

2025 年 7 月上海交大附中初二期末考试试卷 2025.7

一、填空题 (22 分)

1. 已知 $2x + y - 7z = 0$, $x - 2y + 4z = 0$ ($xyz \neq 0$), 则 $\frac{2x + y + z}{x - 2y + z} =$ _____.

【答案】 $-\frac{8}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了三元一次方程组的求解，用 z 将 x 、 y 表示出来，并代入代数式求解即可.

【详解】 解：联立 $2x + y - 7z = 0$, $x - 2y + 4z = 0$,

$$\text{得} \begin{cases} 2x + y - 7z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \end{cases},$$

$$\therefore \frac{2x + y + z}{x - 2y + z} = \frac{2 \times 2z + 3z + z}{2z - 2 \times 3z + z} = \frac{8z}{-3z} = -\frac{8}{3},$$

故答案为： $-\frac{8}{3}$.

2. 若 $|a - 3 - \sqrt{2}| + \sqrt{b - 3 + \sqrt{2}} = 0$, 则代数式 $ab + 3$ 的值为_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查非负性，二次根式的运算，根据非负性求出 a, b 的值，进而求出代数式的值即可.

【详解】 解： $\because |a - 3 - \sqrt{2}| + \sqrt{b - 3 + \sqrt{2}} = 0$,

$$\therefore a - 3 - \sqrt{2} = 0, b - 3 + \sqrt{2} = 0,$$

$$\therefore a = 3 + \sqrt{2}, b = 3 - \sqrt{2},$$

$$\therefore ab + 3 = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) + 3 = 9 - 2 + 3 = 10;$$

故答案为：10

3. 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x+ay+1=0 \\ bx-2y+1=0 \end{cases}$ 有无数组解, 则 $\sqrt{(ab)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查了根据二元一次方程组的解的情况求参数和算术平方根, 熟知二元一次方程组有无数组解时, 方程组的两个方程是同一个方程是解题的关键.

根据题意可知方程 $x+ay+1=0$ 和方程 $bx-2y+1=0$ 是同一个方程, 据此求解 a, b 的值即可得到答案.

【详解】 解: $\because$ 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x+ay+1=0 \\ bx-2y+1=0 \end{cases}$ 有无数组解,

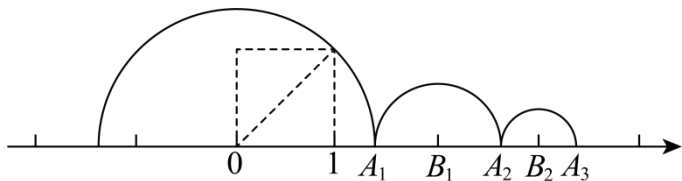
$\therefore$ 方程 $x+ay+1=0$ 和方程 $bx-2y+1=0$ 是同一个方程,

$$\therefore \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases},$$

$$\therefore \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{(-2)^2} = 2,$$

故答案为: 2.

4. 如图, 通过画边长为 1 的正方形, 就能准确地把 $\sqrt{2}$ 表示在数轴上点 A_1 处, 记 A_1 右侧最近的整数点为 B_1 . 以点 B_1 为圆心, A_1B_1 为半径画半圆, 交数轴于点 A_2 , 记 A_2 右侧最近的整数点为 B_2 ; 以点 B_2 为圆心, A_2B_2 为半径画半圆, 交数轴于点 A_3 , ..., 如此继续, 则 A_7B_7 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $2-\sqrt{2}##-\sqrt{2}+2$

【解析】

【分析】 本题考查了实数与数轴、估算无理数的大小以及探索规律, 通过估算无理数的大小, 找到图形变化规律是解题的关键. 利用 A_1 表示的数, 根据实数与数轴的关系, 逐一计算各点所对应的数, 再计算 A_1B_1 、 A_2B_2 、……, 得出规律即可解决.

【详解】 解: 根据题意得: $OA_1 = \sqrt{2}$, 点 B_1 表示的数为 2, 点 B_2 表示的数为 3,

即点 A_1 表示的数为 $\sqrt{2}$, $B_1B_2=1$,

$$\therefore A_2B_1 = A_1B_1 = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore A_2B_2 = B_1B_2 - A_2B_1 = 1 - (2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1,$$

同理 $A_3B_3 = 2 - \sqrt{2}$, $A_4B_4 = \sqrt{2} - 1$, $A_5B_5 = 2 - \sqrt{2}$ ……,

以此类推可得, 当 n 为奇数时, $A_nB_n = 2 - \sqrt{2}$; 当 n 为偶数时, $A_nB_n = \sqrt{2} - 1$,

$$\therefore A_7B_7 = 2 - \sqrt{2},$$

故答案为: $2 - \sqrt{2}$.

5. 下列命题: ①相等的角是对顶角; ②算术平方根等于它本身的数有两个, 分别是 0 和 1; ③已知关于 x 、 y

的二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=1-a \\ x-y=3a+5 \end{cases}$, 不论 a 取什么有理数, $2x+y$ 的值始终不变; ④已知正实数 x 的平方

根是 $a+b$ 和 $a+c$, 若 $(a+b)^2x + (a+c)^2x = 4050$, 则 $x = 45$; ⑤若不等式 $|a-1| + |a-4| \geq m$ 对一切实数 a 都成立, 则 m 的最大值是 5;

其中真命题是: _____. (请填序号)

【答案】 ②③④

【解析】

【分析】 根据对顶角、平方根、解二元一次方程组、代数式求值、绝对值等知识逐项判断即可.

【详解】 解: ①对顶角一定相等, 但相等的角不一定是对顶角, 所以①是假命题;

②算术平方根等于它本身的数有两个, 分别是 0 和 1, 即②是真命题.

③解方程组 $\begin{cases} x+y=1-a \\ x-y=3a+5 \end{cases}$ 可得: $\begin{cases} x=3+a \\ y=-2-2a \end{cases}$, 则 $2x+y = 2(3+a) + (-2-2a) = 6+2a-2-2a = 4$,

所以不论 a 取什么有理数, $2x+y$ 的值始终不变, ③是真命题.

④因为正实数 x 的平方根是 $a+b$ 和 $a+c$,

所以 $a+b+a+c=0$, 即 $2a+b+c=0$, 且 $(a+b)^2 = x, (a+c)^2 = x$,

因为 $(a+b)^2x + (a+c)^2x = 4050$,

所以 $x^2 + x^2 = 4050$, 即 $x^2 = 2025$,

因为正实数 x ，则 $x = 45$ ，④是真命题.

⑤: 设 $y = |a-1| + |a-4|$,

当 $a < 1$ 时, $y = 1 - a + 4 - a = 5 - 2a > 3$;

当 $1 \leq a \leq 4$ 时, $y = a - 1 + 4 - a = 3$;

当 $a > 4$ 时, $y = a - 1 + a - 4 = 2a - 5 > 3$.

所以 $y = |a-1| + |a-4|$ 的最小值是 3,

若不等式 $|a-1| + |a-4| \geq m$ 对一切实数 a 都成立, 则 $m \leq 3$, 即 m 的最大值是 3, 则⑤是假命题.

故答案为: ②③④.

【点睛】 本题主要考查了对顶角、平方根、解二元一次方程组、代数式求值、绝对值等知识点, 灵活运用相关知识成为解题的关键.

6. 一个正整数 x 能写成 $x = a^2 - b^2$ (a, b 均为正整数), 则称 x 为“美满数”, a, b 为 x 的一个美满分解,

并规定: $F(x) = \frac{a}{b}$. 如果一个两位正整数 (十位数字大于个位数字, 交换其个位上的数与十位上的数得到

的新数与原数是 4752 的一个美满分解, 则 $F(4752)$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{71}{17}$ 或 $\frac{7}{4}$.

【解析】

【分析】 本题考查因式分解的应用, 解题的关键是根据“美满数”的定义列出关于 a, b 的方程组.

先设出原两位正整数的十位数字和个位数字, 根据新数与原数是 4752 的一个美满分解列出方程组, 可得

$(m+n)(m-n) = 48$, 求出 m, n 的值, 进而得出 $F(4752)$ 的值.

【详解】 解: 设原两位正整数的十位数字为 m , 个位数字为 n ($m > n, m, n$ 均为正整数), 则原数为 $10m + n$,

新数为 $10n + m$,

$\therefore$ 新数与原数是 4752 的一个美满分解, $a = 10m + n, b = 10n + m$

又 $\therefore a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 4752$,

将 $a = 10m + n, b = 10n + m$ 代入 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 4752$,

$a^2 - b^2 = [(10m + n) + (10n + m)][(10m + n) - (10n + m)]$

$= 11(m+n) \times 9(m-n) = 99(m+n)(m-n) = 4752$

可得: $(m+n)(m-n)=48$ ($m>n, m, n$ 均为正整数)

此方程有两组符合题意的解,

分别为: $\begin{cases} m=7 \\ n=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=8 \\ n=4 \end{cases}$

当 $\begin{cases} m=7 \\ n=1 \end{cases}$ 时, $\begin{cases} a=71 \\ b=17 \end{cases}$,

$$\therefore F(4752) = \frac{71}{17},$$

当 $\begin{cases} m=8 \\ n=4 \end{cases}$ 时, $\begin{cases} a=84 \\ b=48 \end{cases}$,

$$\therefore F(4752) = \frac{84}{48} = \frac{7}{4},$$

综上, $F(4752)$ 的值为 $\frac{71}{17}$ 或 $\frac{7}{4}$.

故答案为: $\frac{71}{17}$ 或 $\frac{7}{4}$.

7. 已知关于 x 的多项式 $mx - m - 1 (m > 0)$, 当 $1 < x \leq 3$ 时, 该多项式有 2 个整数值, 则 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $1 \leq m < \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查解一元一次不等式组, 理解题意并得到关于 x 的一次函数是解题的关键.

令 $y = mx - m - 1 (m > 0)$, 根据 $1 < x \leq 3$ 求得 y 的取值范围, 然后根据题意列得关于 m 的不等式组, 解不等式组即可.

【详解】 解: 令 $y = mx - m - 1 (m > 0)$, 则 y 随着 x 的增大而增大,

当 $x=1$ 时, $y = m - m - 1 = -1$,

当 $x=3$ 时, $y = 3m - m - 1 = 2m - 1$,

$\because 1 < x \leq 3$ 时,

$\therefore -1 < y \leq 2m - 1$,

$\because$ 多项式 $mx - m - 1$ 有 2 个整数值,

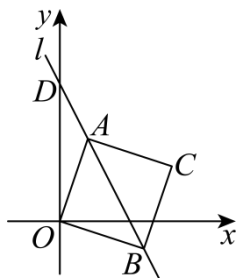
$\therefore y$ 有 2 个整数值, 即 0, 1,

$$\text{则} \begin{cases} 2m-1 \geq 1 \\ 2m-1 < 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } 1 \leq m < \frac{3}{2},$$

$$\text{故答案为: } 1 \leq m < \frac{3}{2}.$$

8. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 l 与正方形 $AOBC$ 交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 D , 已知点 $A(1, 3)$, 则点 D 的坐标为_____.



【答案】 $(0, 5)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的图象与性质, 正方形的性质, 全等三角形三角形的判定与性质, 解题的关键是掌握相关知识. 过点 A 作 $AF \perp x$ 轴于点 F , 过 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E , $\angle AFO = \angle OEB = 90^\circ$, 结合正方形的性质可证明 $\triangle AOF \cong \triangle OBE$, 得到 $OF = BE = 1$, $AF = OE = 3$, 进而求出 $B(3, -1)$, 再求出直线 l 的解析式为 $y = -2x + 5$, 即可求解.

【详解】 解: 如图, 过点 A 作 $AF \perp x$ 轴于点 F , 过 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E , 则 $\angle AFO = \angle OEB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle AOF + \angle OAF = 90^\circ,$$

$$\because A(1, 3),$$

$$\therefore OF = 1, AF = 3,$$

$\because$ 四边形 $AOBC$ 是正方形,

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ, \angle AOF + \angle BOE = 90^\circ, OA = OB,$$

$$\therefore \angle OAF = \angle BOE,$$

在 $\triangle AOF$ 和 $\triangle OBE$ 中,

$$\begin{cases} \angle AFO = \angle OEB \\ \angle OAF = \angle BOE, \\ OA = OB \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOF \cong \triangle OBE \text{ (AAS)},$

$\therefore OF = BE = 1, \quad AF = OE = 3,$

$\therefore B(3, -1),$

设直线 l 的解析式为 $y = kx + b$, 将 $A(1, 3), \quad B(3, -1)$ 代入得:

$$\begin{cases} k + b = 3 \\ 3k + b = -1 \end{cases},$$

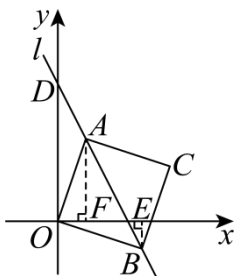
解得: $\begin{cases} k = -2 \\ b = 5 \end{cases},$

$\therefore$ 直线 l 的解析式为 $y = -2x + 5,$

令 $x = 0$, 则 $y = 5,$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(0, 5),$

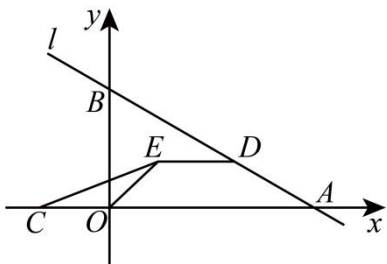
故答案为: $(0, 5).$



9. 如图, 平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 与 x 轴, y 轴分别交于 A, B 两点, $\angle BAO = 30^\circ$,

点 D 是直线 l 上一动点, 将点 D 向左平移 1 个单位得到点 E , 点 $C(-1, 0)$, 则 $OE + CE$ 的最小值为

_____.



$$\therefore FM = 2FG = 2,$$

$$\therefore FS = \frac{1}{2}FM = 1, MS = \sqrt{3}FS = \sqrt{3},$$

$$\therefore OS = 1 + 1 = 2,$$

$$\therefore OM = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore CE + OE \text{ 的最小值为 } \sqrt{7}.$$

故答案为: $\sqrt{7}$.

【点睛】 本题考查了一次函数的性质, 轴对称-最短路线问题以及平行四边形的性质、平移的性质, 勾股定理的应用, 证得 OM 是 $CE + OE$ 的最小值是本题的关键.

10. 已知抛物线 $y = ax^2 - x - 1$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 顶点为 C , 如果 ABC 为直角三角形, 则 $a =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{4}$ ## 0.75

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的几何应用, 等腰直角三角形的性质, 二次函数与一元二次方程, 由一元二次方程根的判别式可得 $a > -\frac{1}{4}$, 再利用二次函数解析式可得 $AB = \left| \frac{\sqrt{1+4a}}{a} \right|$, 点 C 到 x 轴的距离 CD 为

$$\left| \frac{-4a-1}{4a} \right|, \text{ 由 } ABC \text{ 为直角三角形, 点 } A, B \text{ 关于对称轴对称, 可得 } ABC \text{ 为等腰直角三角形, 即得}$$

$AB = 2CD$, 列出方程解答即可求解, 由二次函数的性质判断出 ABC 为等腰直角三角形是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 - x - 1$ 与 x 轴交于 A, B 两点,

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4a \times (-1) > 0,$$

$$\text{解得 } a > -\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{ 抛物线 } y = ax^2 - x - 1,$$

$$\therefore \text{ 抛物线与 } x \text{ 轴交点的横坐标为 } \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2a}, \text{ 顶点 } C \text{ 的纵坐标为 } \frac{-4a-1}{4a},$$

$$\therefore AB = \left| \frac{\sqrt{1+4a}}{a} \right|, \text{ 点 } C \text{ 到 } x \text{ 轴的距离 } CD \text{ 为 } \left| \frac{-4a-1}{4a} \right|,$$

$\therefore ABC$ 为直角三角形, 点 A, B 关于对称轴对称,

$\therefore ABC$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AB = 2CD,$$

$$\therefore \left| \frac{\sqrt{1+4a}}{a} \right| = 2 \left| \frac{-4a-1}{4a} \right|,$$

$$\text{整理得, } 16a^2 - 8a - 3 = 0,$$

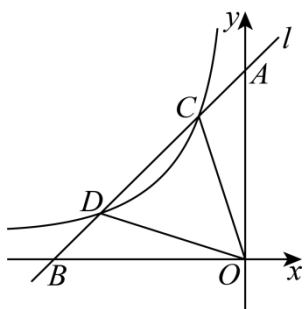
$$\text{解得 } a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = -\frac{1}{4} \quad (\text{不合题意, 舍去}),$$

$$\therefore a = \frac{3}{4},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{4}.$$

11. 如图, 已知直线 l 与 y 轴、 x 轴分别交于 A 、 B 两点, 与反比例函数 $y = -\frac{8\sqrt{2}}{x} (x < 0)$ 的图象交于 C 、 D

两点. 若 C 、 D 两点为线段 AB 的三等分点, 连接 OC 、 OD , 则 $\triangle OCD$ 面积为_____.



【答案】 $6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数与几何综合, 由题意可得 C 为 AD 的中点, $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle COD}$, 设

$C\left(-\frac{8\sqrt{2}}{m}, m\right)$, $A(0, n)$, 由中点坐标公式可得, $D\left(-\frac{16\sqrt{2}}{m}, 2m-n\right)$, 代入反比例函数的解析式可得

$n = \frac{3}{2}m$, 作 $CH \perp y$ 轴于 H , 则 $CH = \frac{8\sqrt{2}}{m}$, $OA = n = \frac{3}{2}m$, 再由三角形面积公式计算即可得解, 熟练

掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】 解: $\because C$ 、 D 两点为线段 AB 的三等分点,

$\therefore AC = CD = BD$, 即 C 为 AD 的中点,

$$\therefore S_{\triangle AOC} = S_{\triangle COD},$$

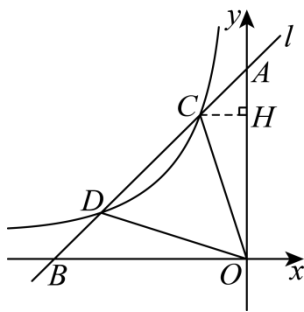
设 $C\left(-\frac{8\sqrt{2}}{m}, m\right)$, $A(0, n)$,

由中点坐标公式可得, $D\left(-\frac{16\sqrt{2}}{m}, 2m-n\right)$,

代入反比例函数解析式可得: $-\frac{16\sqrt{2}}{m} \times (2m-n) = -8\sqrt{2}$,

$$\therefore n = \frac{3}{2}m,$$

如图, 作 $CH \perp y$ 轴于 H ,



则 $CH = \frac{8\sqrt{2}}{m}$, $OA = n = \frac{3}{2}m$,

$$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}OA \cdot CH = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}m \times \frac{8\sqrt{2}}{m} = 6\sqrt{2},$$

$\therefore \triangle OCD$ 面积为 $6\sqrt{2}$,

故答案为: $6\sqrt{2}$.

二、选择题. (30 分, 每小题 3 分)

12. 若二次根式 $\sqrt{a-2}$ 在实数范围内有意义, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 2$ B. $a \leq 2$ C. $a \neq 2$ D. $a \geq 2$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了解不等式以及二次根式有意义的条件等知识点, 根据二次根式有意义的条件, 解不等式即可得解, 熟练掌握二次根式有意义的条件是解决此题的关键.

【详解】解: $\because$ 二次根式 $\sqrt{a-2}$ 在实数范围内有意义,

$$\therefore a-2 \geq 0,$$

$$\therefore a \geq 2,$$

故选: D.

13. 下列函数中, y 是 x 的正比例函数的是 ()

A. $y = \frac{1}{x}$

B. $y = 2x^2$

C. $y = 3x + 1$

D. $y = \frac{x}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查正比例函数的定义, 正比例函数的定义为形如 $y = kx$ (k 为常数且 $k \neq 0$) 的函数, 据此求解即可.

【详解】选项 A: $y = \frac{1}{x}$, x 位于分母, 不是正比例函数, 不符合定义.

选项 B: $y = 2x^2$, x 的次数为 2, 不是正比例函数, 不符合定义.

选项 C: $y = 3x + 1$, 含常数项 +1, 属于一次函数但非正比例函数.

选项 D: $y = \frac{x}{2}$, 可化简为 $y = \frac{1}{2}x$, 符合 $y = kx$ 的形式, k 为 $\frac{1}{2}$, 是正比例函数.

故选: D.

14. 一次空气污染指数抽查中, 收集到一周的数据如下: 70, 70, 63, 82, 91, 91, 75. 该组数据的中位数是 ()

A. 63

B. 82

C. 91

D. 75

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了中位数的含义. 注意找中位数的时候一定要先排好顺序, 然后再根据奇数和偶数个来确定中位数, 如果数据有奇数个, 则正中间的数字即为所求, 如果是偶数个则找中间两位数的平均数. 找中位数要把数据按从小到大的顺序排列, 位于最中间的一个数 (或两个数的平均数) 为中位数, 根据定义求解即可.

【详解】解: 将这组数据重新排序为: 63, 70, 70, 75, 82, 91, 91,
则其中位数为 75,

故选: D.

15. 下列各组数据中能作为直角三角形的三边长的是 ()

A. $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$

B. 1, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$

C. 4, 5, 6

D. 1, 1, $\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理逆定理，关键是掌握如果三角形的三边长 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，那么这个三角形就是直角三角形，据此先求出两小边的平方和，再求出最长边的平方，最后看看是否相等即可。

【详解】 解：A、 $\because (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{4})^2 = 3 + 4 = 7 \neq (\sqrt{5})^2 = 5$ ，

$\therefore \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$ 不可以作为直角三角形的三边长，故此选项不符合题意；

B、 $\because 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3 = (\sqrt{3})^2$ ，

$\therefore 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 可以作为直角三角形的三边长，故此选项符合题意；

C、 $\because 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41 \neq 6^2 = 36$ ，

$\therefore 4, 5, 6$ 不可以作为直角三角形的三边长，故此选项不符合题意；

D、 $\because 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \neq (\sqrt{3})^2 = 3$ ，

$\therefore 1, 1, \sqrt{3}$ 不可以作为直角三角形的三边长，故此选项不符合题意；

故选：B.

16. 下列一次函数中， y 的值随 x 值的增大而减小的是 ()

A. $y = 4x - 8$

B. $y = -x + 3$

C. $y = 2x + 5$

D. $y = 7x - 6$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的增减性，根据一次函数 $y = kx + b$ 的性质，当 $k > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，只需判断各选项中 k 的正负即可作答。

【详解】 解：A、 $y = 4x - 8$ ， $k = 4 > 0$ ，故 y 随 x 增大而增大，不符合题意；

B、 $y = -x + 3$ ， $k = -1 < 0$ ，故 y 随 x 增大而减小，符合题意；

C、 $y = 2x + 5$ ， $k = 2 > 0$ ，故 y 随 x 增大而增大，不符合题意；

D、 $y = 7x - 6$ ， $k = 7 > 0$ ，故 y 随 x 增大而增大，不符合题意；

故选：B

17. 一次演讲比赛中，评委将从演讲内容、演讲能力、演讲效果三个方面为选手打分。各项成绩均按百分制计，然后再按演讲内容占 50%、演讲能力占 40%、演讲效果占 10% 计算选手的综合成绩（百分制）。某选手上述三项成绩分别为 90 分，92 分，94 分。这名选手的综合成绩为 ()

A. 91.2 分

B. 92 分

C. 93.1 分

D. 94 分

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了加权平均数的计算，熟练掌握公式是解题的关键．根据加权平均数计算公式进行计算，即可求解．

【详解】 解： $50\% \times 90 + 40\% \times 92 + 10\% \times 94 = 91.2$

故选： A．

18. 下列说法正确的是（ ）

- A. 菱形的四个内角都是直角
B. 矩形的对角线互相垂直
C. 正方形的每一条对角线平分一组对角
D. 平行四边形是轴对称图形

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据菱形的性质、矩形的性质、正方形的性质、平行四边形的性质和轴对称图形的定义即可求解．

【详解】 解： A. 菱形的四个内角不一定是直角，不符合题意；

B. 矩形的对角线不一定互相垂直，不符合题意；

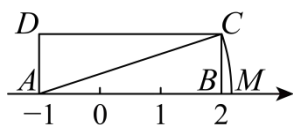
C. 正方形的每一条对角线平分一组对角，正确，符合题意；

D. 平行四边形不一定是轴对称图形，不符合题意；

故选： C．

【点睛】 本题考查了菱形的性质、矩形的性质、正方形的性质、平行四边形的性质和轴对称图形的定义，熟练掌握基础知识是解题的关键．

19. 如图，长方形中， $AB = 3$ ， $AD = 1$ ， AB 在数轴上，若以点 A 为圆心， AC 的长为半径作弧交数轴于点 M，则点 M 表示的数为（ ）



- A. $\sqrt{10}$
B. $\sqrt{10} - 1$
C. $\sqrt{5}$
D. $\sqrt{5} - 1$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了实数与数轴、勾股定理，由题意可得 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AC = AM$ ， $BC = AD = 1$ ，再由勾股定理求出 $AM = AC = \sqrt{10}$ ，即可得解．

【详解】 解： 由题意可得： $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AC = AM$ ， $BC = AD = 1$ ，

$$\because AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore AM = AC = \sqrt{10},$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 表示的数为 } \sqrt{10} - 1,$$

故选: B.

20. 我国古代《四元玉鉴》中记载“二果问价”问题, 其内容如下: 九百九十九文钱, 甜果苦果买一千, 甜果九个十一文, 苦果七个四文钱, 试问甜苦果几个, 又问各该几个钱? 若设买甜果 x 个, 买苦果 y 个, 则下列关于 x, y 的二元一次方程组中符合题意的是 ()

A.
$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ 99x + 28y = 999 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{9}{11}x + \frac{7}{4}y = 999 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x + y = 999 \\ \frac{9}{11}x + \frac{7}{4}y = 1000 \end{cases}$$

【答案】 C

【解析】

【分析】“甜果苦果买一千”可得甜果个数+苦果个数=1000, 可列出一个方程; 又根据“甜果九个十一文, 苦果七个四文钱”可得甜果和苦果的单价, 根据共花费“九百九十九文钱”可得买甜果的钱数+买苦果的钱数=999. 据此可得另一个方程. 联立组成方程组即可.

【详解】解: 由题意可得:
$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{11}{9}x + \frac{4}{7}y = 999 \end{cases},$$

故选: C.

【点睛】本题考查由实际问题抽象出二元一次方程组, 解答本题的关键是明确题意, 找到等量关系, 列出相应的方程组.

三、解答题 (47 分)

21. 某数学兴趣小组的同学在学习了《图形的相似》之后, 对三角形的相似问题进行深入探究.

【感知问题】

如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 P 在边 AB 上 (点 P 不与 A, B 重合), $\angle A = \angle B = \angle DPC = 90^\circ$. 易证: $\triangle DAP \sim \triangle PBC$. (不需要证明)

【探究问题】

如图 2, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 P 在边 AB 上 (点 P 不与点 A, B 重合), $\angle A = \angle B = \angle DPC$. 求证:
 $\triangle DAP \sim \triangle PBC$.

【知识应用】

如图 3, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 6$, $AB = 7$. 点 P 在边 AB 上 (点 P 不与点 A, B 重合), 连接 CP , 作 $\angle CPE = \angle A$, PE 与边 BC 交于点 E .

- (1) 当 $CE = 2EB$ 时, 求 AP 的长;
- (2) 当 $\triangle CPE$ 是等腰三角形时, 求 AP 的长.

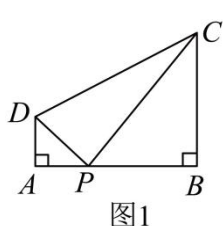


图1

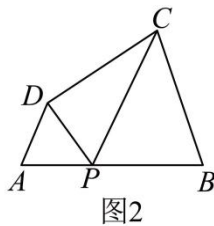


图2

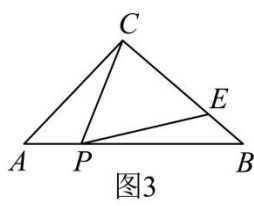


图3

【答案】【探究问题】见解析 【知识应用】(1) $AP = 3$ 或 $AP = 4$ (2) $AP = \frac{13}{7}$ 或 $AP = 1$

【解析】

【分析】探究问题: 利用三角形外角的性质, 得到 $\angle CPB = \angle ADP$, 即可求解;

知识应用: (1) 通过三角形外角的性质, 得到 $\triangle PBE \sim \triangle CAP$, 利用相似三角形的性质, 求解即可; (2) 分两种情况, $CP = PE$ 、 $CE = PE$, 分别求解即可.

【详解】【探究问题】解: 证明: 由三角形外角的性质可得:

$$\angle DPB = \angle DPC + \angle CPB = \angle A + \angle ADP,$$

$$\because \angle A = \angle DPC,$$

$$\therefore \angle CPB = \angle ADP,$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle B,$$

$$\therefore \triangle PBC \sim \triangle DAP;$$

【知识应用】

解: (1) 设 $AP = x$, 则 $BP = 7 - x$,

$$\because AB = AC = 6, CE = 2BE,$$

$$\therefore \angle A = \angle B, BE = 2, CE = 4,$$

$$\because \angle CPE = \angle A, \angle CPB = \angle CPE + \angle EPB = \angle ACP + \angle A,$$

$$\therefore \angle EPB = \angle ACP,$$

$$\therefore \triangle PBE \sim \triangle CAP,$$

$$\therefore \frac{PB}{AC} = \frac{BE}{AP},$$

$$\text{即 } \frac{7-x}{6} = \frac{2}{x},$$

$$\text{化简可得: } x^2 - 7x + 12 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 3 \text{ 或 } x = 4,$$

$$\text{即 } AP = 3 \text{ 或 } AP = 4;$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可得, } \angle CPE = \angle A = \angle B,$$

$$\therefore \angle CEP = \angle B + \angle EPB > \angle CPE,$$

则 $\triangle CPE$ 为等腰三角形, 有两种情况, $CP = PE$ 或 $CE = PE$,

① 当 $CP = PE$ 时,

$$\text{由 (1) 可得, } \angle A = \angle B, \angle EPB = \angle ACP,$$

$$\therefore \triangle PBE \cong \triangle CAP (AAS),$$

$$\therefore BP = AC = 6,$$

$$\therefore AP = AB - BP = 1;$$

② 当 $CE = PE$ 时,

$$\text{可得 } \angle EPC = \angle PCE,$$

$$\text{则 } \angle EPC = \angle PCE = \angle A = \angle B,$$

$$\therefore \triangle EPC \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{CP}{AB}$$

$$\text{设 } OP = PE = x, \text{ 则 } BE = 6 - x,$$

$$\frac{x}{6} = \frac{CP}{7},$$

$$\therefore CP = \frac{7}{6}x$$

由 $\triangle PBE \sim \triangle CAP$ 可得,

$$\frac{PE}{PC} = \frac{PB}{AC},$$

$$\text{即 } \frac{x}{\frac{7}{6}x} = \frac{BP}{6}$$

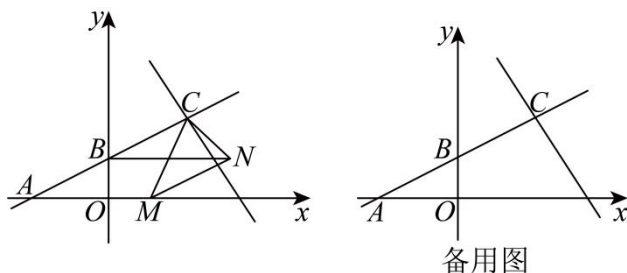
$$\text{解得 } BP = \frac{36}{7},$$

$$AP = AB - BP = \frac{13}{7},$$

综上, $AP = \frac{13}{7}$ 或 $AP = 1$.

【点睛】本题是相似形的综合题,考查了相似三角形的判定与性质,等腰三角形的性质,三角形外角的性质,解一元二次方程,灵活运用分情况讨论思想是解题的关键.

22. 如图, 直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 与 x 轴, y 轴及直线 $y = -\frac{3}{2}x + 5$ 分别交于点 $A(-2, 0)$, B , C .



(1) 求点 B 和点 C 的坐标;

(2) M 为 x 轴上点 A 右侧一动点, 以 AB , AM 为邻边作 $\square ABNM$, 连接 CM , CN .

①求 $CM + CN$ 的最小值;

②在点 M 移动过程中, $\angle CMN$ 能否等于 45° ? 若能, 请求出此时点 M 的坐标; 若不能, 请说明理由.

【答案】(1) $B(0, 1)$, $C(2, 2)$;

(2) ① $CM + CN$ 的最小值为 $\sqrt{13}$; ② $M\left(\frac{4}{3}, 0\right)$.

【解析】

【分析】(1) 先求出直线 AB 的解析式, 再求两直线交点坐标即可;

(2) ①作 C 点关于 x 轴的对称点 G , 连接 MG , 则 $CM = MG$, 过点 G 点作 $GH \parallel AB$, 过点 N 作 $NH \parallel MG$, 交于 H 点, 则四边形 $MGHN$ 是平行四边形, $MG = HN$, 根据 $AB \parallel GH$, $AB = GH$, 求出 $H(4, -1)$, 则 $CM + CN$ 的最小值为 CH 的长;

②过点 C 作 $CQ \perp MC$ 交 MN 于点 Q , 过 C 点作 $EF \parallel x$ 轴, 过点 M 作 $ME \perp EF$ 交于 E 点, 过点 Q 作 $QF \perp EF$ 交于 F 点, 证明 $\triangle CME \cong \triangle QCF$ (AAS), 设 $M(m, 0)$, 则 $Q(4, m)$, Q 点在直线 MN 上, 可得 $2 - \frac{1}{2}m = m$, 求出 m 即可求 M 点坐标.

【小问 1 详解】

解: 将点 $A(-2, 0)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x + b$,

$$\therefore -1+b=0,$$

解得 $b=1$,

$$\therefore y=\frac{1}{2}x+1,$$

当 $x=0$ 时, $y=1$,

$$\therefore B(0,1),$$

当 $-\frac{3}{2}x+5=\frac{1}{2}x+1$ 时, 解得 $x=2$,

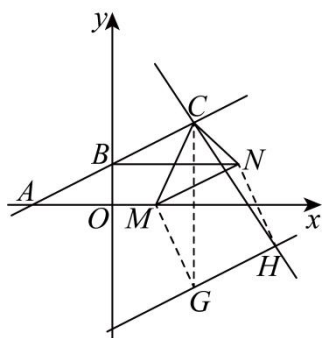
$$\therefore y=\frac{1}{2}\times 2+1=2,$$

$$\therefore C(2,2);$$

【小问2详解】

解: ①作 C 点关于 x 轴的对称点 G , 连接 MG , 则 $CM=MG$,

过点 G 点作 $GH\parallel AB$, 过点 N 作 $NH\parallel MG$, 交于 H 点,



$\therefore$ 四边形 $MGHN$ 是平行四边形,

$$\therefore MG=HN,$$

$\therefore$ 四边形 $ABMN$ 是平行四边形,

$$\therefore AB\parallel MN, \quad AB=MN=\sqrt{5},$$

$$\therefore C(2,2),$$

$$\therefore G(2,-2),$$

$$\therefore AB=MN=GH,$$

$$\therefore \text{由平移可得: } H(4,-1),$$

$$\therefore CM+CN=NH+CN\geq CH,$$

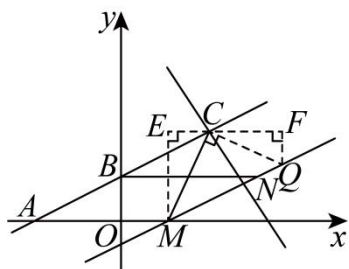
$\therefore CM+CN$ 的最小值为 CH 的长,

$$\therefore CH = \sqrt{(4-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{13},$$

$\therefore CM + CN$ 的最小值为 $\sqrt{13}$;

② $\angle CMN$ 能等于 45° , 理由如下:

过点 C 作 $CQ \perp MC$ 交 MN 于点 Q , 过 C 点作 $EF \parallel x$ 轴, 过点 M 作 $ME \perp EF$ 交于 E 点, 过点 Q 作 $QF \perp EF$ 交 EC 于 F 点,



$$\therefore \angle CMN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CQM = 90^\circ - \angle CMN = 45^\circ = \angle CMN,$$

$$\therefore MC = CQ,$$

$$\therefore \angle ECM + \angle FCQ = 90^\circ, \quad \angle ECM + \angle CME = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FCQ = \angle CME,$$

$$\therefore \triangle CME \cong \triangle QCF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore EC = FQ, \quad EM = CF = 2,$$

设 $M(m, 0)$,

$$\therefore Q(4, m),$$

$$\therefore AB \parallel MN,$$

$$\therefore \text{直线 } MN \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}m,$$

$$\therefore 2 - \frac{1}{2}m = m,$$

$$\text{解得 } m = \frac{4}{3},$$

$$\therefore M\left(\frac{4}{3}, 0\right).$$

【点睛】 本题考查一次函数的图象及性质、等腰三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、坐标与

图形、平行四边形的性质、轴对称求最短距离等知识，熟练掌握一次函数的图象及性质，轴对称求最短距离，三角形全等的判定及性质是解题的关键。

23. 在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在边 BC 上，将线段 AE 绕点 E 顺时针旋转 90° ，点 A 的对应点 F 恰好落在 CD 上。

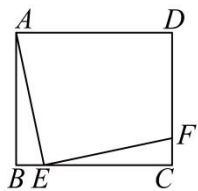


图1

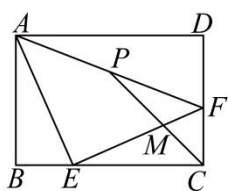


图2

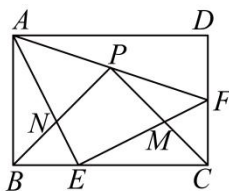


图3

(1) 如图 1，求证： $CE = CD$ ；

(2) 连接 AF ，作 $\angle BCD$ 的平分线交 AF 于点 P ，交 EF 于点 M 。

①如图 2，判断点 P 是否为线段 AF 的中点，并说明理由；

②如图 3，连接 PB 交 AE 于点 N ，若 $DF = CF = 1$ ，求 PN 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) ①点 P 为线段 AF 的中点，理由见解析，② $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质及旋转的性质，证明 $\triangle ABE \cong \triangle ECF$ (AAS)，即可得证；

(2) ①连接 PE ，根据题意及角平分线的定义，证明 $\triangle EMC \sim \triangle PMF$ ，得到 $\frac{EM}{PM} = \frac{CM}{FM}$ ，进而证明 $\triangle PME \sim \triangle FMC$ ，得到 $PE \perp AF$ ，即可解答；

②连接 PE ，根据题意及角的等量代换证明 $\triangle PBE \cong \triangle PCF$ (SAS)，利用解直角三角形及勾股定理求出 PB 、 AF 、 AB ，进而证明 $\triangle APN \sim \triangle BPA$ ，列出比例式，代入 AP 、 BP 即可解答。

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB = CD$ ， $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\because$ 将线段 AE 绕点 E 顺时针旋转 90° 得到线段 EF ，

$\therefore AE = EF$ ， $\angle AEF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAE + \angle AEB = \angle AEB + \angle CEF$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle CEF$ ，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ECF$ (AAS)，

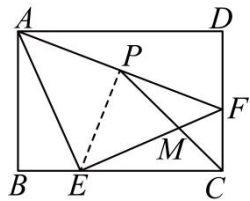
$\therefore AB = CE$ ，

$$\therefore CE = CD.$$

【小问2详解】

解：①点 P 为线段 AF 的中点，理由如下：

如图，连接 PE ，



$$\because \angle AEF = 90^\circ, \quad AE = EF,$$

$$\therefore \angle PAE = \angle PFE = 45^\circ,$$

$$\because CP \text{ 平分 } \angle BCD, \quad \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PCE = \angle PCF = \angle PFE = 45^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle EMC = \angle PMF,$$

$$\therefore \triangle EMC \sim \triangle PMF,$$

$$\therefore \frac{EM}{PM} = \frac{CM}{FM},$$

$$\text{又} \because \angle PME = \angle FMC,$$

$$\therefore \triangle PME \sim \triangle FMC,$$

$$\therefore \angle PEF = \angle PCF = 45^\circ,$$

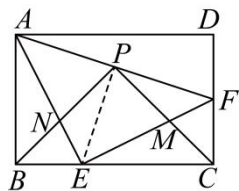
$$\therefore \angle APE = \angle PEF + \angle PFE = 90^\circ,$$

$$\therefore PE \perp AF,$$

$\therefore$ 点 P 是线段 AF 的中点.

②如图，连接 PE ， $PE \perp AF$ ， $\angle AEF = 90^\circ$ ， $AE = FE$ ，

$$\therefore PE = PA = PF, \quad \angle AEP = \angle FEP = 45^\circ,$$



$$\because DF = CF = 1,$$

$$\therefore CE = CD = 2, \quad BE = CF = 1, \quad BC = 3,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ECF,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EFC,$$

$$\therefore \angle PEA = \angle PAE = \angle PFE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB + \angle PEA = \angle EFC + \angle PFE,$$

$$\text{即 } \angle PEB = \angle PFC,$$

$$\text{又 } \because PE = PF,$$

$$\therefore \triangle PBE \cong \triangle PCF (\text{SAS}),$$

$$\therefore PB = PC,$$

$$\therefore \angle PBE = \angle PCE = 45^\circ, \quad \angle BPC = 90^\circ,$$

$$\therefore PB = BC \tan 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore AP = \frac{1}{2} AF = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore \angle PBA = 90^\circ - \angle PBE = 45^\circ = \angle PAE, \quad \angle APN = \angle BPA,$$

$$\therefore \triangle APN \sim \triangle BPA,$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{PN}{AP},$$

$$\therefore PN = \frac{AP^2}{BP} = \frac{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{6}.$$

【点睛】 本题考查四边形的综合应用，主要考查矩形的性质，勾股定理，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，旋转的性质，角平分线的定义，三角函数的应用，掌握矩形的性质，勾股定理，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，旋转的性质是解题的关键.