质即可得证;

(2) 由全等三角形的性质得出 $BF = DE = 6$, 根据勾股定理求出 $AF = 10$, 根据三线合一的性质得出 $BO \perp AC$, 根据等面积法求出 $BO = \frac{24}{5}$, 根据勾股定理求出 $FO = \frac{18}{5}$, 结合 (1) 中 $EO = FO$ 即可求解.

【详解】(1) 证明: 设 AC 、 BD 相交于 O ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AO = CO$, $BO = DO$,

$\because BF \parallel DE$,

$\therefore \angle FBO = \angle EDO$, $\angle BFO = \angle DEO$,

$\therefore \triangle BFO \cong \triangle DEO$,

$\therefore EO = FO$,

又 $AO = CO$,

$\therefore AO - EO = CO - FO$,

$\therefore AE = CF$;

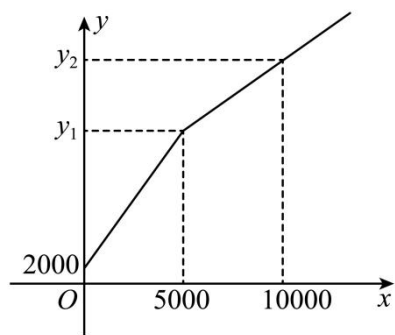
(2) 解: $\because \triangle BFO \cong \triangle DEO$,

$\therefore BF = DE = 6$,

又 $AB = 8$, $\angle ABF = 90^\circ$,

$$\begin{aligned}
&\therefore AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = 10, \\
&\therefore AB = BC, \quad AO = CO, \\
&\therefore BO \perp AC, \\
&\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2}AB \cdot BF = \frac{1}{2}AF \cdot BO, \quad \text{即 } \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = \frac{1}{2} \times 10 \cdot BO, \\
&\therefore BO = \frac{24}{5}, \\
&\therefore FO = \sqrt{BF^2 - BO^2} = \frac{18}{5}, \\
&\therefore EO = FO, \\
&\therefore EF = 2FO = \frac{36}{5}, \\
&\therefore AE = AF - EF = \frac{14}{5}.
\end{aligned}$$

24. 某公司开发了一款人工智能客户支持系统. 该系统总的运行成本与服务的客户数量之间存在函数关系. 已知: 系统维护有固定成本 (即系统没有客户咨询, 仍需要支付的成本); 另外每服务一个客户, 需要一定的运行成本; 且当服务人数超过 5000 人时, 超过部分每服务一个客户的运行成本降低 2 元, 假设系统总的运行成本为 y 元, 客户的数量为 x 人, 请结合函数图像, 回答下列问题:



(1) 系统维护的固定成本是_____元.

(2) 若当客户人数为 5000 人时, 总的运行成本为 y_1 元, 若当客户人数为 10000 人时, 总的运行成本为 y_2 元, 且 $y_1 = \frac{8}{13}y_2$.

① 当客户人数不超过 5000 人时, 求每服务一个客户需要的运行成本.

② 如果总的运行成本不少于 35000 元, 求该公司至少服务客户多少人?

【答案】 (1) 2000

(2) ① 6 元; ② 5750 人

【分析】 本题考查一次函数解决实际问题, 读懂题意是解题的关键.

(1) 由图像与 y 轴的交点的坐标即可解答;

(2) ①当客户人数不超过 5000 人时, 设每服务一个客户需要的运行成本 n 元, 得到 $y_1 = 5000n + 2000$, $y_2 = 10000n - 8000$, 根据 $y_1 = \frac{8}{13}y_2$ 得到方程, 求解即可;

②先求出当 $x \leq 5000$ 时, $y = 6x + 2000$; 当 $x > 5000$ 时, $y = 4x + 12000$. 判断当 $y \geq 35000$ 时, $x > 5000$, 因此得到 $4x + 12000 \geq 35000$, 求解即可.

【详解】(1) 解: 由图像可得, 当 $x = 0$ 时, $y = 2000$,

$\therefore$ 系统维护的固定成本是 2000 元.

故答案为: 2000;

(2) 解: ①当客户人数不超过 5000 人时, 设每服务一个客户需要的运行成本 n 元, 则当服务人数超过 5000 人时, 超过部分每服务一个客户的运行成本为 $(n - 2)$ 元,

$$\therefore y_1 = 5000n + 2000,$$

$$y_2 = y_1 + 5000(n - 2) = 5000n + 2000 + 5000(n - 2) = 10000n - 8000,$$

$$\because y_1 = \frac{8}{13}y_2,$$

$$\therefore 5000n + 2000 = \frac{8}{13}(10000n - 8000),$$

解得: $n = 6$,

$\therefore$ 当客户人数不超过 5000 人时, 每服务一个客户需要的运行成本为 6 元.

②由①可知: 当客户人数不超过 5000 人时, 每服务一个客户需要的运行成本为 6 元; 当服务人数超过 5000 人时, 超过部分每服务一个客户的运行成本为 4 元.

$$\therefore \text{当 } x \leq 5000 \text{ 时, } y = 6x + 2000;$$

$$\text{当 } x > 5000 \text{ 时, } y = 6 \times 5000 + 2000 + 4(x - 5000) = 4x + 12000.$$

$$\therefore \text{当 } x = 5000 \text{ 时, } y = 6 \times 5000 + 2000 = 32000,$$

$$\therefore \text{当 } y \geq 35000 \text{ 时, } x > 5000,$$

$$\therefore 4x + 12000 \geq 35000,$$

解得 $x \geq 5750$.

$\therefore$ 该公司至少服务客户 5750 人.

25. 如图, 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$ 图象与 y 轴、 x 轴分别交于 A 、 B 两点, 点 C 、 D 分别是射线 OA 、射线 BA 上一动点(点 C 与点 A 不重合), 且 $CD = DA$.

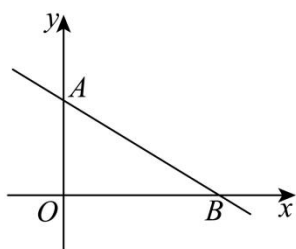


图1

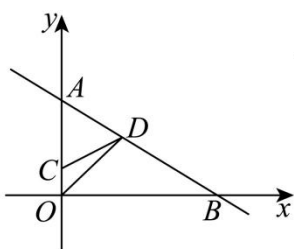


图2

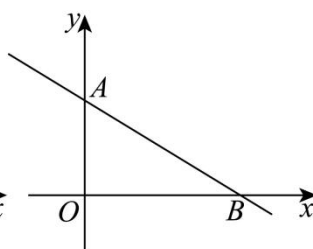


图3

(1)求点 A、B 坐标和 $\angle BAO$ 度数;

(2)点 C、D 在线段 OA、AB 上时(不与端点重合), 设 OC 的长度为 m , 用含 m 的代数式表示 $\triangle OCD$ 的面积;

(3)若 E 为坐标平面内的一点, 当以 O、B、D、E 为顶点的四边形为菱形时, 直接写出 C 的坐标.

【答案】 (1)点 A 的坐标为 $(0,3)$; 点 B 的坐标为 $(3\sqrt{3},0)$, $\angle BAO = 60^\circ$

$$(2) y = \frac{-\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}x}{4} (0 < x < 3)$$

(3)当以 O、B、D、E 为顶点的四边形为菱形时, 点 C 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(0, 3\sqrt{3}-3)$ 或 $(0,6)$

【分析】 (1) 利用一次函数图象上点的坐标特征可求出点 A、B 的坐标及 OA、OB 的长度, 在 $Rt\triangle AOB$ 中, 利用勾股定理可求出 AB 的长度, 由 $AO = \frac{1}{2}AB$, 取 AB 的中点 K, 连接 KO, 可得 $\triangle AKO$ 是等边三角形, 进而求出 $\angle BAO$ 的度数;

(2) 过点 D 作 $DM \perp y$ 轴, 垂足为点 M, 由 OA、OC 的长度可得出 $AC = 3-x$, 由 $AD = CD$, $\angle BAO = 60^\circ$, 可得出 $\triangle ADC$ 为等边三角形, 利用等边三角形的性质及勾股定理可得出 DM 的长度, 再利用三角形的面积公式即可得出 y 关于 x 的函数关系式;

(3) 分 $OD = DB$, $BD = BO$ 及 $OB = OD$ 三种情况考虑: ①当 $OD = DB$ 时, 点 C_1 与点 O 重合或点 C_1 与点 A 重合, 进而可得出点 C_1 的坐标; ②当 $BD = BO$ 时, 由 $AD_2 = AB - OB$ 可求出 AD_2 的长度, 结合 $\triangle AC_2D_2$ 是等边三角形可得出 AC_2 的长度, 由 $OC_2 = OA - AC_2$ 可求出 OC_2 的长度, 进而可得出点 C_2 的坐标; ③当 $OB = OD$ 时, 过点 O 作 $ON \perp$ 直线 AB, 垂足为点 N, 通过解直角三角形可求出 BN 的长度, 由等腰三角形的性质及 AB 的长度可求出 AD_3 的长度, 结合 $\triangle AC_3D_3$ 为等边三角形可得出 AC_3 的长度, 由 $OC_3 = OA + AC_3$ 可求出 OC_3 的长度, 进而可得出点 C_3 的坐标. 综上, 此题得解.

【详解】 (1) 解: 当 $x=0$ 时, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3 = 3$

$\therefore OA = 3$, 点 A 的坐标为 $(0,3)$;

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3 = 0$$

$$\text{解得: } x = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore OB = 3\sqrt{3}$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3\sqrt{3}, 0)$,

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle AOB = 90^\circ$,

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 6$$

$$\therefore AO = \frac{1}{2}AB$$

如图, 取 AB 的中点 K , 连接 KO ,

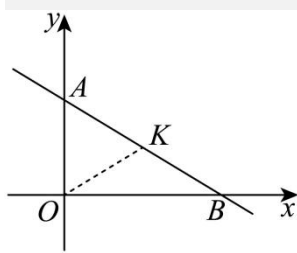


图1

$$\therefore AK = AO = KO$$

$\therefore \triangle AKO$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle OAB = 60^\circ$$

(2) 在图2中, 过点 D 作 $DM \perp y$ 轴, 垂足为点 M .

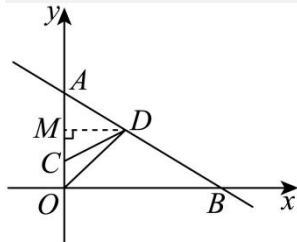


图2

$$\because OA = 3, OC = x,$$

$$\therefore AC = 3 - x,$$

$$\because AD = CD, \angle BAO = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ADC$ 为等边三角形,

$$\therefore AM = \frac{1}{2}AC = \frac{3-x}{2}$$

$$\therefore DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \frac{\sqrt{3}(3-x)}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}OC \cdot DM = \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}(3-x)}{2} = \frac{-\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}x}{4} (0 < x < 3)$$

(3) $\because$ 以 O 、 B 、 D 、 E 为顶点的四边形为菱形,

$\therefore$ 分三种情况考虑, 如图3所示.

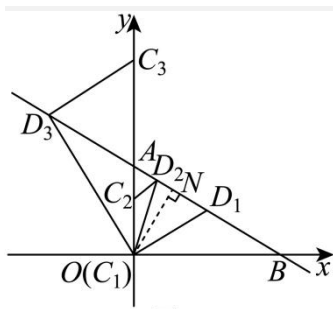


图3

①当 $OD = DB$ 时，点 C_1 与点 O 重合，

$\therefore$ 点 C_1 的坐标为 $(0,0)$ ；

②当 $BD = BO$ 时， $AD_2 = AB - OB = 6 - 3\sqrt{3}$

$\because \triangle AC_2D_2$ 是等边三角形，

$\therefore AC_2 = AD_2 = 6 - 3\sqrt{3}$

$\therefore OC_2 = OA - AC_2 = 3\sqrt{3} - 3$

$\therefore C_2(0, 3\sqrt{3} - 3)$

③当 $OB = OD$ 时，过点 O 作 $ON \perp$ 直线 AB ，垂足为点 N ，

在 $Rt\triangle BON$ 中， $OB = 3\sqrt{3}$ ， $\angle OBN = 30^\circ$ ，

$\therefore ON = \frac{1}{2}OB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ， $BN = \sqrt{OB^2 - ON^2} = \frac{9}{2}$

$\because OB = OD_3$ ，

$\therefore BD_3 = 2BN = 9$ ，

$\therefore AD_3 = BD_3 - AB = 3$ 。

$\because \triangle AC_3D_3$ 为等边三角形，

$\therefore AC_3 = AD_3 = 3$ ，

$\therefore OC_3 = OA + AC_3 = 6$ ，

$\therefore$ 点 C_3 的坐标为 $(0,6)$ 。

综上所述：当以 O 、 B 、 D 、 E 为顶点的四边形为菱形时，点 C 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(0,3)$ 或 $(0, 3\sqrt{3} - 3)$ 或 $(0,6)$ 。

【点睛】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征、勾股定理、解含 30° 度角的直角三角形、等边三角形的判定与性质、三角形的面积以及等腰三角形的性质，掌握以上知识分类讨论，是解题的关键。

26. **【探索发现】** 如图 1，等腰直角三角形 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CB = CA$ ，直线 DE 经过点 C ，过点 A 作

$AD \perp DE$ 于点 D . 过 B 作 $BE \perp DE$ 于点 E , 则 $\triangle BEC \cong \triangle CDA$.

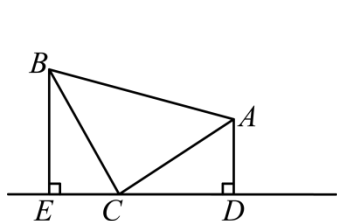


图1

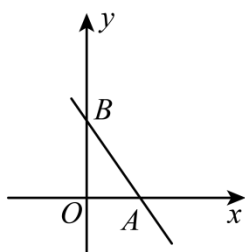


图2

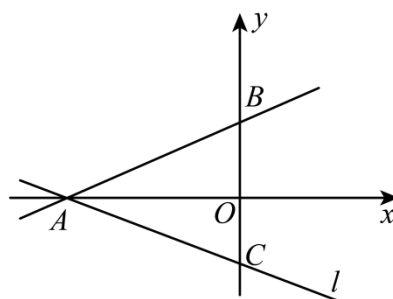


图3

【迁移应用】如图 2, 直线 $y = kx + 2$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点.

(1) 当直线 $y = 6$ 上存在一点 F , 且点 F 在第一象限, 使得 $\triangle ABF$ 为等腰直角三角形, 请直接写出点 F 的坐标及相应的 k 的值;

(2) 点 H 为第一象限内的一点, 且 $AH \perp AB$, $AH = AB$, 连接 OH , 求 $\triangle OAH$ 的面积 (用含有 k 的代数式来表示);

(3) 如图 3, 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 直线 l 经过点 A , 与 y 轴负半轴交于点 C , 且 $\angle BAC = 45^\circ$, 求直线 l 的表达式.

【答案】(1) $F(2, 6)$, $k = -\frac{1}{2}$ 或 $F(8, 6)$, $k = -\frac{1}{3}$ 或 $F(6, 6)$, $k = -\frac{1}{5}$

(2) $\frac{2}{k^2}$

(3) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

【分析】本题考查了一次函数与几何综合问题, 涉及待定系数法求函数解析式, 一次函数图象与坐标轴的交点问题, 全等三角形的判定与性质, 等腰三角形的判定等知识点, 解题的关键在于构造“一线三等角”的全等.

(1) 先求出 $B(0, 2)$, 即 $OB = 2$, 然后分三种情况讨论, 利用“一线三等角”的全等进行求解即可;

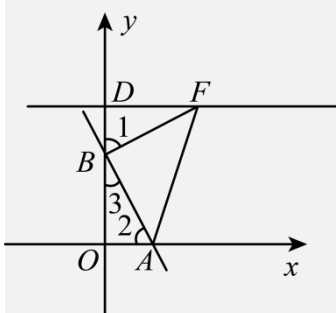
(2) 先求出 $A\left(-\frac{2}{k}, 0\right)$, 则 $OA = \left|\frac{2}{k}\right|$, 过点 H 作 $HK \perp x$ 轴于点 H , 同上可证明: $\triangle BOA \cong \triangle AKH$, $HK = OA = \left|\frac{2}{k}\right|$, 再由 $S_{\triangle OAH} = \frac{1}{2}OA \times HK$ 即可求解;

(3) 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{1}{2}x + 2$, 则可求 $A(-4, 0)$, 过点 B 作 $BP \perp l$ 交直线 l 于点 P , 过点 B 作 y 轴的垂线, 分别过点 A , P 作垂线的垂线, 垂足为点 M , N , 可得 $BA = BP$, 同上可证明: $\triangle BMA \cong \triangle PNB$, 即可得到 $P(2, -2)$, 再由待定系数法求解即可.

【详解】(1) 解: 当 $x = 0, y = 2$,

$\therefore B(0,2)$, 即 $OB=2$,

①当 $BA=BF$, $\angle ABF=90^\circ$, 记直线 $y=6$ 交 y 轴于点 D , 如图:



$\because$ 直线 $y=6$ 与 y 轴垂直,

$\therefore \angle AOB = \angle BDF = 90^\circ$,

$\because \angle ABF = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 90^\circ - \angle 3$,

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BDF$ (AAS),

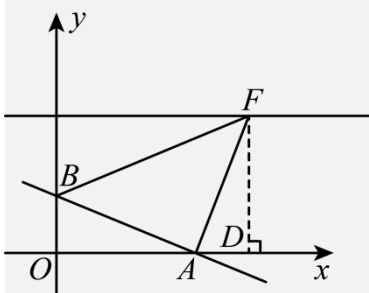
$\therefore DF = OB = 2$, $BD = OA = 6 - 2 = 4$

$\therefore F(2,6)$, $A(4,0)$,

将 $A(4,0)$ 代入 $y=kx+2$ 得, $4k+2=0$,

解得: $k=-\frac{1}{2}$;

② $AB=AF$, $\angle BAF=90^\circ$, 过点 F 作 $FD \perp x$ 轴于点 D , 如图:



同理可证明: $\triangle AOB \cong \triangle FDA$ (AAS),

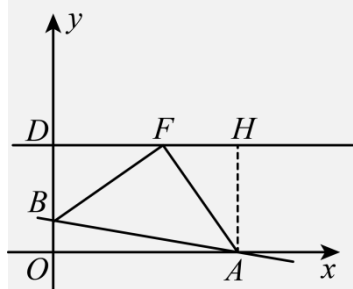
$\therefore OB = AD = 2$, $OA = FD = 6$,

$\therefore F(8,6)$, $A(6,0)$,

将 $A(6,0)$ 代入 $y=kx+2$ 得, $6k+2=0$,

解得： $k = -\frac{1}{3}$ ；

当 $FB = FA, \angle AFB = 90^\circ$ ，记直线 $y = 6$ 交 y 轴于点 D ，过点 A 作直线 $y = 6$ 的垂线，垂足为点 H ，如图：



同理可证明： $\triangle FDB \cong \triangle AHF$ (AAS)，

$$\therefore FD = AH = 6,$$

$$\therefore FH = DB = 6 - 2 = 4,$$

$$\therefore OA = DH = 6 + 4 = 10,$$

$$\therefore F(6, 6), A(10, 0),$$

将 $A(10, 0)$ 代入 $y = kx + 2$ 得， $10k + 2 = 0$ ，

解得： $k = -\frac{1}{5}$ ；

综上所述： $F(2, 6)$ ， $k = -\frac{1}{2}$ 或 $F(8, 6)$ ， $k = -\frac{1}{3}$ 或 $F(6, 6)$ ， $k = -\frac{1}{5}$ ；

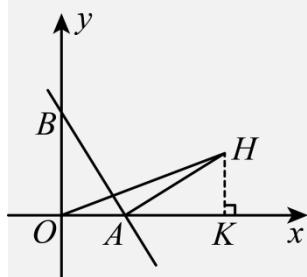
(2) 解： 当 $y = 0$ ， $kx + 2 = 0$ ，

解得： $x = -\frac{2}{k}$ ，

$$\therefore A\left(-\frac{2}{k}, 0\right),$$

$$\therefore OA = \left|-\frac{2}{k}\right|,$$

过点 H 作 $HK \perp x$ 轴于点 H ，



同上可证明： $\triangle BOA \cong \triangle AKH$ ，

$$\therefore HK = OA = \left| \frac{2}{k} \right|,$$

$$\therefore S_{\triangle OAH} = \frac{1}{2} OA \times HK = \frac{1}{2} \times \left(\left| \frac{2}{k} \right| \right)^2 = \frac{2}{k^2};$$

(3) 解: 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{1}{2}x + 2$,

令 $y = 0$, 则 $\frac{1}{2}x + 2 = 0$,

解得 $x = -4$,

$$\therefore A(-4, 0),$$

过点 B 作 $BP \perp l$ 交直线 l 于点 P , 过点 B 作 y 轴的垂线, 分别过点 A, P 作垂线的垂线, 垂足为点 M, N ,

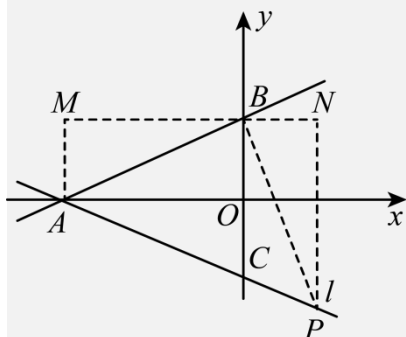


图3

$$\because \angle BAC = 45^\circ, BP \perp l,$$

$$\therefore \angle BPA = \angle BAP = 45^\circ,$$

$$\therefore BA = BP,$$

同上可证明: $\triangle BMA \cong \triangle PNB$,

$$\therefore PN = BM = 4, BN = AM = 2,$$

$$\therefore P(2, -2),$$

设直线 l 表达式为: $y = mx + n$,

代入 $P(2, -2)$, $A(-4, 0)$ 得:
$$\begin{cases} -4k + b = 0 \\ 2k + b = -2 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 表达式为 } y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}.$$
