

2024 学年第二学期初二年级学业质量调研

数学学科

一、选择题:

【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列方程是二项方程的是 ()

- A. $2x^2 = 0$ B. $x^4 + x = 0$ C. $\frac{1}{3}x^3 + 8 = x$ D. $y^5 = 9$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了二项方程的定义，根据二项方程的定义，形如 $ax^n + b = 0$ （其中 $a \neq 0$ ， $b \neq 0$ ， n 为正整数）的方程称为二项方程，需逐一分析选项是否符合该形式.

【详解】解：A、 $2x^2 = 0$ ，可写为 $2x^2 + 0 = 0$ 。虽然有两项，但常数项 $b = 0$ ，不符合二项方程中“两项均非零”的要求，故排除；

B、 $x^4 + x = 0$ ，整理为 $x^4 + x + 0 = 0$ ，包含 x^4 和 x 两个非零项，但两项均为未知数的不同次项，而非“高次项与常数项”的组合，不符合二项方程形式，故排除；

C、 $\frac{1}{3}x^3 + 8 = x$ ，整理为 $\frac{1}{3}x^3 - x + 8 = 0$ ，包含 x^3 、 x 和常数项三个非零项，属于三项方程，故排除；

D、 $y^5 = 9$ ，整理为 $y^5 - 9 = 0$ ，即 $1 \cdot y^5 + (-9) = 0$ ，仅含 y^5 和常数项两项，且两项均非零，符合二项方程的定义.

故选：D

2. 下列函数中， y 的值随 x 的增大而减小的是 ()

- A. $y = -x$ B. $y = 2x + 1$ C. $y = 2$ D. $y = \frac{2}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数、反比例函数及常数函数的增减性，掌握各类函数的增减性成为解题的关键.

根据各类函数的增减性的性质逐项判断即可.

【详解】解：A：函数 $y = -x$ 为一次函数，斜率 $k = -1 < 0$ ，因此 y 随 x 的增大而减小，符合题意；

B: 函数 $y = 2x + 1$ 为一次函数, 斜率 $k = 2 > 0$, 因此 y 随 x 的增大而增大, 不符合题意;

C: 函数 $y = 2$ 为常数函数, 无论 x 如何变化, y 始终为定值 2, 既不增大也不减小, 不符合题意.

D: 函数 $y = \frac{2}{x}$ 为反比例函数, $k = 2 > 0$. 在每一象限内 (如 $x > 0$ 或 $x < 0$ 时), y 随 x 的增大而减小.

故选 A.

3. 下列事件中, 不是确定事件的是 ()

A. 蜡烛在没有氧气的瓶中燃烧

B. 打开电视, 正在播报新闻

C. 抛掷两枚正方体骰子, 点数之和等于 13

D. 10 只鸟关在 3 个笼子里, 至少有一个笼子关的鸟超过 3 只

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查事件的分类: 确定事件 (必然事件和不可能事件) 与随机事件, 结合每个选项的情况进行分析, 即可作答.

【详解】解: A、蜡烛燃烧需要氧气, 无氧环境下必然无法燃烧, 属于不可能事件 (确定事件);

B、打开电视时可能播放新闻, 也可能播放其他节目, 结果具有不确定性, 属于随机事件 (非确定事件);

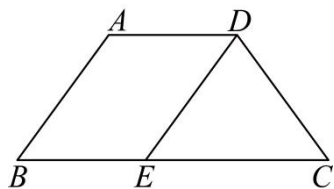
C、两枚骰子最大点数和为 $6 + 6 = 12$, 13 不可能出现, 属于不可能事件 (确定事件);

D、若每个笼子最多关 3 只鸟, 3 个笼子最多关 9 只, 但题目有 10 只鸟, 根据抽屉原理, 至少有一个笼子超过 3 只, 属于必然事件 (确定事件);

综上, 只有选项 B 不是确定事件,

故选: B

4. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$, $AB \parallel DE$, 下列结论中正确的是 ()



A. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 是相等向量

B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} = 0$

C. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是相反向量

D. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CE}$ 是平行向量

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 解题的关键是熟记相等向量与相反向量, 以及平行向量的定义.

根据等腰梯形的性质, 即可得 $AC = BD$, 然后根据相等向量与相反向量, 以及平行向量的定义, 即可求得答案.

【详解】解: A、 $AB = CD$, 但 AB 不平行于 CD , 在 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 是不相等的向量, 故本选项不符合题意;

B、 $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$, 故本选项不符合题意;

C、 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 方向相同, 但 $AD \neq BC$, 则 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不是相反向量, 故本选项不符合题意;

D、由 $AD \parallel CE$ 知, $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CE}$ 是平行向量, 故本选项符合题意.

故选: D.

5. 尺规作图: 已知 $\angle MON$ ($0^\circ < \angle MON < 180^\circ$) 具体步骤如下: ①在射线 OM 、 ON 上分别截取 OA 、 OB , 使 $OA = OB$; ②分别以点 A 、 B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 的同一长度为半径作弧, 两弧交于 $\angle MON$ 内的一点 P , 作射线 OP ; ③以点 A 为圆心, OA 为半径作弧, 交射线 OP 于点 C , 联结 AC 、 CB . 那么所作的四边形 $AOBC$ 一定是 ()

A. 菱形

B. 矩形

C. 正方形

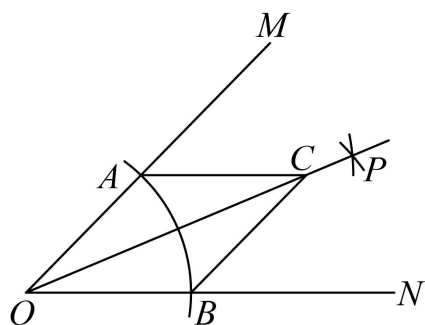
D. 等腰梯形

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查作图-基本作图, 菱形的判定, 矩形的判定, 正方形的判定, 等腰梯形的判定. 根据要求作出图形, 再根据邻边相等的平行四边形是菱形证明即可.

【详解】解: 由作图可知, OC 平分 $\angle MON$, $OA = OB = AC$,



$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \angle ACO,$$

$$\therefore AC \parallel OB,$$

$\therefore$ 四边形 $AOBC$ 是平行四边形,

$$\therefore OA = OB,$$

∴ 四边形 $AOBC$ 是菱形.

故选: A.

6. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AC = BD$, 下列判断中的正确的是 ()

A. 如果 $BC = AD$, 那么四边形 $ABCD$ 是等腰梯形

B. 如果 $AD \parallel BC$, 那么四边形 $ABCD$ 是菱形

C. 如果 AC 平分 BD , 那么四边形 $ABCD$ 是矩形

D. 如果 $AC \perp BD$, 那么四边形 $ABCD$ 是正方形

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据正方形、等腰梯形、矩形和菱形的判定定理进行判断即可.

【详解】 解: A. 如果 $BC=AD$, 那么四边形 $ABCD$ 可能是等腰梯形, 也可能是矩形, 错误;

B. 如果 $AD \parallel BC$, 那么四边形 $ABCD$ 是矩形, 错误;

C. 如果 AC 平分 BD , 那么四边形 $ABCD$ 是矩形, 正确;

D. 如果 $AC \perp BD$, 那么四边形 $ABCD$ 不一定是正方形, 错误;

故选: C.

【点睛】 此题考查等腰梯形的判定, 关键是根据正方形、等腰梯形、矩形和菱形的判定定理解答.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 已知 $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, 如果 $f(a) = 4$, 则实数 a 的值是_____.

【答案】 12

【解析】

【分析】 根据新定义的关系式, 利用条件列方程 $\frac{1}{2}a - 2 = 4$, 解方程即可.

【详解】 解: $\because f(x) = \frac{1}{2}x - 2, f(a) = 4,$

$$\therefore \frac{1}{2}a - 2 = 4,$$

移项得: $\frac{1}{2}a = 6,$

系数化 1 得: $a = 12,$

故答案为: 12.

【点睛】 本题考查新定义函数关系, 根据等量关系列方程, 掌握新定义函数关系, 根据等量关系列方程是

解题关键.

8. 用换元法解方程 $\frac{3x}{x-2} - \frac{2x-4}{x} + 3 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x}{x-2} = y$, 那么将原方程变形后所得的一元二次方程是_____.

【答案】 $3y^2 + 3y - 2 = 0$

【解析】

【分析】 设 $\frac{x}{x-2} = y$, 则原方程化为 $3y - \frac{2}{y} + 3 = 0$, 再整理即可.

【详解】 $\frac{3x}{x-2} - \frac{2x-4}{x} + 3 = 0$,

设 $\frac{x}{x-2} = y$, 则原方程化为: $3y - \frac{2}{y} + 3 = 0$,

即 $3y^2 + 3y - 2 = 0$,

故答案为 $3y^2 + 3y - 2 = 0$.

【点睛】 本题考查了解分式方程, 能够正确换元是解此题的关键.

9. 无理方程 $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{1-x}$ 的解是_____.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程, 掌握解无理方程的步骤是解题的关键.

先将无理方程化为整式方程求解, 然后再检验.

【详解】 解: $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{1-x}$

$x^2 - 4x + 3 = 1 - x$,

$x^2 - 3x + 2 = 0$,

解得: $x_1 = 1, x_2 = 2$,

经检验: $x_2 = 2$ 是增根, 舍去, $x_1 = 1$ 是原方程的根,

$\therefore$ 原方程的解为 $x = 1$,

故答案为: $x = 1$.

10. 已知一次函数 $y = (1-3m)x + (2m-1)$ 的图像经过第二、三、四象限, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $\frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数图象与性质，对于一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$, k, b 为常数)，当 $k > 0$ ，图象经过第一，三象限， y 随 x 的增大而增大；当 $k < 0$ ，图象经过第二，四象限， y 随 x 的增大而减小；当 $b > 0$ ，图象与 y 轴的交点在 x 轴的上方；当 $b = 0$ ，图象过坐标原点；当 $b < 0$ ，图象与 y 轴的交点在 x 轴的下方。根据图像经过第二、三、四象限得到 $k < 0, b < 0$ ，据此得到一元一次不等式组，再求解即可。

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = (1 - 3m)x + (2m - 1)$ 的图像经过第二、三、四象限，

$$\therefore \begin{cases} 1 - 3m < 0 \\ 2m - 1 < 0 \end{cases},$$

解得： $\frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}$,

故答案为： $\frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}$.

11. 如果一个多边形的每个内角为 160° ，那么它的边数为_____.

【答案】 18

【解析】

【分析】 先求出这个多边形的每一个外角的度数，再用 360° 除以外角即可得到边数

【详解】 解： $\because$ 多边形的每一个内角都等于 160°

$\therefore$ 多边形的每一个外角都等于 $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

$\therefore$ 边数 $n = 360^\circ \div 20^\circ = 18$

故答案为： 18

【点睛】 本题主要考查了多边形的内角与外角关系，求出每一个外角的度数是解题关键.

12. 袋子里有若干个除了颜色不同其它完全相同的白球和绿球，小杰从袋中随机摸出一个球，要使摸出绿球的概率为 $\frac{3}{5}$ ，那么最少要在袋中放_____个绿球.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题主要考查了根据概率计算数量，解题的关键是熟练掌握概率公式. 根据从袋中随机摸出一个球，要使摸出绿球的概率为 $\frac{3}{5}$ ，得出袋子中绿球的最少数量即可.

【详解】 解： $\because$ 小杰从袋中随机摸出一个球，要使摸出绿球的概率为 $\frac{3}{5}$,

$\therefore$ 绿球占总球数量的 $\frac{3}{5}$,

又 $\because$ 为球的个数为正整数,

$\therefore$ 最少要在袋中放 3 个绿球.

故答案为: 3.

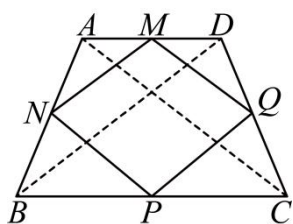
13. 顺次连接等腰梯形各边中点所围成的四边形是_____

【答案】菱形

【解析】

【分析】本题考查等腰梯形的性质, 菱形的判定方法, 以及三角形中位线的性质. 连接 AC 、 BD , 可证 MN 为 $\triangle ABD$ 的中位线, PQ 为 $\triangle CBD$ 的中位线, 根据中位线定理可证 $MN \parallel BD \parallel PQ$, $MN = PQ = \frac{1}{2}BD$, 同理可证 $PN \parallel AC \parallel MQ$, $NP = MQ = \frac{1}{2}AC$, 根据等腰梯形的性质可知 $AC = BD$, 故可证四边形 $PQMN$ 为菱形.

【详解】解: 连接 AC 、 BD ,



$\because M$ 、 N 分别为 AD 、 AB 的中点

$\therefore MN$ 为 $\triangle ABD$ 的中位线,

$\therefore MN \parallel BD$, $MN = \frac{1}{2}BD$,

同理可证 $BD \parallel PQ$, $PQ = \frac{1}{2}BD$,

$\therefore MN = PQ$, $MN \parallel PQ$, 四边形 $PQMN$ 为平行四边形,

同理可证 $NP = MQ = \frac{1}{2}AC$,

根据等腰梯形的性质可知 $AC = BD$,

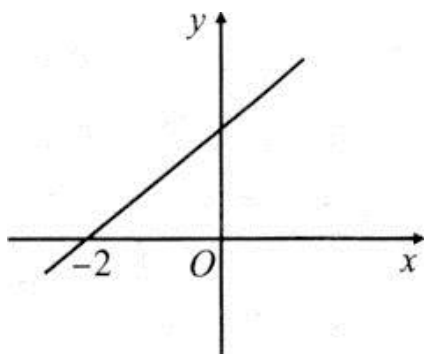
$\therefore PQ = NP$,

$\therefore \square PQMN$ 为菱形.

故顺次连接等腰梯形各边中点所围成的四边形是菱形.

故答案为: 菱形.

14. 如图, 直线 $y = kx + b$ 与 x 轴交于点 $(-2, 0)$, 则 $y > 0$ 时, x 的取值范围是_____.



【答案】 $x > -2$

【解析】

【分析】 直接根据 $x > -2$ 时函数图象在 x 轴的上方进行解答即可.

【详解】 由函数图象可知, 当 $x > -2$ 时, $y > 0$.

故答案为 $x > -2$.

【点睛】 本题考查的是一次函数的图象, 利用数形结合求解是解答此题的关键.

15. 定义: 在平面直角坐标系 xOy 中, 距离为 1 的两条直线叫做“互为伴随线”. 如果直线 $y = kx + b$ 与直线 $y = x$ 互为伴随线, 那么直线 $y = kx + b$ 的函数解析式为_____.

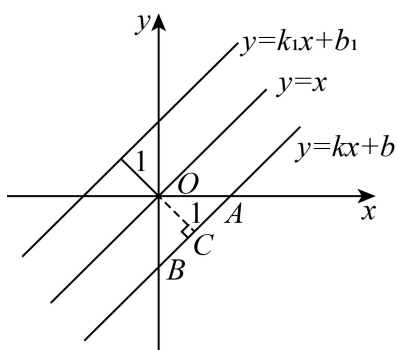
【答案】 $y = x - \sqrt{2}$ 或 $y = x + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理, 由题意得: $k = k_1 = 1$, $OC = 1$, $\angle OAB = 45^\circ$, $OC \perp AB$, $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形, 由勾股定理结合等腰直角三角形的性质求出 $OB = \sqrt{2}$, 得到 $b = -\sqrt{2}$, 即可得出解析式, 同理计算即可得出 $b_1 = \sqrt{2}$, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 解: 设直线 $y = x$ 互为伴随线为直线 $y = kx + b$ 和 $y = k_1x + b_1$,

如图, 过点 O 作 $OC \perp$ 直线 $y = kx + b$ 于点 C ,



根据题意得：两直线互相平行， $OC = 1$ ， $\angle OAB = 45^\circ$ ， $OC \perp AB$ ，

$\therefore k = k_1 = 1$ ， $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AC = OC = BC = 1$ ，

$\therefore OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{2}$ ，

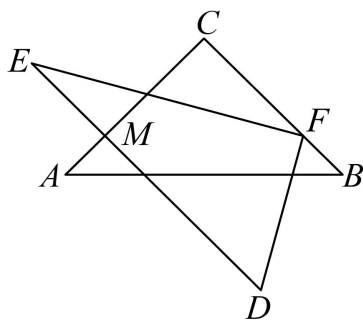
$\therefore b = -\sqrt{2}$ ，即 $y = x - \sqrt{2}$ ，

同理可得： $b_1 = \sqrt{2}$ ，即 $y = x + \sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ 的函数解析式为 $y = x - \sqrt{2}$ 或 $y = x + \sqrt{2}$ ，

故答案为： $y = x - \sqrt{2}$ 或 $y = x + \sqrt{2}$ 。

16. 三角尺是学习数学的工具，三角尺一般是每套两把，其中一把是两个底角都是 45° 的等腰直角三角尺，另一把是有一个内角为 30° 的三十度直角三角尺，且等腰直角三角尺的斜边与三十度直角三角尺较长的直角边等长。如图放置三十度直角三角尺 ($\triangle DEF$)，使得直角顶点 F 落在等腰直角三角尺 ($\triangle ABC$) 的腰 BC 上，斜边 DE 与腰 AC 垂直，垂足为点 M 。当 $AB = EF = 8$ 时，线段 AM 的长为_____。



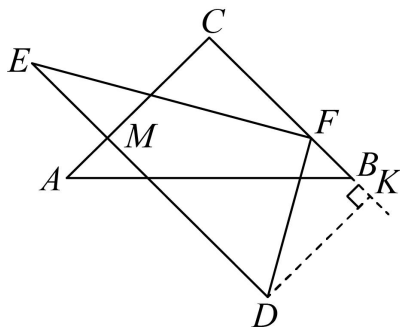
【答案】 $4\sqrt{2} - 4$ 或 $-4 + 4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的判定与性质，勾股定理， 30° 角直角三角形的性质等知识点，熟练掌握各知识点并灵活运用是解题的关键。

过点 D 作 $DK \perp CB$ 交 CB 延长线于点 K ，先由勾股定理得 $AC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = 4\sqrt{2}$ ，可得四边形 $CMDK$ 为矩形，则 $CM = DK$ ， $\angle EDK = 90^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle EFD$ 中， $\angle E = 30^\circ$ ，则 $DE = 2DF$ ， $\angle D = 60^\circ$ ，则由勾股定理得 $EF = \sqrt{DE^2 - DF^2} = \sqrt{3}DF = 8$ ，则 $DF = \frac{8}{\sqrt{3}}$ ，在 $\text{Rt}\triangle FDK$ 中， $\angle FDK = 30^\circ$ ，则 $FK = \frac{1}{2}DF = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ，则 $DK = \sqrt{3}FK = 4$ ，再由 $AM = AC - CM$ 即可求解。

【详解】解：过点 D 作 $DK \perp CB$ 交 CB 延长线于点 K ，



由题意得， $CA = CB$ ， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}，$$

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 8 = 4\sqrt{2}，$$

$$\because DE \perp AC，DK \perp CB，\angle C = 90^\circ，$$

$$\therefore \angle C = \angle DMC = \angle DKC = 90^\circ，$$

$\therefore$ 四边形 $CMDK$ 为矩形，

$$\therefore CM = DK，\angle EDK = 90^\circ，$$

$$\because \text{在 } \text{Rt}\triangle EFD \text{ 中，} \angle E = 30^\circ，$$

$$\therefore DE = 2DF，\angle D = 60^\circ，$$

$$\because DF^2 + EF^2 = DE^2，$$

$$\therefore EF = \sqrt{DE^2 - DF^2} = \sqrt{3}DF = 8，$$

$$\therefore DF = \frac{8}{\sqrt{3}}，$$

$$\therefore \angle FDK = 90^\circ - \angle EDF = 30^\circ，$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle FDK \text{ 中，} FK = \frac{1}{2}DF = \frac{4}{\sqrt{3}}，$$

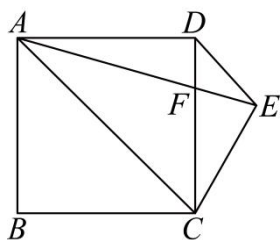
$\therefore$ 由勾股定理得: $DK = \sqrt{3}FK = 4$,

$\therefore CM = DK = 4$,

$\therefore AM = AC - CM = 4\sqrt{2} - 4$,

故答案为: $4\sqrt{2} - 4$.

17. 如图, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $DE \parallel AC$, $AE = AC$, 那么 $\angle DCE$ 的度数为_____.



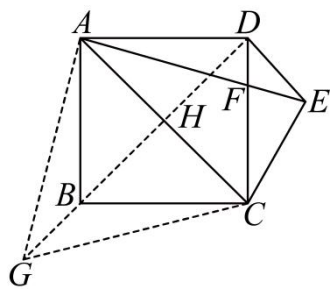
【答案】 30° ##30 度

【解析】

【分析】 本题综合考查了正方形的性质, 全等三角形的判定, 以及旋转变换的性质, 等腰三角形的性质, 根据旋转变换构造出图形是解题的关键.

把 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABG$, 使得 AD 与 AB 重合, 从而可得 B 、 G 、 D 三点在同一条直线上, 然后可以证明 $\triangle AGB$ 与 $\triangle CGB$ 全等, 根据全等三角形对应边相等可得 $AG = CG$, 所以 $\triangle AGC$ 为等边三角形, 根据等边三角形的性质以及正方形的性质即可求解.

【详解】 解: 如图所示, 把 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 使得 AD 与 AB 重合, 得到 $\triangle ABG$, 连接 CG . 连接 BD , 则 $\angle GAE = 90^\circ$,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore AD = AB = BC$, $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\because DE \parallel AC$,

$\therefore \angle EDC = \angle ACD = 45^\circ$,

$\therefore \angle ADE = 135^\circ$,

根据旋转 $\angle ABG = \angle ADE = 135^\circ$,

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle ABG = 180^\circ,$$

$\therefore B, G, D$ 在一条直线上,

$$\therefore \angle ABG = \angle CBG = 135^\circ,$$

在 $\triangle AGB$ 与 $\triangle CGB$ 中,

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABG = \angle CBG, \\ BG = BG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AGB \cong \triangle CGB (\text{SAS}),$$

$$\therefore AG = GC = AE = AC,$$

$\therefore \triangle AGC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle GAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle GAE - \angle GAC = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because AE = AC,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle ACE = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

$$\therefore \text{在正方形 } ABCD \text{ 中, } \angle ACD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle ACE - \angle ACD = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ,$$

故答案为: 30° .

18. 如图, 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB < BC$. 点 M 、 N 分别在边 AD 、 BC 上, 沿直线 MN 将四边形 $DMNC$ 翻折, 点 C 恰好与点 A 重合. 如果此时在原图中 $\triangle CDM$ 与 $\triangle MNC$ 的面积比是 1: 3, 那么 $\frac{MN}{DM}$ 的值等于_____.



【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】由折叠的性质可得: $\angle AMN = \angle CMN$, 由四边形 $ABCD$ 是矩形, 可得 $\angle AMN = \angle CNM$, 则可证得 $\angle CNM = \angle CMN$, 继而可得 $CM = CN$; 过点 M 作 $MH \perp BC$ 于点 H , 由 $\triangle CDM$ 的面积与 $\triangle MNC$ 的面积比为

1: 3, 易得 $NC=3MD=3HC$, 然后设 $DM=x$, 由勾股定理, 可求得 MN 的长, 继而求得答案.

【详解】解: 由折叠的性质可得: $\angle EMN=\angle DMN$,

即 $\angle EMN=\angle EMA+\angle AMN$,

$\angle DMN=\angle DMC+\angle CMN$,

$\therefore \angle EMA=\angle DMC$

$\therefore \angle AMN=\angle CMN$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

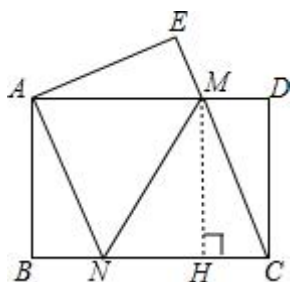
$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle AMN=\angle CNM$,

$\therefore \angle CNM=\angle CMN$,

$\therefore CM=CN$,

如图,



过点 M 作 $MH \perp BC$ 于点 H , 则四边形 $MHCD$ 是矩形,

$\therefore HC=DM$, $MH=DC$,

$\therefore \triangle CDM$ 的面积与 $\triangle CMN$ 的面积比为 1: 3,

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDM}}{S_{\triangle CMN}} = \frac{\frac{1}{2}DM \cdot MH}{\frac{1}{2}CN \cdot NH} = \frac{DM}{CN} = \frac{1}{3},$$

$\therefore NC=3MD=3HC$,

$\therefore NH=2HC$,

设 $DM=x$, 则 $HC=x$, $NH=2x$,

$\therefore CM=CN=3x$,

在 $Rt\triangle CDM$ 中, $DC=\sqrt{CM^2-DM^2}=2\sqrt{2}x$,

$\therefore HM=2\sqrt{2}x$,

在 $Rt\triangle MNH$ 中, $MN=\sqrt{MH^2+NH^2}=2\sqrt{3}x$,

$$\therefore \frac{MN}{DM} = \frac{2\sqrt{3}x}{x} = 2\sqrt{3}.$$

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【点睛】此题考查了矩形的性质、折叠的性质、勾股定理以及三角形的面积. 注意掌握辅助线的作法, 注意掌握数形结合思想与方程思想的应用.

三、计算题 (本大题共 7 题, 满分 64 分)

19. 解关于 x 的方程: $ax^2 + 1 = 2$ ($a \neq 0$).

【答案】当 $a > 0$ 时, 方程的解为 $x_1 = \frac{\sqrt{a}}{a}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{a}}{a}$; 当 $a < 0$ 时, 方程无解.

【解析】

【分析】本题考查了解含有参数的整式方程, 解一元二次方程, 注意分类讨论是解题的关键. 讨论当 $a > 0$ 时, 利用直接开平方法求解, 当 $a < 0$ 时, 原方程无解.

【详解】解: $ax^2 + 1 = 2$ ($a \neq 0$)

$$ax^2 = 1,$$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } x^2 = \frac{1}{a},$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{\sqrt{a}}{a}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{a}}{a};$$

当 $a < 0$ 时, 原方程无解,

$\therefore$ 当 $a > 0$ 时, 方程的解为 $x_1 = \frac{\sqrt{a}}{a}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{a}}{a}$; 当 $a < 0$ 时, 方程无解.

$$20. \text{ 解方程组: } \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{【答案】} \begin{cases} x=6 \\ y=12 \end{cases}$$

【解析】

【分析】此题考查了解二元一次方程组, 设 $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$ 利用换元法, 加减消元法求出解即可.

【详解】解：设： $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$,

$$\text{方程组变形为} \begin{cases} 2a + 2b = \frac{1}{2} \text{①} \\ 5a - b = \frac{3}{4} \text{②} \end{cases},$$

$$\text{①} + \text{②} \times 2 \text{ 得: } 12a = 2,$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{6},$$

$$\text{把 } a = \frac{1}{6} \text{ 代入②得: } b = \frac{1}{12},$$

$$\text{则方程组的解为: } \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{12} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases}.$$

21. 上海教育出版社八年级第二学期《数学课本》第 118 页阅读材料.

例题 1 已知：四边形 $ABCD$ 中， AC 与 BD 交于点 O ， $AO = OC$ ， $DO = OB$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明：作向量 $\overrightarrow{AO}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{DO}$ 、 $\overrightarrow{OB}$.

$$\because AO = OC, DO = OB,$$

又 $\because \overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 同向， $\overrightarrow{DO}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 同向，

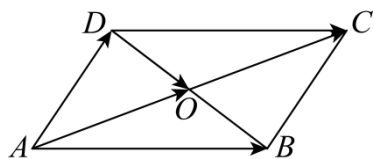
$$\therefore \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}.$$

$$\because \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

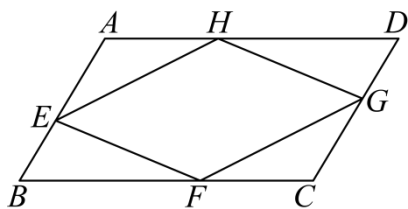
即： $AB \parallel DC$ ，且 $AB = DC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



仔细阅读以上内容，请采用向量的方法补完下题的证明.

已知：四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 、 F 、 G 、 H 分别在边 AB 、 BC 、 CD 、 AD 上，且 $AH = FC$ ， $EA = CG$ 。求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形。



【答案】见详解

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质，向量的运算，正确掌握相关性质内容是解题的关键。先结合平行四边形的性质，得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $AD \parallel BC$ ， $AB \parallel DC$ 。再根据点 F 、 H 分别在边 BC 、 AD 上， $AH = FC$ ，点 E 、 G 分别在边 AB 、 CD 上， $EA = CG$ ，分别得出 $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{FC}$ ， $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ ，结合 $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CG}$ ，得 $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ ，即可作答。

【详解】证明：作向量 $\overrightarrow{AH}$ 、 $\overrightarrow{FC}$ 、 $\overrightarrow{EA}$ 、 $\overrightarrow{CG}$ 。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AB \parallel DC$ 。

$\because$ 点 F 、 H 分别在边 BC 、 AD 上， $AH = FC$ ，

又 $\because \overrightarrow{AH}$ 与 $\overrightarrow{FC}$ 同向，

$\therefore \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{FC}$ 。

$\because$ 点 E 、 G 分别在边 AB 、 CD 上， $EA = CG$ ，

又 $\because \overrightarrow{EA}$ 与 $\overrightarrow{CG}$ 同向，

$\therefore \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CG}$ ，

$\therefore \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CG}$ ，

$\therefore \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ ，

$\therefore EH \parallel FG$ ， $EH = FG$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形。

22. 第 24 届国际数学家大会会标是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的，颜色的明暗使它看上去像一个风车，代表中国人民热情好客。如图，会标是由四个全等的直角三角形与中间的小正方形拼成的一个大正

方形。如果大正方形的面积是 13，小正方形的面积是 1，那么直角三角形的两条直角边长分别是多少？



【答案】2 和 3

【解析】

【分析】本题主要考查了勾股定理，解一元二次方程，设长直角边的长为 a ，短直角边的长为 b ，根据正方形面积计算公式可得大正方形的边长为 $\sqrt{13}$ ，小正方形的边长为 1，则由勾股定理可得 $a^2 + b^2 = 13$ ，且

$a - b = 1$ ，据此可得 $(b + 1)^2 + b^2 = 13$ ，解方程即可得到答案。

【详解】解：设长直角边的长为 a ，短直角边的长为 b ，

$\because$ 大正方形的面积是 13，小正方形的面积是 1，

$\therefore$ 大正方形的边长为 $\sqrt{13}$ ，小正方形的边长为 1，

$\therefore a - b = 1, a^2 + b^2 = (\sqrt{13})^2 = 13,$

$\therefore a = b + 1,$

$\therefore (b + 1)^2 + b^2 = 13,$

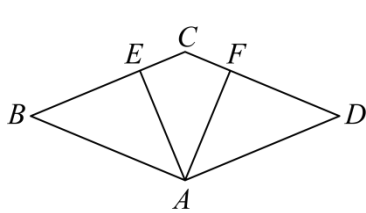
$\therefore b^2 + b - 6 = 0,$

解得 $b = 2$ 或 $b = -3$ （舍去），

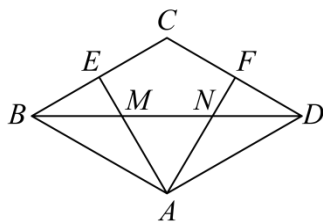
$\therefore a = b + 1 = 3,$

答：直角三角形的两条直角边长分别是 2 和 3。

23. 已知：在菱形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ ， $AF \perp CD$ ，垂足为 E 、 F 。



图①



图②

(1) 如图①，如果 $\angle BAE = \angle EAF$ ，求证： $AE = BE$ ；

(2) 如图②, 如果对角线 BD 与 AE 、 AF 交于点 M 、 N , 且 $BM = MN$, 求证: $\angle EAF = 2\angle BAE$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质, 直角三角形斜边中线的性质, 等边三角形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 等腰三角形的判定等知识点, 熟练掌握各知识点并灵活运用是解题的关键.

(1) 根据菱形得到 $DC \parallel BA$, 继而得到 $\angle BAF = 90^\circ = \angle BAE + \angle EAF$, 由 $\angle BAE = \angle EAF$ 得到 $\angle BAE = \angle EAF = 45^\circ$, 则 $\angle B = 90^\circ - \angle BAE = 45^\circ = \angle BAE$, 那么 $AE = BE$;

(2) 由直角三角形斜边中线得到 $BM = MN = AM$, 证明 $\triangle ABM \cong \triangle ADN$ (ASA), 则 $AM = AN$, 那么 $\triangle AMN$ 为等边三角形, 则 $\angle MAN = 60^\circ$, 那么 $\angle BAE = 90^\circ - \angle MAN = 30^\circ$, 故 $\angle EAF = 2\angle BAE$.

【小问 1 详解】

证明: $\because AE \perp BC$, $AF \perp CD$

$\therefore \angle BEA = \angle AFD = 90^\circ$,

$\because$ 菱形 $ABCD$,

$\therefore DC \parallel BA$,

$\therefore \angle BAF = 90^\circ = \angle BAE + \angle EAF$,

$\because \angle BAE = \angle EAF$,

$\therefore \angle BAE = \angle EAF = 45^\circ$,

$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BAE = 45^\circ = \angle BAE$,

$\therefore AE = BE$;

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 得 $\angle BAF = 90^\circ$,

$\because BM = MN$,

$\therefore BM = MN = AM$,

$\because$ 菱形 $ABCD$,

$\therefore \angle ABE = \angle ADF$, $AB = AD$,

$\therefore \angle ABM = \angle ADN$,

$\because AE \perp BC$, $AF \perp CD$,

$\therefore \angle AEB = \angle AFD = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAM = \angle DAN = 90^\circ - \angle ABE = 90^\circ - \angle ADF$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADN$ (ASA),

$$\therefore AM = AN,$$

$$\therefore AM = AN = MN,$$

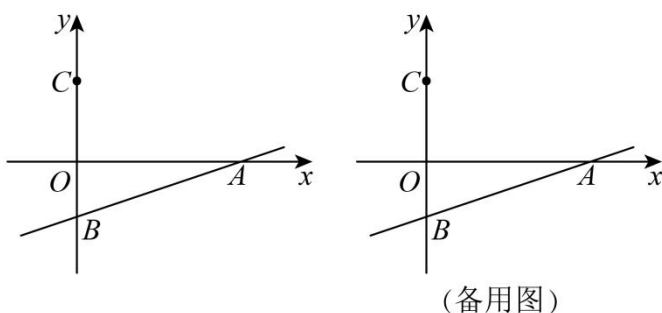
$\therefore \triangle AMN$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle MAN = 60^\circ$$

$$\therefore \angle BAE = 90^\circ - \angle MAN = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = 2\angle BAE.$$

24. 已知, 一次函数 $y = \frac{1}{3}x + b$ 的图像与 x 轴相交于点 $A(6, 0)$, 与 y 轴相交于点 B , 点 C 在 y 轴的正半轴上, $BC = 5$.



- (1) 求一次函数的解析式及点 B 与点 C 的坐标;
- (2) 如果四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 请直接写出点 D 的坐标;
- (3) 将直线 AB 绕着点 B 逆时针旋转 45° 后与 x 轴交于点 P , 求点 P 坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{3}x - 2$; $B(0, -2)$; $C(0, 3)$

(2) $(6, 1)$ 或 $(3, 4)$

(3) $(1, 0)$

【解析】

【分析】 (1) 把 A 的坐标代入 $y = \frac{1}{3}x + b$ 即可求得 b 的值, 求得函数的解析式, 然后即可求得 A , B 的坐标, 从而得到 OB 的长, 进而求得 OC 的长, 则 C 点的坐标即可求得;

(2) 分两种情况, 当 $AD \parallel BC$ 且 $AB = CD$ 时, 当 $AB \parallel CD$ 且 $BC = AD$ 时, 画出图形, 求出结果即可;

(3) 过点 A 作 $AE \perp AB$, 交 BP 于点 E , 过点 E 作 $EF \perp x$ 轴于点 F , 证明 $\triangle AOB \cong \triangle EFA$ (AAS), 得出 $EF = OA = 6$, $AF = OB = 2$, 求出 $E(4, 6)$, 待定系数法求出直线 BP 的解析式为 $y = -2x + 2$, 最后求出点 P 的坐标即可.

【小问 1 详解】

解：把 $A(6,0)$ 代入 $y = \frac{1}{3}x + b$ 得： $2 + b = 0$ ，

解得： $b = -2$ ，

则一次函数的解析式是： $y = \frac{1}{3}x - 2$ 。

在 $y = \frac{1}{3}x - 2$ 中，令 $x = 0$ ，则 $y = -2$ 。则点 B 的坐标是： $(0, -2)$ ；

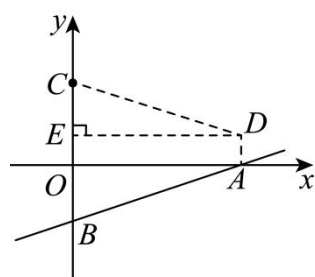
$\because BC = 5$ ，

$\therefore OC = BC - OB = 5 - 2 = 3$ ，

$\therefore C$ 的坐标是： $(0, 3)$ ；

【小问 2 详解】

解：当 $AD \parallel BC$ 且 $AB = CD$ 时，作 $DE \perp BC$ 于点 E ，如图所示：



$\because AD \parallel BC$ ， $\angle AOC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DAO = 180^\circ - \angle AOC = 90^\circ$ ，

$\because \angle AOE = \angle DEO = \angle DAO = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $AOED$ 为矩形，

$\therefore DE = AO = 6$ ，

$\because AB = CD$ ，

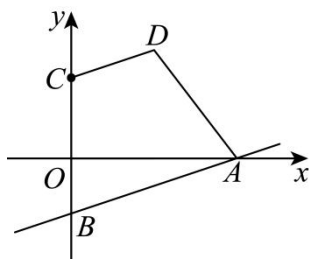
$\therefore \text{Rt}\triangle CDE \cong \text{Rt}\triangle BAO (\text{HL})$ ，

$\therefore CE = OB = 2$ ，

$\therefore AD = OE = 5 - CE - OB = 1$ 。

$\therefore$ 点 D 的坐标是： $(6, 1)$ 。

当 $AB \parallel CD$ 且 $BC = AD$ 时， 如图所示：



$\because AB \parallel CD$, AB 的解析式为 $y = \frac{1}{3}x - 2$, $C(0, 3)$,

$\therefore$ 直线 CD 的解析式为: $y = \frac{1}{3}x + 3$,

设点 $D\left(m, \frac{1}{3}m + 3\right)$,

$\because AD = BC = 5$,

$$\therefore (6-m)^2 + \left(\frac{1}{3}m + 3\right)^2 = 5^2,$$

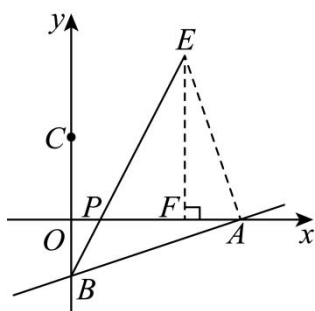
解得: $m = 3$ 或 $m = 6$ (舍去),

$\therefore$ 此时点 D 的坐标为 $(3, 4)$;

综上所述可知: 点 D 的坐标为 $(6, 1)$ 或 $(3, 4)$;

【小问 3 详解】

解: 过点 A 作 $AE \perp AB$, 交 BP 于点 E , 过点 E 作 $EF \perp x$ 轴于点 F , 如图所示:



$\because \angle EAB = 90^\circ$, $\angle ABE = 45^\circ$,

$\therefore \triangle ABE$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AE = AB$,

$\because \angle EFA = \angle AOB = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAF + \angle AEF = \angle EAF + \angle BAO = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEF = \angle BAO$,

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle EFA (AAS)$,

$$\therefore EF = OA = 6, \quad AF = OB = 2,$$

$$\therefore OF = OA - AF = 6 - 2 = 4,$$

$$\therefore E(4, 6),$$

设直线 BP 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$, 把 $B(0, -2)$, $E(4, 6)$ 代入得:

$$\begin{cases} b = -2 \\ 4k + b = 6 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = 2 \\ b = -2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } BP \text{ 的解析式为 } y = -2x + 2,$$

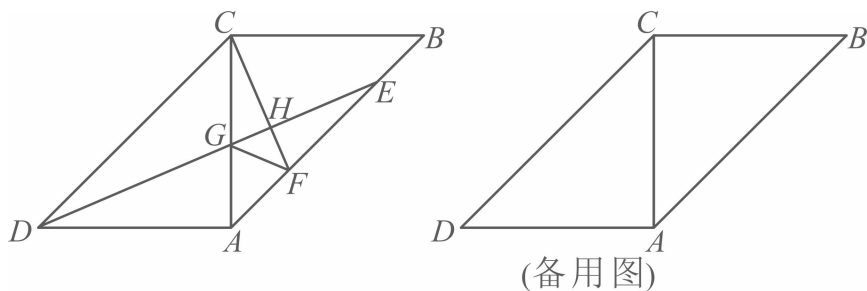
$$\text{把 } y = 0 \text{ 代入得: } 0 = -2x + 2,$$

$$\text{解得: } x = 1,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (1, 0).$$

【点睛】本题主要是一次函数与几何图形综合，三角形全等的判定和性质，矩形的判定和性质，两点间距离公式，正确作出辅助线，注意分类讨论，是解题关键.

25. 已知，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD \perp AC$ ， $AD = AC$ ，点 E 在射线 BA 上，直线 DE 与直线 AC 交于点 G ， $CH \perp DE$ 于 H ， CH 的延长线与直线 AB 交于点 F .



(1) 如图，当点 E 在线段 AB 上时，

①如果 $\angle EDA = 30^\circ$ ， $CG = 2$ ，求 DG 的长；

②连接 FG ，求证： $DG = CF + FG$ ；

(2) 如果 $HG = HF$ ， $FG = \sqrt{2}$ ，求 DG 的长.

【答案】(1) ① $2 + 2\sqrt{3}$ ；②见解析

(2) 2 或 $2 + 2\sqrt{2}$

【解析】

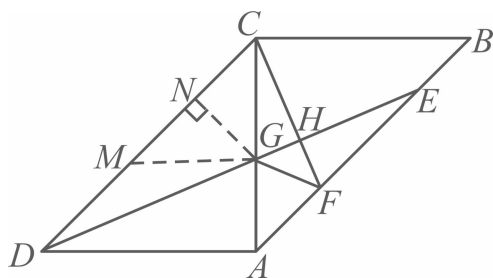
【分析】(1) ①过点 G 作 $GN \perp CD$ ，垂足为 N ，在 DN 上取点 M ，使 $DM = GM$ ，证明 $\triangle GCN$ 是等腰直角三角形，求出 $GN = CN = \sqrt{2}$ ，根据含 30° 度的直角三角形性质求出 $DM = MG = 2NG = 2\sqrt{2}$ ，根据勾股定理求出 $MN = \sqrt{MG^2 - NG^2} = \sqrt{6}$ ，得出 $DN = DM + MN = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ，最后根据勾股定理求出结果即可；

②如图，延长 CF 交 DA 的延长线于 T ，连接 FG ，利用全等三角形的性质证明 $DG = CT$, $FG = FT$ 即可；

(2) 根据题意可求 $GH = HF = 1$ ，当点 E 在线段 AB 上时，根据 $AD \perp AC$ ， $CH \perp DE$ ， $HG = HF$ ， $AD = AC$ ，可得 $\angle CFG = \angle EGF = \angle DCA = 45^\circ$ ，进而得到 $\angle DCA + \angle ACF = \angle CFG + \angle ACF$ ，即 $\angle DCT = \angle AGF$ ，同理 (1) ②可证 $\angle ATC = \angle AGF$ ， $DG = CF + GF = CF + FT$ ，进而得到 $\angle ATC = \angle DCT$ ，推出 $\triangle CDT$ 是等腰三角形，根据等腰三角形三线合一，得到 $CH = HT = 1 + \sqrt{2}$ ，即可求出 $DG = CT = 2 + 2\sqrt{2}$ ；当点 E 在射线 BA 上时，同理证明 $\triangle CDG$ 是等腰三角形，即可解答。

【小问 1 详解】

①解：过点 G 作 $GN \perp CD$ ，垂足为 N ，在 DN 上取点 M ，使 $DM = GM$ ，如图所示：



$\because AD \perp AC$ ， $AD = AC$ ，

$\therefore \triangle ACD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle ADC = \angle ACD = 45^\circ$ ，

$\because \angle CNG = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle GCN$ 是等腰直角三角形，

$\therefore CN = NG$ ，

$\because CG = 2$ ，

$\therefore \sqrt{CN^2 + NG^2} = CG$ ，

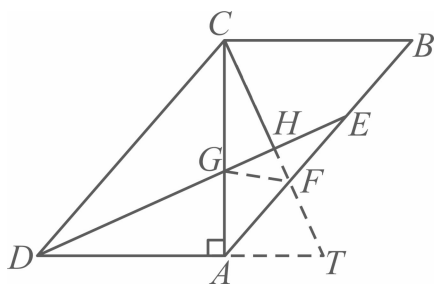
$\therefore GN = CN = \sqrt{2}$ ，

$\because \angle EDA = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle MDG = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ ，

$$\begin{aligned}
&\because DM = GM, \\
&\therefore \angle MGD = \angle MDG = 15^\circ, \\
&\therefore \angle GMN = \angle MDG + \angle MGD = 30^\circ, \\
&\therefore \angle MNG = 90^\circ, \\
&\therefore DM = MG = 2NG = 2\sqrt{2}, \\
&\therefore MN = \sqrt{MG^2 - NG^2} = \sqrt{6}, \\
&\therefore DN = DM + MN = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}, \\
&\therefore DG = \sqrt{NG^2 + DN^2} \\
&= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} + \sqrt{6})^2} \\
&= \sqrt{2 + 8 + 6 + 4\sqrt{12}} \\
&= \sqrt{16 + 8\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{4(4 + 2\sqrt{3})} \\
&= \sqrt{4(1 + \sqrt{3})^2} \\
&= 2(1 + \sqrt{3}) \\
&= 2 + 2\sqrt{3};
\end{aligned}$$

②如图 1 中，延长 CF 交 DA 的延长线于 T ，连接 FG ，



$$\begin{aligned}
&\because CH \perp DE, \\
&\therefore \angle CHD = 90^\circ, \\
&\because \angle CHG = \angle DAG = 90^\circ, \angle CGH = \angle AGD, \\
&\therefore \angle GCH = \angle GDA, \\
&\because \angle DAG = \angle CAT = 90^\circ, AD = AC,
\end{aligned}$$

$$\therefore \triangle DAG \cong \triangle CAT (\text{ASA}),$$

$$\therefore DG = CT, AG = AT,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\because AD = AC$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$\therefore \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\because \angle CAT = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAF = \angle TAF = 45^\circ,$$

$$\because AF = AF,$$

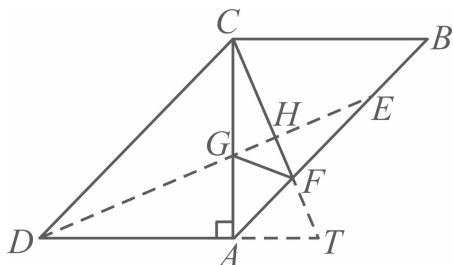
$$\therefore \triangle GAF \cong \triangle TAF (\text{SAS}),$$

$$\therefore GF = TF,$$

$$\therefore DG = CT = CF + TF = CF + FG;$$

【小问 2 详解】

解: 当点 E 在线段 AB 上时,



$$\because HG = HF, FG = \sqrt{2}, CH \perp DE,$$

$$\therefore GH = HF = 1,$$

$$\because AD \perp AC, AD = AC,$$

$$\therefore \angle CFG = \angle EGF = \angle DCA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA + \angle ACF = \angle CFG + \angle ACF, \text{ 即 } \angle DCT = \angle AGF,$$

$$\text{同理 (1) ②得 } \angle ATC = \angle AGF, FG = FT = \sqrt{2}, DG = CF + GF = CF + FT,$$

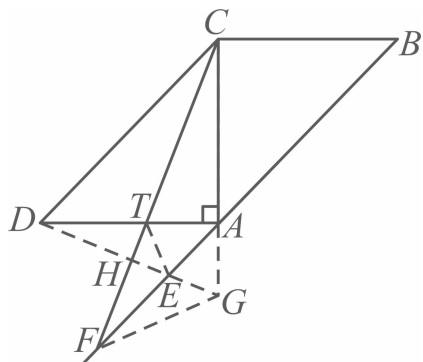
$$\therefore \angle ATC = \angle DCT,$$

$$\therefore \triangle CDT \text{ 是等腰三角形,}$$

$$\therefore CH = HT = 1 + \sqrt{2},$$

$$\therefore DG = CT = 2 + 2\sqrt{2};$$

当点 E 在射线 BA 上时,



同理得: $\triangle ACT \cong \triangle ADG$,

$$\therefore \angle ATC = \angle AGE, AT = AG,$$

$$\because \angle CAB = 180^\circ - \angle ADC - \angle DAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 45^\circ,$$

$$\because AF = AF,$$

$$\therefore \triangle ATF \cong \triangle AGF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle AFT = \angle AFG,$$

$$\because \angle AED = \angle GEF, \angle DAE = \angle HGF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle ADE = \angle AFT,$$

$$\because CD \parallel BF,$$

$$\therefore \angle AFT = \angle DCT,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DCT,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle ATC = \angle ADC + \angle DCT = \angle ADC + \angle ADE = \angle CDG,$$

$\therefore \triangle CDG$ 是等腰三角形,

$$\because CF \perp DG,$$

$$\therefore DH = HG = 1,$$

$$\therefore DG = DH + HG = 2;$$

综上, DG 长为 2 或 $2 + 2\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质，勾股定理，全等三角形的性质与判定，直角三角形的特征，等腰三角形的判定与性质，正确的添加辅助线，构造全等三角形是解题的关键.