

上海市 2025 学年八年级数学下学期期末模拟卷 01

解析答案版

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 本试卷共 26 题, 选择 6 题, 填空 12 题, 解答 8 题
2. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
4. 回答客观题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
5. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 下列事件中, 说法正确的是 ()
 - A. “明天本地不会下雨”是必然事件
 - B. “从地面往上抛出的排球会下落”是随机事件
 - C. “抛掷一枚硬币, 落地后反面朝上”是不可能事件
 - D. “汽车行驶到十字路口时恰好遇到红灯”是随机事件

【答案】D

【分析】 本题考查的是必然事件、不可能事件、随机事件的概念;

必然事件指在一定条件下, 一定发生的事件; 不可能事件是指在一定条件下, 一定不发生的事件; 不确定事件即随机事件是指在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件, 据此逐项判断即可。

【详解】 解: A.“明天本地不会下雨”是随机事件, 原说法错误;

B.“从地面往上抛出的排球会下落”是必然事件, 原说法错误;

C.“抛掷一枚硬币, 落地后反面朝上”是随机事件, 原说法错误;

D.“汽车行驶到十字路口时恰好遇到红灯”是随机事件, 说法正确;

故选: D.

2. 已知一次函数 $y = (3 - m)x + 3$, 如果函数值 y 随 x 增大而减小, 那么 m 的取值范围是 ()

A. $m > 3$

B. $m < 3$

C. $m \geq 3$

D. $m \leq 3$

【答案】A

【分析】本题考查了一次函数图象与系数的关系. 根据一次函数 $y = (3-m)x + 3$ 的增减性列出不等式 $3-m < 0$, 通过解该不等式即可求得 m 的取值范围.

【详解】解: 由题意得 $3-m < 0$,
解得 $m > 3$.

故选: A.

3. 下列方程中, 有实数解的是 ()

A. $x^4 + 3 = 0$

B. $\sqrt{x-1} + 3 = 0$

C. $\frac{x-3}{x} = \frac{x-3}{3}$

D. $x^2 + y^2 + 1 = 0$

【答案】C

【分析】本题考查了解分式方程, 偶次幂和算术平方根的非负性, 根据偶次幂和算术平方根的非负性以及解分式方程的方法和步骤逐个判断即可.

【详解】解: A、 $\because x^4 + 3 = 0, \therefore x^4 = -3, \because x^4 \geq 0, \therefore$ 该方程无实数解, 不符合题意;

B、 $\because \sqrt{x-1} + 3 = 0, \therefore \sqrt{x-1} = -3, \because \sqrt{x-1} \geq 0, \therefore$ 该方程无实数解, 不符合题意;

C、 $\frac{x-3}{x} = \frac{x-3}{3},$

$$3(x-3) = x(x-3)$$

$$3x-9 = x^2-3x,$$

$$(x-3)^2 = 0,$$

解得: $x = 3,$

经检验, $x = 3$ 是原分式方程的解, 故该方程有实数根, 符合题意;

D、 $\because x^2 + y^2 + 1 = 0, \therefore x^2 + y^2 = -1, \because x^2 + y^2 \geq 0, \therefore$ 该方程无实数解, 不符合题意;

故选: C.

4. 用换元法解分式方程 $\frac{2x-1}{x} + \frac{x}{1-2x} = 2$ 时, 如果设 $\frac{2x-1}{x} = y$, 并将原方程化为关于 y 的整式方程, 那么这个整式方程是 ()

A. $y^2 + y - 2 = 0$

B. $y^2 - y + 2 = 0$

C. $y^2 + 2y - 1 = 0$

D. $y^2 - 2y - 1 = 0$

【答案】D

【分析】此题考查了分式方程，把原方程变为 $\frac{2x-1}{x}-\frac{x}{2x-1}=2$ ，把 $\frac{2x-1}{x}=y$ 代入后整理即可得到答案.

【详解】解：由 $\frac{2x-1}{x}+\frac{x}{1-2x}=2$ 得， $\frac{2x-1}{x}-\frac{x}{2x-1}=2$ ，

设 $\frac{2x-1}{x}=y$ ，

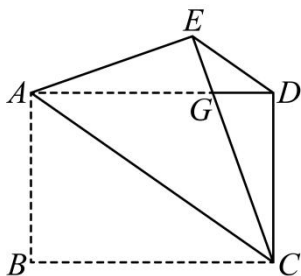
可化为， $y-\frac{1}{y}=2$ ，

$$\therefore y^2-1=2y$$

$$\therefore y^2-2y-1=0$$

故选：D

5. 把一张矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，点 B 的对应点为点 E ，边 EC 交边 AD 于点 G ，连接 ED （如图所示），当 $BC=\sqrt{2}AB$ 时，下列结论中，不正确的是（ ）



A. $\triangle AEG \cong \triangle CDG$

B. $ED \parallel AC$

C. $AG = 3GD$

D. $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle AEG}$

【答案】D

【分析】本题考查矩形性质及翻折问题，全等三角形的判定与性质，勾股定理，解题的关键是根据折叠得到 $\triangle AEG \cong \triangle CDG$ ．先由折叠的性质及矩形的性质可得 $\triangle AEG \cong \triangle CDG$ (AAS)，从而判断出选项 A；由全等的性质可得 $AG = CG, EG = DG$ ，由等腰三角形的性质可得 $\angle GAC = \angle GCA, \angle GED = \angle GDE$ ，再由平行线的判定即可判断选项 B；设 $AB = CD = t, GD = x$ ，则 $AD = \sqrt{2}t, AG = CG = \sqrt{2}t - x$ ，Rt $\triangle CDG$ 中， $CD^2 + DG^2 = CG^2$ ，列出方程求解，即可判断出选项 C；由折叠性质可得 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC}$ ，再由 $AG = 3GD$ ，可得 $CG = 3GE$ ，再判断选项 D.

【详解】解：∵矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，点 B 的对应点为 E ，

$$\therefore AB = CD = AE, \angle B = \angle AEC = \angle CDG = 90^\circ,$$

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle CDG$ 中，

$$\begin{cases} \angle AEG = \angle CDG \\ \angle AGE = \angle CGD, \\ AE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CDG \text{ (AAS)},$$

故 A 正确，不符合题意；

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CDG \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AG = CG, EG = DG,$$

$$\therefore \angle GAC = \angle GCA, \angle GED = \angle GDE,$$

$$\therefore \angle AGC = \angle EGD,$$

$$\therefore \angle GAC = \angle GCA = \angle GED = \angle GDE,$$

$$\therefore ED \parallel AC,$$

故 B 正确，不符合题意；

$$\text{设 } AB = CD = t, GD = x, \text{ 则 } AD = \sqrt{2}t, AG = CG = \sqrt{2}t - x,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CDG \text{ 中, } CD^2 + DG^2 = CG^2,$$

$$\therefore t^2 + x^2 = (\sqrt{2}t - x)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore GD = \frac{\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore AG = \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{4}t = \frac{3\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore AG = 3GD,$$

故 C 正确，不符合题意；

$\therefore$ 矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，点 B 的对应点为 E ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC},$$

$$\therefore AG = 3GD,$$

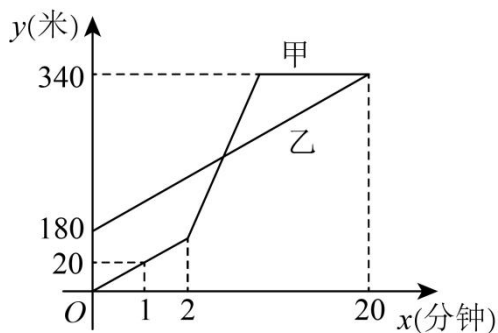
$$\therefore CG = 3GE,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle AEG}$$

故 D 不正确，符合题意，

故选：D

6. 甲乙二人登山，均从距离地面 0 米处出发，甲乙二人距离地面的高度 y （米）关于甲出发时间 x （分钟）的函数图像如图所示，已知甲在出发 2 分钟后将速度提升为原来的 3 倍并一路登顶，乙始终保持匀速前进。根据图像判断，以下说法正确的有几个？（ ）



- (1) 山的高度为 340 米
- (2) 甲乙二人不同时出发
- (3) 甲登顶的时间为自己出发后 7 分钟
- (4) 乙出发 42.5 分钟后登顶
- (5) 甲出发 5 分钟后追上乙

A. 5 个 B. 4 个 C. 3 个 D. 2 个

【答案】 A

【分析】 (1) 由函数图象可直接判断；

(2) 由两函数图象与 y 轴的交点坐标作出判断；

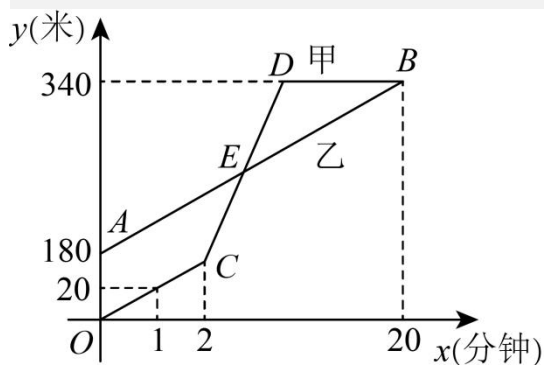
(3) 由山的高度及甲的登山速度分析求解；

(4) 由函数图像分析乙的登山速度，从而求出其登山时间；

(5) 通过求函数解析式的交点坐标进行分析计算.

【详解】 解：(1) 由函数图象可得山的高度为 340 米，故此说法正确，符合题意；

(2) 由题意，甲乙二人登山，均从距离地面 0 米处出发，



由图象可得 $O(0,0)$ ， $A(0,180)$ ，

$\therefore$ 甲出发时，乙已经距离地面 180 米，即甲乙二人不同时出发，故此说法正确，符合题意；

(3) 由图象可得甲出发 1 分钟时，距离地面 20 米，

$\therefore$ 甲在出发 2 分钟内的登山速度为 20 米/分，

又 $\because$ 已知甲在出发 2 分钟后将速度提升为原来的 3 倍并一路登顶，

∴ 甲在出发 2 分钟后的登山速度为 60 米/分,

$$\frac{340-20 \times 2}{60} = 5 \quad (\text{分钟}),$$

$$2+5=7 \quad (\text{分钟}),$$

∴ 甲登顶的时间为自己出发后 7 分钟, 故此说法正确, 符合题意;

(4) 由图象可得乙的登山速度为 $\frac{340-180}{20} = 8$ 米/分

∴ 乙的登山时间为 $\frac{340}{8} = 42.5$ (分), 即乙出发 42.5 分钟后登顶, 故此说法正确, 符合题意;

(5) 设直线 AB 的函数解析式为 $y = kx + b$, 把 $(0, 180)$, $(20, 340)$ 代入,

$$\begin{cases} b = 180 \\ 20k + b = 340 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 8 \\ b = 180 \end{cases},$$

∴ 直线 AB 的函数解析式为 $y = 8x + 180$,

设直线 CD 的函数解析式为 $y = mx + n$, 把 $(2, 40)$, $(7, 340)$ 代入,

$$\begin{cases} 2m + n = 40 \\ 7m + n = 340 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = 60 \\ n = -80 \end{cases},$$

∴ 直线 CD 的函数解析式为 $y = 60x - 80$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = 60x - 80 \\ y = 8x + 180 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 5 \\ y = 220 \end{cases}$$

∴ 甲出发 5 分钟后追上乙, 故此说法正确, 符合题意,

正确的有 5 个,

故选: A.

【点睛】 本题主要考查一次函数的应用, 用待定系数法求一次函数关系式, 并会用一次函数研究实际问题, 关键是准确识图.

第二部分 (非选择题 共 82 分)

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 在一个不透明的盒子中放入标号分别为 1、2、9、4、5、6、7、8、9 的形状、大小、质地完全相同的 9 个球, 充分混合后, 从中取出一个球, 标号为合数的概率_____.

【答案】 $\frac{5}{9}$

【分析】 随机摸出一个小球共有 9 种等可能结果, 其中摸出的小球标号为合数的有 5 种结果, 根据概率公式求解即可.

本题主要考查概率公式，随机事件 A 的概率 $P(A) = \text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数} \div \text{所有可能出现的结果数}$ 。

【详解】解：1、2、9、4、5、6、7、8、9 的形状、大小、质地完全相同的 9 个球，

其中摸出的小球标号为合数的有 9、4、6、8、9 共五种，概率是 $\frac{5}{9}$ ，

故答案为： $\frac{5}{9}$ 。

8. 一个正 n 边形的每一个内角都等于 160° ，则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】18

【分析】本题考查了正多边形内角和与外角和综合。首先求出外角度数，再用 360° 除以外角度数可得答案。

【详解】解： $\because$ 正 n 边形的每一个内角都等于 160° ，

$\therefore$ 每一个外角都等于 $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$ ，

$\therefore$ 边数 $n = 360^\circ \div 20^\circ = 18$ ；

故答案为：18。

9. 方程 $\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{1}{1+x}$ 的根是_____。

【答案】 $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$

【分析】本题考查解分式方程及一元二次方程，熟练掌握解方程的方法是解题的关键。利用解分式方程的步骤解方程即可。

【详解】解：原方程去分母得： $1 + x + 1 - x^2 = 1 - x$ ，

整理得： $x^2 - 2x - 1 = 0$ ，

解得： $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ ，

经检验， $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ 是分式方程的解，

故答案为： $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ 。

10. 方程 $\sqrt{x} + 4 + x = 2$ 的解是_____。

【答案】无实数根

【分析】本题考查了解无理方程；

移项后两边平方，得到关于 x 的一元二次方程，根据判别式的意义可知此方程无实数根，则原无理方程无实数根。

【详解】解：移项得： $\sqrt{x} = -2 - x$ ，

两边平方得： $x = x^2 + 4x + 4$ ，

整理得: $x^2 + 3x + 4 = 0$,

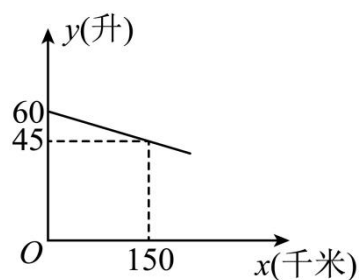
$\because \Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0$,

$\therefore$ 方程 $x^2 + 3x + 4 = 0$ 无实数根,

即方程 $\sqrt{x+4} + x = 2$ 无实数根,

故答案为: 无实数根.

11. 已知甲乙两地相距 500 千米, 一辆汽车加满 60 升油后由甲地开往乙地, 油箱中的剩余油量 y (升) 与行驶路程 x (千米) 之间是一次函数关系, 其部分图象如图所示. 当油箱中的剩余油量为 20 升时, 汽车距离乙地_____千米.



【答案】 100

【分析】 本题考查了一次函数的应用, 掌握待定系数法是解题的关键.

先根据待定系数法求出函数解析式, 再求出当 $y = 20$ 时 x 的值, 最后求出剩余路程.

【详解】 解: 设函数解析式为: $y = kx + 60$,

则: $45 = 150k + 60$,

解得: $k = -0.1$,

$\therefore y = -0.1x + 60$,

当 $y = 20$ 时, $20 = -0.1x + 60$,

解得: $x = 400$,

$\therefore 500 - 400 = 100$ (千米),

故答案为: 100.

12. 已知点 $(-4, y_1)$, $(2, y_2)$ 都在直线 $y = -2x + 1$ 上, 则 y_1 、 y_2 大小关系是_____.

【答案】 $y_1 > y_2$

【分析】 本题考查了一次函数图象的增减性, 根据已知函数的解析式得出 y 随 x 的增大而减小, 再比较即可.

【详解】 解: $\because -2 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

又 $\because -4 < 2$,

$\therefore y_1 > y_2$,

故答案为: $y_1 > y_2$.

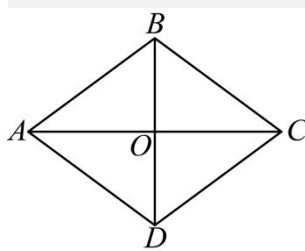
13. 已知菱形 $ABCD$ 的周长为 40, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O . 如果 $AO:BO=4:3$, 那么菱形 $ABCD$ 的面积为_____.

【答案】 96

【分析】 本题考查了菱形的性质, 勾股定理;

先求出菱形 $ABCD$ 的边长, 再根据题意设 $AO=4x$, $BO=3x$, 利用勾股定理求出 x , 进而得到 AC , BD 的长, 再根据菱形的面积公式计算即可.

【详解】 解: 如图,



$\because$ 菱形 $ABCD$ 的周长是 40,

$\therefore AB=40 \div 4=10$, $AC \perp BD$,

$\because AO:BO=4:3$,

$\therefore$ 设 $AO=4x$, 则 $BO=3x$,

$\because AO^2 + BO^2 = AB^2$, 即 $(4x)^2 + (3x)^2 = 10^2$,

解得: $x=2$ (负值已舍去),

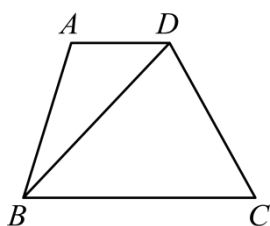
$\therefore AO=8$, $BO=6$,

$\therefore AC=2AO=16$, $BD=2BO=12$,

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积为: $\frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96$,

故答案为: 96.

14. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $2BC=5AD$, 若 $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{b}$, 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DB}=\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{a}$

【分析】 本题考查了平面向量，熟练掌握三角形法则是解题的关键. 根据向量的三角形法则表示出 $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$ ，再根据 BC 、 AD 的关系解答即可.

【详解】 解: $\because AD \parallel BC, 2BC = 5AD$,

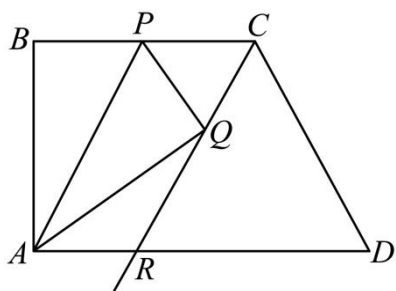
$$\therefore \overrightarrow{CB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{DA},$$

$$\because \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DB} = \vec{b} + \frac{5}{2}\vec{a}.$$

故答案为: $\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{a}$.

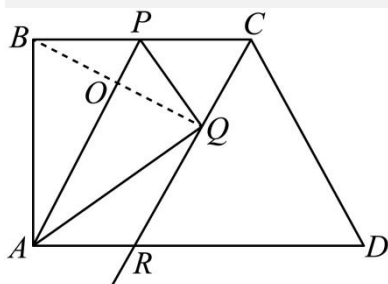
15. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $AD \parallel BC$, 且 $AD > BC$, $AB = BC = 6$, 点 P 在 BC 边上, 点 B 关于直线 AP 的对称点为 Q , CQ 的延长线交边 AD 于点 R , 如果 $AR = CP$, 那么线段 AP 的长为_____.



【答案】 $3\sqrt{5}$

【分析】 本题考查了平行四边形的判定和性质, 等腰三角形的判定, 勾股定理; 连接 BQ 交 AP 于 O , 证明四边形 $APCR$ 是平行四边形, 求出 $BP = PQ = CP = 3$, 然后利用勾股定理计算即可.

【详解】 解: 如图, 连接 BQ 交 AP 于 O .



$$\because PC = AR, \quad PC \parallel AR,$$

$\therefore$ 四边形 $APCR$ 是平行四边形,

$\therefore AP \parallel CR$,

$\because B, Q$ 关于 AP 对称,

$\therefore OB = OQ, \quad PB = PQ, \quad BQ \perp AP$,

$\therefore \angle PBQ = \angle PQB$, $BQ \perp CR$,
 $\therefore \angle PQB + \angle PQC = \angle PBQ + \angle PCQ = 90^\circ$,
 $\therefore \angle PQC = \angle PCQ$,
 $\therefore BP = PQ = CP = 3$,
 在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中, $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$.

故答案为: $3\sqrt{5}$.

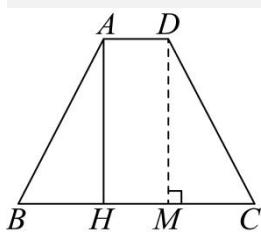
16. 已知在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = 13$ 厘米, $AD = 4$ 厘米, 高 $AH = 12$ 厘米, 那么这个梯形的中位线长等于_____厘米.

【答案】9

【分析】本题考查了等腰梯形的性质, 矩形的判定和性质, 勾股定理;

过点 D 作 $DM \perp BC$ 于 M , 证明四边形 $AHMD$ 是矩形, 可得 $AD = HM = 4$ 厘米, $AH = DM = 12$ 厘米, 然后利用勾股定理求出 BH 和 CM , 再根据梯形的中位线定理计算即可.

【详解】解: 如图, 过点 D 作 $DM \perp BC$ 于 M , 则 $\angle DMH = 90^\circ$,



$\therefore AH$ 是等腰梯形 $ABCD$ 的高, $AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle AHC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle HAD = 90^\circ$,
 $\therefore$ 四边形 $AHMD$ 是矩形,
 $\therefore AD = HM = 4$ 厘米, $AH = DM = 12$ 厘米,
 $\therefore AB = 13$ 厘米, $AH = 12$ 厘米, $\angle AHB = 90^\circ$,
 $\therefore BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ 厘米,
 $\therefore CD = AB = 13$ 厘米, $\angle DMC = 90^\circ$, $DM = AH = 12$ 厘米
 $\therefore CM = \sqrt{CD^2 - DM^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ 厘米,
 $\therefore BC = BH + HM + CM = 5 + 4 + 5 = 14$ 厘米,
 $\therefore$ 这个梯形的中位线长为: $\frac{AD + BC}{2} = \frac{4 + 14}{2} = 9$ 厘米,

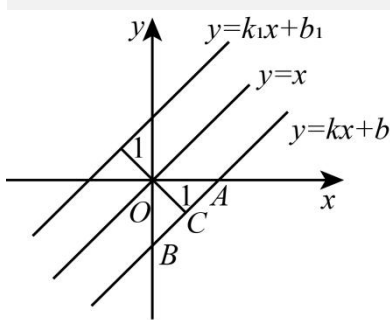
故答案为: 9.

17. 定义: 在平面直角坐标系 xOy 中, 距离为 1 的两条直线叫做“互为伴随线”. 如果直线 $y = kx + b$ 与直线 $y = x$ 互为伴随线, 那么直线 $y = kx + b$ 的函数解析式为_____.

【答案】 $y = x - \sqrt{2}$ 或 $y = x + \sqrt{2}$

【分析】本题考查了一次函数的性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理, 由题意得: $k = k_1 = 1$, $OC = 1$, $\angle OAB = 45^\circ$, $OC \perp AB$, $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形, 由勾股定理结合等腰直角三角形的性质求出 $OB = \sqrt{2}$, 得到 $b = -\sqrt{2}$, 即可得出解析式, 同理计算即可得出 $b_1 = \sqrt{2}$, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】解: 如图:



由题意得: $k = k_1 = 1$, $OC = 1$, $\angle OAB = 45^\circ$, $OC \perp AB$,

$\therefore \triangle OAB$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AC = OC = BC = 1$,

$\therefore OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{2}$,

$\therefore b = -\sqrt{2}$, 即 $y = x - \sqrt{2}$,

同理可得: $b_1 = \sqrt{2}$, 即 $y = x + \sqrt{2}$,

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ 的函数解析式为 $y = x - \sqrt{2}$ 或 $y = x + \sqrt{2}$,

故答案为: $y = x - \sqrt{2}$ 或 $y = x + \sqrt{2}$.

18. 已知 $\square ABCD$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC > AB$, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 AC 翻折, 点 B 落在点 E 处, AD 与 CE 相交于点 O , 若 $\triangle ADE$ 是直角三角形, 那么边 $BC =$ _____.

【答案】 6 或 4

【分析】由平行四边形的性质可得 $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, $AB = CD$, $AD = CB$,

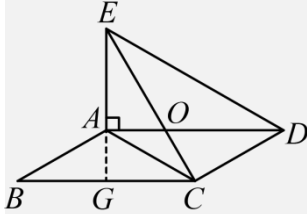
由折叠的性质可得: $BC = CE$, $AE = AB$, 分两种情况: 当 $\angle EAD = 90^\circ$ 时, 延长 EA 交 BC 于 G ; 当 $\angle AED = 90^\circ$ 时, 分别求解即可得出答案.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ， $AD = CB$ ，

由折叠的性质可得： $BC = CE$ ， $AE = AB < AD$ ，

如图，当 $\angle EAD = 90^\circ$ 时，延长 EA 交 BC 于 G ，



∵ $AD = BC$ ， $BC = EC$ ，

∴ $AD = EC$ ，

∵ $AD \parallel BC$ ， $\angle EAD = 90^\circ$ ，

∴ $\angle EGC = 90^\circ$ ，

∵ $\angle B = 30^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ，

∴ $\angle AEC = 30^\circ$ ，

∴ $GC = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}BC$ ，

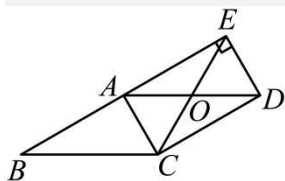
∴ 点 G 是 BC 的中点，

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中， $AG = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$ ，

∴ $BG = \sqrt{AB^2 - AG^2} = 3$ ，

∴ $BC = 2BG = 6$ ；

如图，当 $\angle AED = 90^\circ$ 时，



则 $AE = CD$ ，

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle CAD$ 中，

$$\begin{cases} AE = CD \\ CE = AD, \\ AC = CA \end{cases}$$

∴ $\triangle ACE \cong \triangle CAD (\text{SSS})$ ，

$$\therefore \angle ECA = \angle DAC, \quad \angle AEC = \angle CDA,$$

$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore OE = OD,$$

$$\therefore \angle OED = \angle ODE,$$

$$\therefore \angle AED = \angle CDE,$$

$$\because \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \parallel CD,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$\therefore$ 点 B 、 A 、 E 在同一直线上,

$$\therefore \angle BAC = \angle EAC = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore AC = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because AC^2 + AB^2 = BC^2,$$

$$\therefore AC = 2, \quad BC = 2AC = 4,$$

综上所述, 当 $\triangle AED$ 是直角三角形时, BC 的长为 6 或 4,

故答案为: 6 或 4.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质、折叠的性质、三角形全等的判定与性质、含 30° 的直角三角形的性质、勾股定理等知识点, 熟练掌握以上知识点并灵活运用, 采用分类讨论的思想是解此题的关键.

三.解答题 (本大题共 8 小题, 58 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. 解方程组
$$\begin{cases} x^2 + 5xy - 6y^2 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = \frac{6}{13} \\ y_1 = -\frac{1}{13} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

【分析】 本题考查了解二元二次方程组, 先将方程①变形为 $(x+6y)(x-y)=0$, 得 $x+6y=0$ 或 $x-y=0$,

从而组成两个方程组 $\begin{cases} x+6y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, 分别求解即可得出答案.

【详解】 解:
$$\begin{cases} x^2 + 5xy - 6y^2 = 0 \text{ ①} \\ 2x - y - 1 = 0 \text{ ②} \end{cases},$$

方程①可变形为 $(x+6y)(x-y)=0$ ，得 $x+6y=0$ 或 $x-y=0$ ，

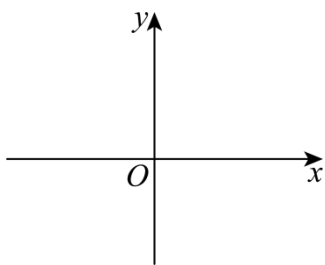
将它们分别与方程②组成方程组得 $\begin{cases} x+6y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ ，

$$\text{解方程组 } \begin{cases} x+6y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases} \text{ 得: } \begin{cases} x=\frac{6}{13} \\ y=-\frac{1}{13} \end{cases},$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} x-y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases} \text{ 得: } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{原方程组的解是 } \begin{cases} x_1=\frac{6}{13} \\ y_1=-\frac{1}{13} \end{cases}, \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=1 \end{cases}.$$

20. 已知一次函数的图像 l 经过点 $A(0, -2)$ ，正比例函数 $y=\frac{1}{3}x$ 的图像交于点 $(3, a)$ 。



(1)求一次函数解析式；

(2)若将直线 l 进行平移，使平移后的直线与坐标轴围成的三角形面积为15，求平移后的直线解析式。

【答案】 (1) $y = x - 2$

(2) $y = x + \sqrt{30}$ 或 $y = x - \sqrt{30}$

【分析】 本题考查的是利用待定系数法求解一次函数的解析式，图象的平移，一次函数与坐标轴围成的三角形的面积的计算，熟练的求解一次函数与坐标轴的交点坐标是解本题的关键。

(1) 利用待定系数法求解一次函数的解析式即可；

(2) 先确定平移后的函数解析式，然后求解一次函数与坐标轴的交点坐标，再利用三角形的面积公式计算即可。

【详解】 (1) 解：把 $(3, a)$ 代入 $y=\frac{1}{3}x$ 得 $a=1$ ，

$\therefore$ 交点坐标为 $(3, 1)$ ，

设直线 l 的解析式为： $y=kx+b$ ，把 $A(0, -2)$ 和 $(3, 1)$ 代入得：

$$\begin{cases} b = -2 \\ 3k + b = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数解析式为 $y = x - 2$;

(2) 设平移后的直线解析式 $y = x + a$,

则与 x 轴交点坐标为 $(-a, 0)$, 与 y 轴交点坐标为 $(0, a)$,

$\therefore$ 与坐标轴围成的三角形面积为 $\frac{1}{2}a^2 = 15$,

解得: $a = \pm\sqrt{30}$,

$\therefore$ 平移后的直线解析式为 $y = x + \sqrt{30}$ 或 $y = x - \sqrt{30}$.

21. 某工厂接到制作 2000 件物理实验模型的加工订单, 为了尽快完成任务, 工厂对原加工计划进行了调整, 经测算, 如果平均每天比原计划多加工 20 件, 那么能提早 5 天完成任务.

(1) 求工厂原计划每天加工物理实验模型的件数;

(2) 在生产模型的过程中, 检验员会在一段时间内先后对多个批次的模型合格情况进行抽查, 目的是估计产品的报废率, 及时调整生产数量与进度, 满足客户需求.

下表是检验员对该物理实验模型产品抽查过程中的数据统计:

抽取模型数累计 m (件)	50	100	150	200	250	300	400
报废模型数累计 n (件)	0	3	4	5	5	6	8
模型报废的频率 $\frac{n}{m}$ (精确到 0.001)	0	0.03	0.027	0.025	0.02	0.02	0.02

请估计这批物理实验模型成品的报废率约为_____ (精确到 0.01); 结合你的估计帮助工厂计算, 至少还需生产_____件产品才能完成订单的需求.

【答案】 (1) 工厂原计划每天加工物理实验模型的件数为 80 件

(2) 0.02; 41

【分析】 本题主要考查了分式方程的应用, 一元一次不等式的应用, 用频率估计概率, 解题的关键是理解题意, 根据等量关系列出方程.

(1) 设工厂原计划每天加工物理实验模型的件数为 x 件, 根据平均每天比原计划多加工 20 件, 那么能提早 5 天完成任务, 列出方程, 解方程即可;

(2) 根据频率估计概率即可, 设还需生产 y 件产品才能完成订单的需求, 根据题意列出不等式, 求出至少还要生产的件数即可.

【详解】(1) 解: 设工厂原计划每天加工物理实验模型的件数为 x 件, 根据题意得:

$$\frac{2000}{x} - \frac{2000}{x+20} = 5,$$

解得: $x_1 = 80$, $x_2 = -100$,

经检验 $x = 80$ 是原方程的解,

答: 工厂原计划每天加工物理实验模型的件数为 80 件;

(2) 解: 根据表格中的数据可知: 模型报废的频率稳定在 0.02,

$\therefore$ 这批物理实验模型成品的报废率约为 0.02,

设还需生产 y 件产品才能完成订单的需求, 根据题意得:

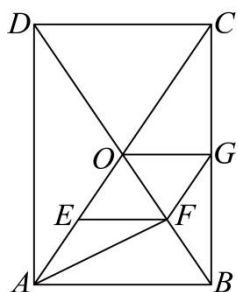
$$(1 - 0.02)y \geq 2000 \times 0.02,$$

$$\text{解得: } y \geq \frac{2000}{49},$$

$\therefore y$ 必须取整数,

$\therefore$ 至少还需生产 41 件产品才能完成订单的需求.

22. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线交于点 O , 点 E 、 F 和 G 分别是线段 OA 、 OB 和 BC 的中点.



(1) 求证: 四边形 $OEFG$ 是平行四边形;

(2) 当 $AC = 2AB$ 时, 求证: 四边形 $GCAF$ 是等腰梯形.

【答案】(1) 见解析

(2) 见解析

【分析】(1) 根据矩形的性质可得 $OA = OC$, 根据三角形中位线定理可得 $GF = \frac{1}{2}OC$, $GF \parallel OC$, 进而推出 $OE = GF$, $GF \parallel OE$, 然后根据平行四边形的判定定理可得结论;

(2) 证明 $\triangle OAB$ 是等边三角形, 求出 $\angle ACG = \angle OAF = 30^\circ$ 即可.

【详解】(1) 证明: 在矩形 $ABCD$ 中, $OA = OC$,

∵ 点 E 、 F 和 G 分别是线段 OA 、 OB 和 BC 的中点,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OA, \quad GF = \frac{1}{2}OC, \quad GF \parallel OC,$$

$$\therefore OE = GF, \quad GF \parallel OE,$$

∴ 四边形 $OEF G$ 是平行四边形;

(2) 证明: 由 (1) 知 $GF \parallel AC$,

∴ 四边形 $GCAF$ 是梯形,

∵ 在矩形 $ABCD$ 中, $OA = OC = OB = OD$, $AC = 2AB$,

$$\therefore OA = AB = OB,$$

∴ $\triangle OAB$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle OAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACG = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

∵ F 是 OB 的中点,

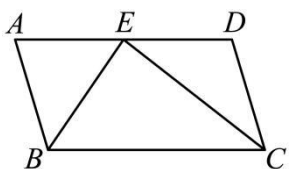
$$\therefore \angle OAF = \frac{1}{2}\angle OAB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACG = \angle OAF,$$

∴ 四边形 $GCAF$ 是等腰梯形.

【点睛】 本题考查了矩形的性质, 三角形中位线定理, 平行四边形的判定, 等边三角形的判定和性质, 等腰梯形的判定, 灵活运用相关判定定理和性质定理是解题的关键.

23. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 为 AD 中点, 把图中的线段都画成有向线段.



(1) 填空: 在这些有向线段表示的向量中, 与 $\overrightarrow{DE}$ 相等的向量是_____, 与 $\overrightarrow{DE}$ 互为相反向量的向量是_____;

(2) 在图中求作: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DE}$. (不写作法, 保留作图痕迹, 写出结论)

【答案】 (1) $\overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{ED}$ 、 $\overrightarrow{AE}$

(2) 见解析

【分析】 本题考查了向量的加减法, 相等向量、相反向量的定义, 掌握相关知识点是解题的关键.

(1) 根据两个向量模一样, 方向一样即为相等向量, 两个向量模一样, 方向相反即为相反向量进行求解即可;

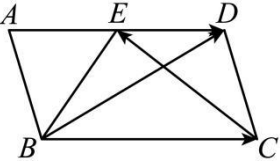
(2) 由题意得 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD}$, 则 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DE}$ 化为 $\overrightarrow{BD}$, 即可作图.

【详解】 (1) 解: ∵ 点 E 为 AD 中点,

$\therefore AE = DE$,
 $\therefore \overrightarrow{EA}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 方向相同, 且模一样
 $\therefore$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 相等的向量是 $\overrightarrow{EA}$,
 $\therefore \overrightarrow{ED}$ 、 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 方向相反, 且模一样,
 $\therefore$ 与 $\overrightarrow{DE}$ 互为相反向量的向量是 $\overrightarrow{ED}$ 、 $\overrightarrow{AE}$,

故答案为: $\overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{ED}$ 、 $\overrightarrow{AE}$;

(2) 解: 如图: $\overrightarrow{BD}$ 即为所求:



24. 如图 1, “漏刻”是我国古代一种利用水流计时的工具. 某校八年级综合实践小组用甲、乙两个透明的圆柱容器和一根装有节流阀 (控制水的流速) 的软管, 制作了类似“漏刻”的简易计时装置 (如图 2). 在甲容器里加满水, 此时水面高度为 30cm. 若由于装置的原因, 甲容器内的水无法全部流出, 当水面高度刚好是 1cm 时, 停止流水, 此时停止计时. 上午 8:00 开始放水后, 甲容器的水面高度 y (cm) 和流水时间 x (min) 的部分数据如表:

记录时间	8:00	8:10	8:25	8:30	8:40
流水时间 x (min)	0	10	25	30	40
水面高度 y (cm)	30	28	25	24	22



图1

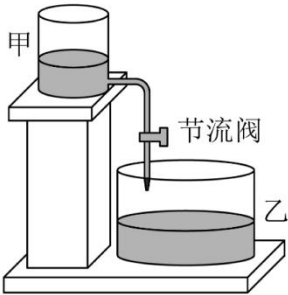


图2

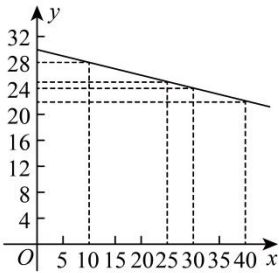


图3

(1)综合实践小组在平面直角坐标系中描出了以表中各组对应值为坐标的点, 并用光滑的曲线 (包括直线)

把描出的点连接起来（如图 3），发现可以用一次函数近似地刻画甲容器的水面高度 $y(\text{cm})$ 与流水时间 $x(\text{min})$ 的关系，根据以上信息，求 y 关于 x 的函数解析式（不用写定义域）.

(2) 当时间正好是 9:10 时，甲容器的水面高度是多少厘米？

(3) 刚好停止流水时是几时几分？

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{5}x + 30$

(2) 甲容器中水面的高度是 16 厘米

(3) 刚好停止流水时是 10:25

【分析】 本题考查了一次函数的应用，待定系数法；

(1) 设函数解析式是 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，把 $(0, 30)$ 、 $(10, 28)$ 代入解析式，即可求解；

(2) 从 8:00 到 9:10 共 70 分钟， $x = 70$ ，代入解析式，即可求解；

(3) 当 $y = 1$ 时，求出时间，即可求解；

掌握待定系数法，理解 x 、 y 表示的实际意义是解题的关键.

【详解】 (1) 解：设函数解析式是 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，

把 $(0, 30)$ 、 $(10, 28)$ 代入，

$$\text{得} \begin{cases} b = 30 \\ 10k + b = 28 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -\frac{1}{5}, \\ b = 30 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{5}x + 30;$$

(2) 解：从 8:00 到 9:10 共 70 分钟，

$$\therefore x = 70,$$

$$y = -\frac{1}{5} \times 70 + 30 = 16,$$

答：甲容器中水面的高度是 16 厘米.

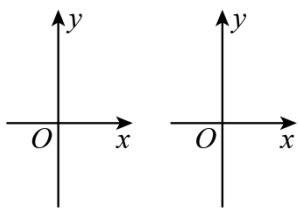
(3) 解：当 $y = 1$ 时，

$$1 = -\frac{1}{5}x + 30,$$

解得： $x = 145$ ，

答：刚好停止流水时是 10:25.

25. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 直线 $y = \frac{3}{4}x + 6$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B , 点 C 在线段 AB 上.



(备用图)

(1) 求点 A 和点 B 的坐标;

(2) 当点 C 的横坐标是 -4 时, 如果在 y 轴上存在点 P , 使得 $S_{CBP} = 4$, 求点 P 的坐标;

(3) 当点 C 的横坐标是 m 时, 在平面直角坐标系中存在点 Q , 使得以 O 、 C 、 B 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形, 求点 Q 的坐标. (用含 m 的代数式表示)

【答案】 (1) $A(-8, 0)$ 、 $B(0, 6)$

(2) 点 $P(0, 4)$ 或 $(0, 8)$

(3) $Q\left(-m, -\frac{3}{4}m\right)$ 或 $\left(m, \frac{3}{4}m\right)$ 或 $\left(m, \frac{3}{4}m + 12\right)$

【分析】 本题为一次函数综合运用, 涉及到平行四边形的性质、面积的计算等, 分类求解是解题的关键.

(1) 对于 $y = \frac{3}{4}x + 6$, 当 $x = 0$ 时, $y = 6$, 令 $y = \frac{3}{4}x + 6 = 0$, 则 $x = -8$, 即可求解;

(2) 由 $S_{CBP} = 4 = \frac{1}{2} \times BP \times |x_C| = \frac{1}{2} \times |6 - y| \times 4$, 即可求解;

(3) 当 OB 为对角线时, 由中点坐标公式列出方程组, 即可求解; 当 OC 或 OQ 为对角线时, 同理可解.

【详解】 (1) 解: 对于 $y = \frac{3}{4}x + 6$, 当 $x = 0$ 时, $y = 6$,

令 $y = \frac{3}{4}x + 6 = 0$, 则 $x = -8$,

即点 A, B 的坐标分别为: $(-8, 0), (0, 6)$;

(2) 设点 $P(0, y)$,

则 $S_{CBP} = 4 = \frac{1}{2} \times BP \times |x_C| = \frac{1}{2} \times |6 - y| \times 4$,

解得: $y = 4$ 或 8 ,

即点 $P(0, 4)$ 或 $(0, 8)$;

(3) 设点 $C\left(m, \frac{3}{4}m + 6\right)$, 点 $Q(s, t)$,

当 OB 为对角线时,

由中点坐标公式得:
$$\begin{cases} 0 = s + m \\ 6 = t + \frac{3}{4}m + 6 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} s = -m \\ t = -\frac{3}{4}m \end{cases}$$

则点 $Q\left(-m, -\frac{3}{4}m\right)$;

当 OC 或 OQ 为对角线时,

同理可得:
$$\begin{cases} m = s \\ \frac{3}{4}m + 6 = t + 6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} s = m \\ t = \frac{3}{4}m + 6 + 6 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} s = m \\ t = \frac{3}{4}m \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} s = m \\ t = \frac{3}{4}m + 12 \end{cases}$$

即点 $Q\left(m, \frac{3}{4}m\right)$ 或 $\left(m, \frac{3}{4}m + 12\right)$;

综上, $Q\left(-m, -\frac{3}{4}m\right)$ 或 $\left(m, \frac{3}{4}m\right)$ 或 $\left(m, \frac{3}{4}m + 12\right)$.

26. 已知四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = 4$, $\angle EAF$ 的两边分别与射线 CB 、射线 DC 交于点 E 、 F , 点 E 与点 C 、点 B 不重合, $\angle EAF = 60^\circ$.

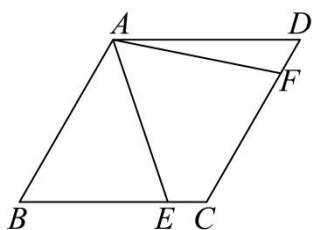


图1

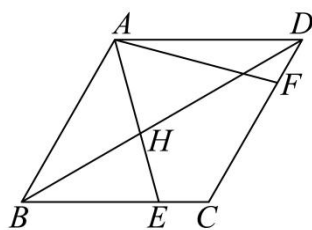
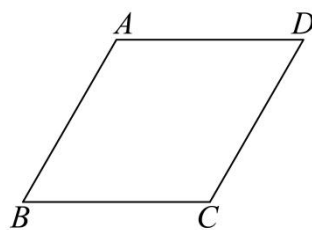


图2



备用图

(1) 当点 E 在线段 CB 上时,

① 如图 1, 求证: $BE = CF$;

② 连接 BD 交 AE 于点 H , 当 $BE = BH$ 时, 求 BE 的长.

(2) 当 $\angle BAE = 15^\circ$ 时, 求 BE 的长. (直接写出答案)

【答案】 (1) ① 见解析, ② $BE = 4\sqrt{3} - 4$

(2) $BE = 8 - 4\sqrt{3}$ 或 $BE = 2\sqrt{3} - 2$

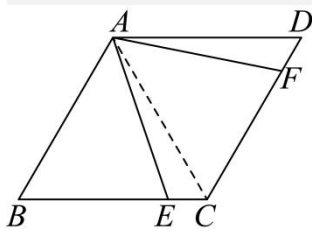
【分析】 (1) ① 连接 AC , 利用菱形的性质, 证明 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 得到 $AB = AC$, 进而证明 $\triangle BAE \cong \triangle CAF$ (ASA), 利用全等三角形性质即可证明 $BE = CF$;

② 连接 AC 交 BD 于点 G , 利用菱形的性质和等边三角形性质得到 $AD = AB = AC = 4$, 利用勾股定理得到

$BD = 2BG = 2\sqrt{AB^2 - AG^2}$ ，证明 $\angle DAH = \angle DHA$ ，利用等腰三角形性质得到 $DH = AD = 4$ ，最后根据 $BE = BH = BD - DH$ 求解，即可解题；

(2) 根据与射线 CB 交于点 E ，分以下两种情况讨论，①当 E 在线段 CB 上时，作 $AM \perp BC$ 于点 M ，作 $EN \perp AB$ 于点 N ，②当 E 在 CB 延长线上时，作 $AO \perp BC$ 于点 O ，以上两种情况分别结合勾股定理和直角三角形性质，以及角平分线性质求解，即可解题。

【详解】(1) ①证明：连接 AC ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $\angle BAD = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle CAD = \angle B = \angle ACD = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore AB = AC$ ，

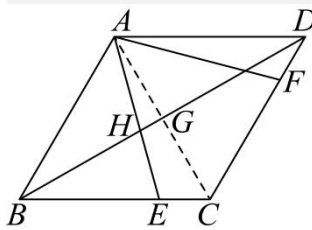
$\therefore \angle EAF = 60^\circ = \angle BAC$ ，

$\therefore \angle EAF - \angle EAC = \angle BAC - \angle EAC$ ，即 $\angle BAE = \angle CAF$ ，

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CAF$ (ASA)，

$\therefore BE = CF$ 。

②解：连接 AC 交 BD 于点 G ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC \perp BD$ 于点 G ，

$\because AB = 4$ ，

$\therefore AD = AB = AC = 4$ ，

$\therefore AG = 2$ ，

$\therefore BD = 2BG = 2\sqrt{AB^2 - AG^2} = 4\sqrt{3}$ ，

$\therefore BE = BH$ ，

$\therefore \angle AEH = \angle BHE$ ，

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAH = \angle BEH,$$

$$\because \angle DHA = \angle BHE,$$

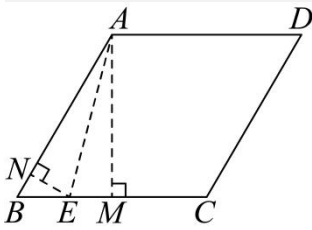
$$\therefore \angle DAH = \angle DHA,$$

$$\therefore DH = AD = 4,$$

$$\therefore BE = BH = BD - DH = 4\sqrt{3} - 4.$$

(2) 解: ①当 E 在线段 CB 上时,

作 $AM \perp BC$ 于点 M , 作 $EN \perp AB$ 于点 N ,



$$\because \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM = 30^\circ,$$

$$\because \angle BAE = 15^\circ,$$

$$\therefore AE \text{ 平分 } \angle BAM,$$

$$\therefore NE = ME,$$

$$\because AE = AE, \quad \angle AME = \angle ANE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEN \cong \triangle AEM (HL),$$

$$\because AB = 4,$$

$$\therefore BM = 2, \quad AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AN = AM = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BN = 4 - 2\sqrt{3},$$

设 $BE = x$, 则 $NE = ME = 2 - x$,

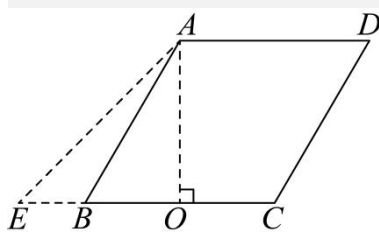
$$\because BN^2 + NE^2 = BE^2$$

$$\therefore (4 - 2\sqrt{3})^2 + (2 - x)^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = 8 - 4\sqrt{3},$$

$$\therefore BE = 8 - 4\sqrt{3};$$

②当 E 在 CB 延长线上时, 作 $AO \perp BC$ 于点 O ,



$$\therefore \angle ABO = 60^\circ, \quad \angle BAE = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle E = \angle ABO - \angle BAE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = 30^\circ, \quad \angle EAO = 45^\circ = \angle E,$$

由①同理可知, $BO = 2$, $AO = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore EO = AO = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BE = EO - BO = 2\sqrt{3} - 2.$$

【点睛】 本题考查了菱形的性质, 等边三角形性质和判定, 全等三角形性质和判定, 等腰三角形性质和判定, 勾股定理, 直角三角形性质, 角平分线性质, 解题的关键在于熟练掌握相关性质定理并灵活运用.