

2024 学年度第二学期八年级数学期末质量检测

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列四个函数中属于一次函数的是 ()

A. $y = \frac{1}{x} (x \neq 0)$

B. $y = \frac{1}{2} + x$

C. $y = x^2 + 1$

D. $y = 1$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数的定义, 掌握定义是解题关键. 即一般地, 形如 $y = kx + b (k \neq 0)$, k, b 为常数, 则 y 是 x 的一次函数, 由一次函数的定义可得答案.

【详解】 解: A、 $y = \frac{1}{x}$ 不是一次函数, 故不符合题意;

B、 $y = \frac{1}{2} + x$ 是一次函数, 故符合题意;

C、 $y = x^2 + 1$ 不是一次函数, 故不符合题意;

D、 $y = 1$ 不是一次函数, 故不符合题意;

故选: B.

2. 已知一次函数 $y = (3 - a)x + 1$, 如果 y 随 x 的增大而减小, 则 a 的取值范围是 ()

A. $a > 3$

B. $a \geq 3$

C. $a < 3$

D. $a \leq 3$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质, 当 $k < 0$ 时, 函数值 y 随 x 的增大而减小. y 随 x 的增大而减小需满足 $3 - a < 0$, 从而确定 a 的取值范围.

【详解】 解: $\because y = (3 - a)x + 1$, y 随 x 的增大而减小.

$$\therefore 3 - a < 0,$$

$$\therefore a > 3,$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } a > 3.$$

故选: A.

3. 关于向量, 下列表述正确的是 ()

A. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么 $a = \pm b$

B. 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反, 则 $\vec{a} = -\vec{b}$

C. $\vec{a} - \vec{a} = 0$

D. 如果 $\vec{a} = -\vec{b}$, 则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平面向量的定义与性质，熟练掌握平面向量的定义与性质是解本题的关键.

根据向量的定义与性质，逐一对选项判断即可.

【详解】解：A、两个向量的模相等，不能保证方向相同，故本选项不符合题意；

B、两个向量方向相反，且模长相等时，才是相反向量，故本选项不符合题意；

C、向量相减的结果是向量，而不是数 0，故本选项不符合题意；

D、根据相反向量的定义：如果 $\vec{a} = -\vec{b}$, 则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 故本选项符合题意.

故选 D.

4. 下列事件为确定事件的是 ()

A. 上海的太阳明天从西边升起

B. 任意两个非零实数的积为正数

C. 掷一枚骰子，落地后数字 6 的一面向上

D. 买一张彩票中奖了

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查事件的类型. 抓住“必然事件和不可能事件统称确定事件”是解题关键.

根据确定事件的定义，逐一分析判断，即可解答.

【详解】解：A、上海的太阳明天从西边升起是不可能事件，符合题意；

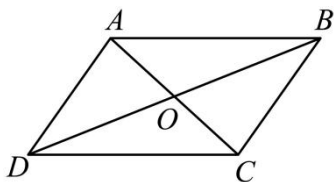
B、任意两个非零实数的积为正数是随机事件，不符合题意；

C、掷一枚骰子，落地后数字 6 的一面向上是随机事件，不符合题意；

D、买一张彩票中奖是随机事件，不符合题意.

故选：A.

5. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，下列哪个条件不能判定平行四边形 $ABCD$ 是矩形的是 ()



- A. $\angle ABC = 90^\circ$ B. $OA = OB$ C. $AC \perp BD$ D. $AC = BD$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质、矩形的判定定理对各项进行判断分析即可.

【详解】A. $\angle ABC = 90^\circ$, 有一个角为直角的平行四边形是矩形, 不符合题意;

B. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC, OB = \frac{1}{2}BD,$$

$$\because OA = OB,$$

$$\therefore AC = BD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

对角线相等的平行四边形是矩形, 不符合题意;

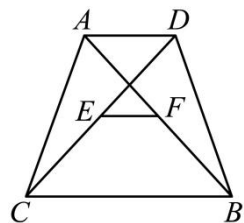
C. $AC \perp BD$ 可判定平行四边形 $ABCD$ 为菱形, 符合题意;

D. $AC = BD$, 对角线相等的平行四边形是矩形, 不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查了矩形的判定问题, 掌握平行四边形的性质、矩形的判定定理是解题的关键.

6. 已知, 如图, $AD \parallel CB$, 点 E 、 F 分别为 CD , AB 的中点, 连接 EF , 设 $AD = a$, $CB = b$, $EF = c$, 且 $a < b$, 则下列等式一定成立的是 ()



- A. $2c = b - a$ B. $2c = a + b$ C. $a + c = b$ D. $c^2 = a^2 + b^2$

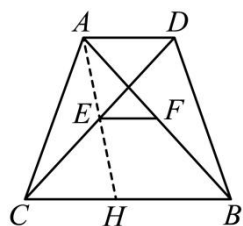
【答案】A

【解析】

【分析】此题重点考查平行线的性质、全等三角形的判定与性质、三角形中位线定理等知识. 连接并延长 AE 交 BC 于点 H , 由 $AD \parallel BC$, 得 $\angle DAE = \angle CHE$, 而 $\angle AED = \angle HEC$, $DE = CE$, 即可根据 AAS 证明

$\triangle AED \cong \triangle HEC$ ，得 $AD = HC = a$ ， $AE = HE$ ，因为 $CB = b$ ， $EF = c$ ，所以 $HB = b - a$ ，由三角形中位线定理得 $2EF = HB$ ，则 $2c = b - a$ ，于是得到问题的答案.

【详解】解：连接并延长 AE 交 BC 于点 H ，



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAE = \angle CHE$,

$\because$ 点 E 为 CD 的中点,

$\therefore DE = CE$,

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle HEC$ 中,
$$\begin{cases} \angle AED = \angle HEC \\ \angle DAE = \angle CHE, \\ DE = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle HEC$ (AAS),

$\therefore AD = HC = a$, $AE = HE$,

$\because CB = b$,

$\therefore HB = CB - HC = b - a$,

$\because$ 点 E 为 AH 的中点, 点 F 为 AB 的中点, $EF = c$,

$\therefore 2EF = HB$,

$\therefore 2c = b - a$,

故选: A.

二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. 一次函数 $y = -x + 3$ 的截距是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查一次函数与坐标轴的交点, 解题的关键是掌握截距的定义: 直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 与 y 轴相交于点 $(0, b)$, b 叫做 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 在 y 轴上的截距, 简称截距.

【详解】 解: 一次函数 $y = -x + 3$ 的截距是 3.

故答案为：3.

8. 一次函数 $y = 2x + (m - 3)$ 的图像经过点 $(1, 0)$ ，则 m 的值为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 将点 $(1, 0)$ 代入函数表达式即可.

【详解】 $\because$ 一次函数 $y = 2x + (m - 3)$ 的图象经过点 $(1, 0)$,

$$\therefore 0 = 2 \times 1 + (m - 3),$$

解得 $m = 1$,

故答案为：1.

9. 方程 $2x^3 + 16 = 0$ 的解是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了求立方根，解题的关键是通过移项、系数化为1等步骤将方程转化为 $x^3 = a$ 的形式，再根据立方根的定义求出方程的解.

先将常数项移到等号右边，再把未知数的系数化为1，得到 x^3 的值，最后根据立方根的定义求出 x 的值.

【详解】 解： $2x^3 + 16 = 0$

移项得： $2x^3 = -16$

系数化为1得： $x^3 = -8$

两边开立方得： $x = \sqrt[3]{-8} = -2$

故答案为：-2.

10. 方程 $\sqrt{x+2} = x$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 先把方程两边平方，使原方程化为整式方程 $x + 2 = x^2$ ，解此一元二次方程得到 $x_1 = 2$ ， $x_2 = -1$ ，结合二次根式的性质，去掉增根，即可得到答案.

【详解】 方程两边平方得： $x + 2 = x^2$

$$\therefore x_1 = 2, \quad x_2 = -1$$

$$\because \sqrt{x+2} \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{x+2} = x \geq 0$$

$\therefore x_2 = -1$ 不符合题意，故舍去

$\therefore$ 原方程的根为 $x = 2$

故答案为： $x = 2$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程、二次根式的知识；解题的关键是熟练掌握一元二次方程、二次根式的性质，从而完成求解.

11. 用换元法解方程 $\frac{2x^2}{1-x^2} - \frac{1-x^2}{x^2} = 1$, 如果假设 $\frac{x^2}{1-x^2} = y$, 则原方程可以化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $2y^2 - y - 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程，掌握换元法解分式方程的方法是解答的关键. 根据题意可得 $\frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1}{y}$,

则有 $2y - \frac{1}{y} = 1$, 进而去分母化为整式方程即可.

【详解】 解： 设 $\frac{x^2}{1-x^2} = y$, 则 $\frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1}{y}$,

$$\therefore \text{原方程化为 } 2y - \frac{1}{y} = 1,$$

去分母，得 $2y^2 - 1 = y$,

整理，得 $2y^2 - y - 1 = 0$.

故答案为： $2y^2 - y - 1 = 0$.

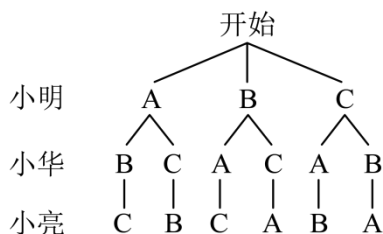
12. 粗心的小明、小华和小亮都没有在数学作业本上写名字，当课代表随机将他们的三本作业本发给他们时，他们恰好都能拿到自己那本作业本的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 本题考查用列表法或树状图求概率，画出满足题意的列表或树状图，并灵活应用概率公式求解是解题的关键。画出树状图，然后分析得出满足题意的可能结果，由概率公式列式计算即可。

【详解】 解：小明、小华和小亮的数学作业本分别用 A 、 B 、 C 表示，画树状图如图：



共有 6 种等可能的结果，其中恰好都能拿到自己那本作业本有 1 种，

$\therefore$ 恰好都能拿到自己那本作业本的概率为 $\frac{1}{6}$ 。

故答案为： $\frac{1}{6}$ 。

13. 一个多边形的内角和等于它的外角和的 2 倍，则这个多边形的边数是_____。

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的内角和定理与外角和定理，根据多边形的内角和定理与外角和公式列出方程，然后解方程即可。

【详解】 解：设多边形的边数是 n ，

根据题意得， $(n-2) \cdot 180^\circ = 2 \times 360^\circ$ ，

解得 $n = 6$ 。

故答案为： 6。

14. 在边长为 13 的菱形中有一条对角线长为 24，则另一条对角线长度为_____。

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质及勾股定理的应用，解题的关键是掌握菱形的对角线互相垂直且平分，将菱形的问题转化为直角三角形的问题求解。

菱形的对角线互相垂直平分，已知菱形边长和一条对角线长，先求出该对角线一半的长度，再结合菱形边长在直角三角形中利用勾股定理求出另一条对角线一半的长度，进而得到另一条对角线的全长。

【详解】 解：设菱形为 $ABCD$ ，对角线 $AC = 24$ ， BD 为另一条对角线，交点为 O 。

$\therefore$ 菱形的对角线互相垂直且平分，

$$\therefore AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 24 = 12, BO = \frac{1}{2}BD, \text{ 且 } \angle AOB = 90^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, 由勾股定理得: $AO^2 + BO^2 = AB^2$.

已知菱形边长 $AB = 13$, 则 $12^2 + BO^2 = 13^2$,

$$\text{即 } 144 + BO^2 = 169,$$

$$BO^2 = 169 - 144 = 25,$$

解得 $BO = 5$.

$$\therefore \text{另一条对角线 } BD = 2BO = 2 \times 5 = 10.$$

故答案为: 10.

15. 如果一个等腰梯形的一个底角为 120° , 上底长为 3, 下底长为 5, 则其腰长为_____.

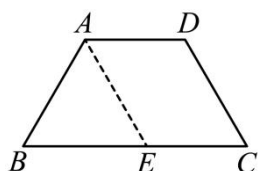
【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形性质和判定, 等腰梯形性质, 等边三角形性质和判定, 解题的关键在于熟练掌握相关知识.

过点 A 作 $AE \parallel DC$, 交 BC 于 E , 证明四边形 $AECD$ 为平行四边形, 结合平行四边形性质推出 $BE, AB = AE$, 再证明 $\triangle ABE$ 为等边三角形, 利用等边三角形性质进行分析, 即可解题.

【详解】解: 如图, 过点 A 作 $AE \parallel DC$, 交 BC 于 E ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, 等腰梯形的一个底角为 120° ,

$$\therefore AD \parallel BC, AB = CD,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore AE \parallel DC, AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 为平行四边形,

$$\therefore EC = AD = 3, AE = CD,$$

$$\therefore BE = BC - EC = 5 - 3 = 2, AB = AE,$$

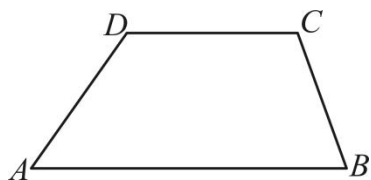
$$\therefore AB = AE, \angle B = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABE$ 为等边三角形,

$$\therefore AB = BE = 2, \text{ 即等腰梯形的腰长为 } 2,$$

故答案为: 2.

16. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle C = 2\angle A$, $CD = 6$, $BC = 5$, 则 $AB =$ _____.



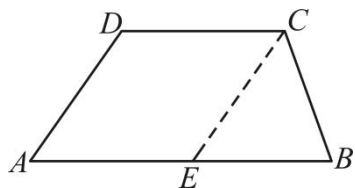
【答案】 11

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形性质, 等腰三角形性质, 解题的关键在于作辅助线构造平行四边形.

作 $CE \parallel AD$ 交 AB 于点 E , 证明四边形 $AECD$ 是平行四边形, 结合平行四边形性质推出 $AE = CD = 6$, $\angle BEC = \angle BCE$, 进而得到 $BE = BC = 5$, 再根据 $AB = AE + BE$ 求解, 即可解题.

【详解】 解: 作 $CE \parallel AD$ 交 AB 于点 E , 则 $\angle BEC = \angle A$,



$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \text{四边形 } AECD \text{ 是平行四边形, } \angle BEC = \angle DCE,$$

$$\therefore CD = 6,$$

$$\therefore AE = CD = 6, \angle A = \angle DCE,$$

$$\therefore \angle BCD = 2\angle A,$$

$$\therefore \angle BCD = 2\angle DCE = \angle DCE + \angle BCE,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle BCE,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle BCE,$$

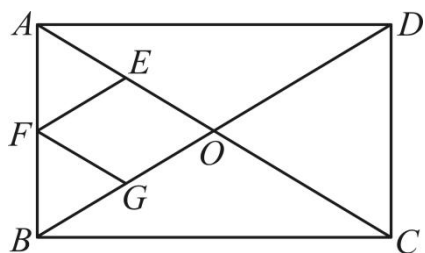
$$\therefore BC = 5,$$

$$\therefore BE = BC = 5,$$

$$\therefore AB = AE + BE = 6 + 5 = 11;$$

故答案为: 11.

17. 如图, 矩形 $ABCD$ 对角线相交于点 O , AC 与 BD 的夹角为 60° , 点 E 、 F 、 G 分别为 AO 、 AB 、 BO 中点, 当四边形 $EFGO$ 周长为 8 时, 则矩形 $ABCD$ 的面积是_____.



【答案】 $16\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 由矩形的性质可证 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 可得 $AO = BO = AB$, 由三角形中位线定理可得 $EF = \frac{1}{2}BO = BG = GO$, $FG = \frac{1}{2}AO = AE = EO$, 可求 $EO = GO = 2$, 由勾股定理可求 BC 的长, 即可求解.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AC = BD, AO = CO = BO = DO,$$

$$\because \angle AOB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,

$$\therefore AO = BO = AB,$$

$\because$ 点 E 、 F 、 G 分别为 AO 、 AB 、 BO 中点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BO = BG = GO, FG = \frac{1}{2}AO = AE = EO,$$

$$\therefore EF = GO = EO = GF,$$

$\because$ 四边形 $EFGO$ 周长为 8

$$\therefore EO = GO = 2,$$

$$\therefore AO = AB = BO = CO = 4,$$

$$\therefore AC = 8,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 4\sqrt{3},$$

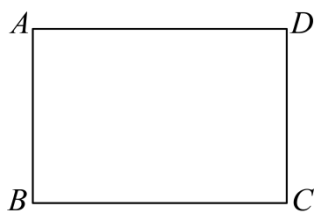
$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 的面积} = AB \cdot BC = 16\sqrt{3},$$

故答案为 $16\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了矩形的性质, 等边三角形的性质, 三角形中位线定理, 勾股定理等知识, 灵活运用这

些性质是解题的关键.

18. 如图, 矩形 $ABCD$, $AB = 5$, $BC = 7$, 点 F 在边 BC 上, 沿直线 AF 翻折 $\triangle ABF$, 点 B 落在点 E 处, 当点 E 恰好在 $\angle ADC$ 的角平分线上, 则 $BF =$ _____.



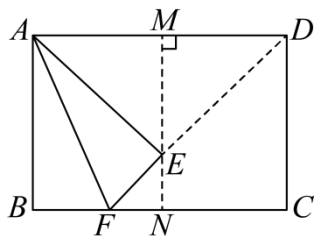
【答案】 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$.

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质、翻折变换 (折叠问题)、角平分线的性质以及勾股定理的综合应用, 解题的关键是利用折叠的性质得到对应边相等, 结合角平分线的性质构造直角三角形, 通过勾股定理列方程求解.

过点 E 作垂线构造矩形和等腰直角三角形, 利用角平分线性质的性质设出相关线段长度; 根据折叠性质得到 $AE = AB$, 在直角三角形 AME 中用勾股定理求出 EM 的可能值; 再针对不同的 EM 值, 结合折叠后 $EF = BF$, 在直角三角形 ENF 中再次利用勾股定理列方程, 求出 BF 的长度.

【详解】 解: 如图, 连接 ED , 过点 E 作 $EM \perp AD$ 于点 M , 延长 ME 交 BC 于点 N ,



$$\therefore \angle AMN = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 是矩形,

$$\therefore \angle B = \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ, AD = BC = 7,$$

$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 是矩形,

$$\therefore AM = BN, MN = AB = 5, \angle AME = \angle DME = \angle ENF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 E 恰好在 $\angle ADC$ 的角平分线上,

$$\therefore \angle ADE = \angle CDE = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle DME$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \text{设 } DM = EM = x, \text{ 则 } AM = 7 - x,$$

由折叠的性质得: $AB = AE = 5$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AME$ 中, 由勾股定理得: $AM^2 = AE^2 - EM^2$,

$$\text{即 } (7-x)^2 = 5^2 - x^2,$$

解得: $x_1 = 3, x_2 = 4$,

当 $DM = EM = 3$ 时, $AM = BN = AD - DM = 7 - 3 = 4, EN = MN - EM = 5 - 3 = 2$,

由折叠的性质得: $BF = EF$,

设 $BF = EF = y$, 则 $FN = BN - BF = 4 - y$,

在 $\text{Rt}\triangle ENF$ 中, 由勾股定理得: $FN^2 + EN^2 = EF^2$,

$$\text{即 } (4-y)^2 + 2^2 = y^2,$$

解得: $y = \frac{5}{2}$,

当 $DM = EM = 4$ 时, $AM = BN = AD - DM = 7 - 4 = 3, EN = MN - EM = 5 - 4 = 1$,

由折叠的性质得: $BF = EF$,

设 $BF = EF = y$, 则 $FN = BN - BF = 3 - y$,

在 $\text{Rt}\triangle ENF$ 中, 由勾股定理得: $FN^2 + EN^2 = EF^2$,

$$\text{即 } (3-y)^2 + 1^2 = y^2,$$

解得: $y = \frac{5}{3}$,

$$\therefore BF = \frac{5}{2} \text{ 或 } BF = \frac{5}{3},$$

故答案为: $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$.

三、简答题 (19-21 题, 每题 6 分, 22-23 题每题 7 分, 共 32 分)

19. 解方程: $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} = 1$.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查分式方程 (化为一元二次) 的解法, 掌握解分式方程的步骤和方法是正确解答的关键. 根据分式方程的解法求解即可, 注意不要忘记检验.

【详解】解：去分母得， $2x - (x - 1) = x^2 - 1$ ，

去括号得， $2x - x + 1 = x^2 - 1$ ，

移项得， $x^2 - x - 2 = 0$ ，

解得， $x_1 = -1$ ， $x_2 = 2$ ，

经检验： $x_1 = -1$ 是增根，舍去， $x_2 = 2$ 是原方程的解，

所以原方程的解为： $x = 2$ ．

20. 解方程组：
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 - xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{2}{3} \\ y_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

【解析】

【分析】本题考查了二元二次方程组的解法，解题的关键是将二次方程进行因式分解，转化为两个一次方程，再与第一个一次方程组成新的方程组求解．

先对第二个方程进行因式分解，得到两个一次方程；再将这两个一次方程分别与第一个方程联立，组成两个新的二元一次方程组；最后解这两个方程组，得到原方程组的解．

【详解】解：
$$\begin{cases} x - y = 1 \text{①} \\ x^2 - xy - 6y^2 = 0 \text{②} \end{cases}$$

由②，得 $(x - 3y)(x + 2y) = 0$ ，

$\therefore x - 3y = 0$ 或 $x + 2y = 0$ ．

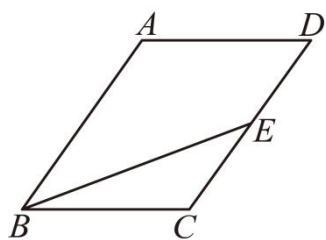
即 $x = 3y$ 或 $x = -2y$ ．

把 $x = 3y$ 代入①，得 $y = \frac{1}{2}$ ，此时 $x = \frac{3}{2}$ ；

把 $x = -2y$ 代入①，得 $y = -\frac{1}{3}$ ，此时 $x = \frac{2}{3}$ ．

$\therefore$ 原方程组的解为：
$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{2}{3} \\ y_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

21. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 为 CD 中点, 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.



(1) 用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示下列向量: $\overrightarrow{AE}$ = _____, $\overrightarrow{BE}$ = _____;

(2) 求作: $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. (画图并写出结论, 不必写作法)

【答案】 (1) $\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查基本作图、平面向量、平行四边形的判定与性质, 熟练掌握三角形法则是解答的关键.

(1) 先根据平行四边形的性质以及平面向量的定义得到 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 进而由线段中点定义得到 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a}$, 然后利用三角形法则求解即可;

(2) 以 E 为圆心, BC 长为半径画弧, 再以 C 为圆心, BE 为长半径画弧, 两弧相交于点 F , 则四边形 $BCFE$ 是平行四边形, 连接 BF , 则 $\overrightarrow{BF}$ 即为所求作.

【小问 1 详解】

解: 连接 AE ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

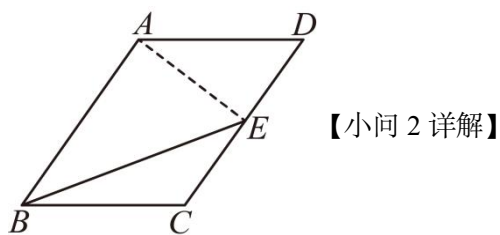
$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$\because$ 点 E 为 CD 中点,

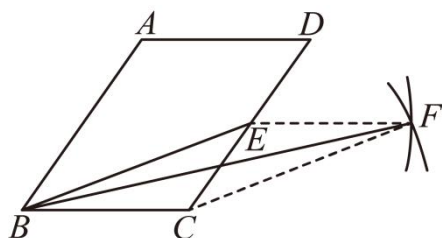
$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a},$$

故答案为: $\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$;



解：如图， $\overline{BF}$ 即为所求作.



作图理由：

$$\because EF = BC, \quad BE = CF,$$

$\therefore$ 四边形 $BCFE$ 是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}, \quad \text{又 } AE - AB = BE,$$

$$\therefore AE - AB + BC = BE + EF = BF,$$

故 $\overline{BF}$ 即为所求作.

22. 某初中数学小组开展综合实践活动，对某食品工厂所生产、销售的某种食品进行调研.

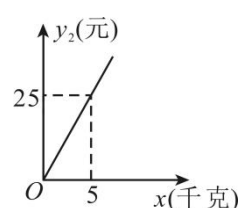
A 小组调研获知：

工厂每月生产成本 y_1 （元）与产量 x （千克）之间是一次函数，且部分对应数据如下表.

x	5	10	15
y_1	1015	1030	1045

B 小组通过调研获知：

该食品每月的销售收入 y_2 （元）与产量 x （千克）之间满足如图所示的函数关系.



根据以上信息回答

(1) 分别求出 y_1 ， y_2 与 x 的函数关系式（不用写定义域）；

(2) 请测算一下，当产量满足什么条件时，该厂开始盈利？

【答案】(1) $y_1 = 3x + 1000$ ， $y_2 = 5x$

(2) 产量 $x > 500$ 时，该厂开始盈利.

【解析】

【分析】 本题考查待定系数法求一次函数解析式，求正比例函数解析式，一元一次不等式的运用，解题的关键在于求出 y_1 ， y_2 与 x 的函数关系式.

(1) 分别设 y_1 与 x 的函数关系式为 $y_1 = kx + b$ ， y_2 与 x 的函数关系式 $y_2 = mx$ ，结合表格与图象中数据，利用待定系数法求解，即可解题；

(2) 根据要使该厂开始盈利，即每月的销售收入 y_2 大于每月生产成本 y_1 ，据此建立不等式求解，即可解题.

【小问 1 详解】

解： 设 y_1 与 x 的函数关系式为 $y_1 = kx + b$ ，

由表格数据可知
$$\begin{cases} 5k + b = 1015 \\ 10k + b = 1030 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} k = 3 \\ b = 1000 \end{cases}$$

$\therefore y_1$ 与 x 的函数关系式为 $y_1 = 3x + 1000$ ；

设 y_2 与 x 的函数关系式 $y_2 = mx$ ，

由图象可知 $y_2 = mx$ 过点 $(5, 25)$ ，

$\therefore 5m = 25$ ，解得 $m = 5$ ，

$\therefore y_2$ 与 x 的函数关系式 $y_2 = 5x$ ；

【小问 2 详解】

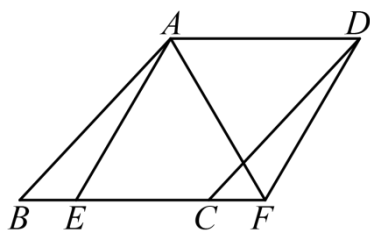
解： 要使该厂开始盈利，即每月的销售收入 y_2 大于每月生产成本 y_1 ，

当 $y_2 - y_1 > 0$ 时，得 $5x - (3x + 1000) > 0$ ，

解得 $x > 500$ ，

$\therefore$ 产量 $x > 500$ 时，该厂开始盈利.

23. 已知：如图，平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在边 BC 上，点 F 在线段 BC 延长线上，且 $BE = CF$ ， AF 平分 $\angle EAD$ ，求证：四边形 $AEFD$ 为菱形.



【答案】见解析

【解析】

【分析】利用平行四边形性质证明 $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ ，结合全等三角形性质推出四边形 $AEFD$ 是平行四边形，再利用角平分线定义和等腰三角形性质推出 $AE = EF$ ，即可证明四边形 $AEFD$ 为菱形.

【详解】证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle B = \angle DCF,$$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle DCF$ 中，

$$\begin{cases} AB = DC \\ \angle B = \angle DCF, \\ BE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AE = DF, \angle AEB = \angle DFC,$$

$$\therefore AE \parallel DF,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel EF,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle AFE,$$

$\because AF$ 平分 $\angle EAD$,

$$\therefore \angle DAF = \angle EAF,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle EAF,$$

$$\therefore AE = EF,$$

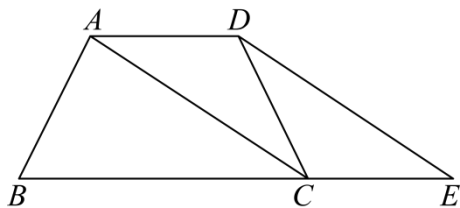
$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 为菱形.

【点睛】本题考查了平行四边形性质和判定，全等三角形性质和判定，角平分线定义，等腰三角形性质，菱形的判定，解题的关键在于熟练掌握相关知识.

四、解答题 (24、25 题每题 8 分，26 题 10 分，共 26 分)

24. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， CA 平分 $\angle BCD$ ，过点 D 作 DE 平行 AC 交线段 BC 延

长线于点 E ， $\angle B = 2\angle E$ 。



- (1) 求证：梯形 $ABCD$ 为等腰梯形；
(2) 当 $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 8$ ，求四边形 $ABED$ 的面积。

【答案】(1) 证明见解析；

(2) $64\sqrt{3}$ 。

【解析】

【分析】本题考查了等腰梯形的判定，平行线的性质，勾股定理，等腰三角形的判定和性质，掌握知识点的应用是解题的关键。

(1) 根据平行线的性质得到 $\angle ACB = \angle E$ ，根据角平分线的定义得到 $\angle BCD = 2\angle ACB$ ，得到 $\angle B = \angle BCD$ ，根据等腰梯形的概念证明；

(2) 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于 F ，根据平行四边形的性质求出 CE ，根据直角三角形的性质求出 AF ，根据梯形面积公式计算，得到答案。

【小问 1 详解】

证明： $\because DE \parallel AC$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle E$ ，

$\because CA$ 平分 $\angle BCD$ ，

$\therefore \angle BCD = 2\angle ACB$

$\therefore \angle BCD = 2\angle E$ ，

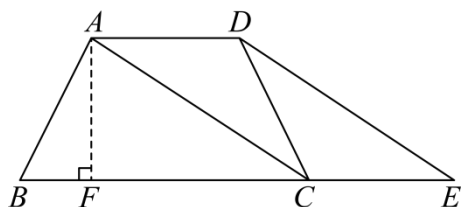
$\therefore \angle B = 2\angle E$ ，

$\therefore \angle B = \angle BCD$ ，

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 为等腰梯形；

【小问 2 详解】

解：如图，过点 A 作 $AF \perp BC$ 于 F ，



$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DAC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DCA,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA,$$

$$\therefore AD = DC = AB = 8,$$

$$\therefore DE \parallel AC, \quad AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 为平行四边形,

$$\therefore CE = AD = 8,$$

$$\therefore \angle B = 2\angle ACB, \quad \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = 2AB = 16,$$

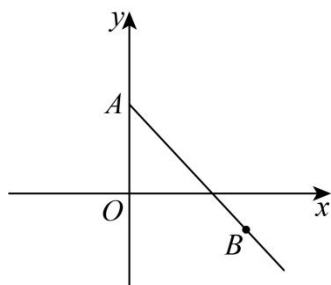
$$\therefore BE = BC + CE = 16 + 8 = 24,$$

$$\text{由勾股定理得 } AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{16^2 - 8^2} = 8\sqrt{3},$$

$$\therefore AF = \frac{1}{2}AC = 4\sqrt{3},$$

$$\text{则 } S_{\text{梯形}ABED} = \frac{1}{2} \times (8 + 24) \times 4\sqrt{3} = 64\sqrt{3}.$$

25. 已知: 如图, 点 A 坐标为 $(0, 4)$, 点 B 在双曲线 $y = -\frac{8}{x} (x > 0)$ 的图象上.



(1) 当 $\triangle AOB$ 面积为 12 时, 求点 B 的坐标;

(2) 点 C 在 y 轴负半轴, 点 D 在线段 BO 的延长线上, 当四边形 $ABCD$ 为矩形时, 求直线 AB 解析式.

【答案】 (1) $B\left(6, -\frac{4}{3}\right)$

(2) $y = -(\sqrt{2} + 1)x + 4$

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数与一次函数综合问题.

(1) 设点 B 的横坐标为 m , 根据 $\triangle AOB$ 面积为 12 可得 m 的值, 根据点 B 在反比例函数的图象上即可求解.

(2) 由矩形性质可知 $OA = OB = 4$, 设 $OE = n$, 则 $BE = \frac{8}{n}$, 根据勾股定理可得 n 的值和点 B 的坐标,

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + 4$, 代入点 B 的坐标即可求解.

【小问 1 详解】

解: 设点 B 的横坐标为 m , 根据题意得: $\frac{1}{2} \times 4 \times m = 12$,

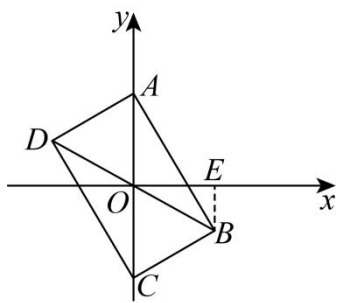
解得 $m = 6$,

当 $x = 6$ 时, $y = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$,

$\therefore B\left(6, -\frac{4}{3}\right)$;

【小问 2 详解】

解: 如图所示, 四边形 $ABCD$ 为矩形,



由矩形性质可知: $OA = OB = 4$,

设 $OE = n$, 则 $BE = \frac{8}{n}$,

由勾股定理可得 $n^2 + \frac{64}{n^2} = 16$,

解得 $n = 2\sqrt{2}$ (已舍去负值),

$$\therefore B(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}),$$

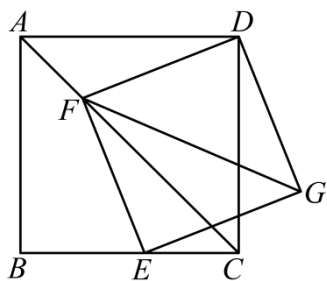
设直线 AB 的解析式为 $y = kx + 4$,

$$\text{则 } -2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}k + 4,$$

$$\text{解得 } k = -\sqrt{2} - 1.$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = -(\sqrt{2} + 1)x + 4.$$

26. 已知: 如图, 正方形 $ABCD$ 中, $AB = 2\sqrt{2}$, 点 F 为对角线 AC 上一点, 联结 DF , 过点 F 作 $FE \perp DF$ 交线段 BC 于点 E (点 E 不与点 B , 点 C 重合), 过 E 作 $EG \perp FE$, 过 D 作 $DG \perp DF$, EG 与 DG 交于点 G .



(1) 证明四边形 $DFEG$ 为正方形;

(2) 联结 CG , 设 $CG = x$, $FC = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出定义域;

(3) 当 $\triangle ECG$ 为等腰三角形时, 直接写出 CG 的长度.

【答案】 (1) 见解析 (2) $y = 4 - x (0 < x < 4)$

(3) $4 - 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 (1) 先证明四边形 $DFEG$ 是矩形, 过 F 作 $FM \perp BC$ 于 M , $FN \perp CD$ 于 N , 证明四边形 $FMCN$ 是矩形得到 $\angle MFN = 90^\circ$, 进而得到 $\angle MFE = \angle NFD$, 证明 $\triangle FME \cong \triangle FND$ (ASA) 得到 $EF = FD$, 然后根据正方形的判定可得结论;

(2) 根据正方形的性质和勾股定理求得 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4$, 证明 $\triangle ADF \cong \triangle CDG$ (SAS) 得到 $AF = CG = x$, 进而可求解;

(3) 先根据全等三角形的性质得到 $\angle AFD = \angle CGD$, $\angle DCG = \angle FAD = 45^\circ$, 则 $\angle ECG = 135^\circ$, 当 $\triangle ECG$ 为等腰三角形时, $CE = CG$, 然后根据等腰三角形的性质和三角形的内角和定理推导出

$\angle CDF = \angle CFD = 67.5^\circ$, 利用等角对等边可得 $CF = CD = 2\sqrt{2}$, 进而求得 $CG = AE = 4 - 2\sqrt{2}$.

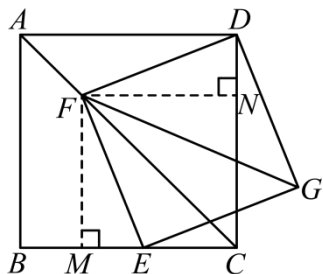
【小问 1 详解】

证明: $\because FE \perp DF, EG \perp FE, DG \perp DF,$

$$\therefore \angle DFE = \angle FEG = \angle FDG = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DFEG$ 是矩形,

过 F 作 $FM \perp BC$ 于 M , $FN \perp CD$ 于 N , 则 $\angle FMC = \angle FNC = \angle FND = 90^\circ,$



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ, \angle ACB = \angle ACD = \angle CAD = 45^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $FMCN$ 是矩形, $FM = FN,$

$$\therefore \angle MFN = 90^\circ, \text{ 则 } \angle MFE + \angle EFN = 90^\circ,$$

$$\text{又 } \angle EFD = \angle NFD + \angle EFN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MFE = \angle NFD,$$

在 $\triangle FME$ 和 $\triangle FND$ 中,

$$\begin{cases} \angle MFE = \angle NFD \\ FM = FN \\ \angle FME = \angle FND = 90^\circ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FME \cong \triangle FND (\text{ASA}),$$

$$\therefore EF = FD,$$

$\therefore$ 四边形 $DFEG$ 为正方形;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $DFEG$ 为正方形和四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore DF = DG, AD = DC, \angle ADC = \angle FDG = \angle DGE = \angle B = \angle BCD = 90^\circ, AB = BC = CD = 2\sqrt{2},$$

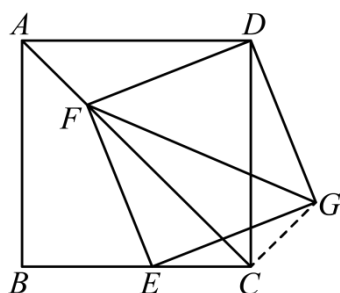
$$\therefore \angle ADF = \angle CDG, AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4,$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDG (\text{SAS}),$$

$$\therefore AF = CG = x,$$

$\therefore FC = y$, $AC = 4$, 点 E 不与点 B , 点 C 重合,

$$\therefore y = 4 - x (0 < x < 4);$$



【小问 3 详解】

解: $\because \triangle ADF \cong \triangle CDG$,

$\therefore \angle AFD = \angle CGD$, $\angle DCG = \angle FAD = 45^\circ$, 又 $\angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ECG = 135^\circ$,

$\therefore$ 当 $\triangle ECG$ 为等腰三角形时, $CE = CG$,

$\therefore \angle CEG = \angle CGE = 22.5^\circ$, 又 $\angle DGE = 90^\circ$,

$\therefore \angle AFD = \angle CGD = 90^\circ + 22.5^\circ = 112.5^\circ$,

$\therefore \angle DFC = 180^\circ - 112.5^\circ = 67.5^\circ$,

在 $\triangle AFD$ 中, $\angle ADF = 180^\circ - \angle DAF - \angle AFD = 22.5^\circ$,

$\therefore \angle CDF = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ$,

$\therefore \angle CDF = \angle CFD$,

$\therefore CF = CD = 2\sqrt{2}$,

$\therefore AF = AC - CF = 4 - 2\sqrt{2}$,

$\therefore CG = AF = 4 - 2\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查正方形的判定与性质、角平分线的性质、矩形的判定、全等三角形的判定与性质、函数解析式、等腰三角形的判定与性质、勾股定理、三角形的内角和定理等知识, 熟练掌握相关知识的联系与运用是解答的关键.