

2024 学年第二学期八年级数学学科期终考试卷

(100 分钟完成, 满分 100 分)

一、单项选择题 (本大题共有 6 题, 每题 2 分, 共 12 分)

1. 下列函数中, y 是 x 的一次函数的是 ()

A. $y = \frac{1}{x}$

B. $y = x - 3$

C. $x = 2$

D. $y = x^2 + 1$

【答案】 B

【解析】

【详解】 此题考查了一次函数. 形如 $y = kx + b$ (k 、 b 为常数, 且 $k \neq 0$) 的函数为一次函数. 根据一次函数的定义判断即可.

【分析】 解: A. $y = \frac{1}{x}$, 分母含 x , 不符合一次函数形式;

B. $y = x - 3$, 符合 $y = kx + b$ ($k = 1$, $b = -3$), 是一次函数;

C. $x = 2$, 不符合一次函数形式;

D. $y = x^2 + 1$, 含 x 的二次项, 不符合一次函数形式.

故选: B.

2. 下列关于 x 的方程中, 属于整式方程的是 ()

A. $\sqrt{2} - x^2 = 0$

B. $\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 = 0$

C. $\frac{x-1}{x} = 0$

D. $\sqrt{x^2 + 2} = 0$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了整式方程的定义, 解题关键是理解整式方程的定义. 根据整式方程的定义, 需逐一分析各方程再作判断.

【详解】 解: $\sqrt{2} - x^2 = 0$ 是整式方程, 故 A 符合;

$\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 = 0$ 不是整式方程, 故 B 不符合;

$\frac{x-1}{x} = 0$ 不是整式方程, 故 C 不符合;

$\sqrt{x^2 + 2} = 0$ 不是整式方程, 故 D 不符合,

故选: A.

3. 下列事件中, 属于必然事件的是 ()

- A. 一次函数的图像经过原点
- B. 关于 x 的方程 $ax+b=0$ 有解
- C. 直线 $y=2x+1$ 与坐标轴有 2 个交点
- D. 投掷一枚骰子, 恰好数字 6 朝上

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查事件的分类, 必然事件指在一定条件下必然发生的事件. 逐一分析各选项是否符合必然事件的定义.

【详解】解: A: 一次函数的一般式为 $y=kx+b$, 当且仅当 $b=0$ 时图像经过原点. 若 $b \neq 0$, 则不过原点, 因此该事件是随机事件.

B: 方程 $ax+b=0$ 的解需分情况讨论. 当 $a \neq 0$ 时, 方程有唯一解; 当 $a=0$ 且 $b=0$ 时, 方程有无数解; 当 $a=0$ 且 $b \neq 0$ 时, 方程无解. 因此该事件可能发生也可能不发生, 非必然.

C: 直线 $y=2x+1$ 与 y 轴交于 $(0,1)$, 与 x 轴交于 $(-\frac{1}{2}, 0)$, 必定与坐标轴有 2 个交点, 属于必然事件.

D: 骰子有 6 个面, 数字 6 朝上的概率为 $\frac{1}{6}$, 属于随机事件, 非必然.

故选: C.

4. 下列式子中, 正确的是 ()

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$
- B. $|\overrightarrow{AB}| = -|\overrightarrow{BA}|$
- C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
- D. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查向量的基本性质, 包括相反向量、模长及向量运算. 需逐一分析各选项的正确性.

【详解】解: A、 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为相反向量, 故 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$. 但选项右侧为标量 0, 而非零向量 $\vec{0}$, 因此错误.

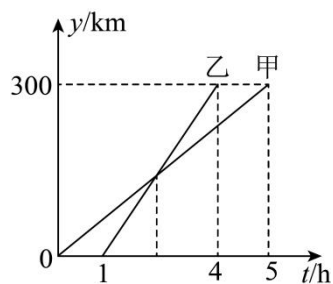
B、向量的模长为非负数, 而 $-|\overrightarrow{BA}|$ 为负数或零, 显然 $|\overrightarrow{AB}| \neq -|\overrightarrow{BA}|$ (除非模长为 0, 但一般非零), 故错误.

C、 $\because \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$, 显然不等于 $\vec{0}$, 故错误.

D、向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 方向相反、长度相等, 满足 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, 故正确.

故选: D.

5. 甲、乙两车沿着相同路线从A地前往B地，两车行驶的路程 $y(\text{km})$ 与甲车出发后的时间 $t(\text{h})$ 的对应关系如图所示，那么下列结论中错误的是（ ）



- A. 甲车的平均速度为 60km/h B. 乙车的平均速度为 100km/h
C. 在甲车出发 2 小时后两车相遇 D. 乙比甲车先到达 B 地

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查实际问题的函数图象，解题的关键是读懂题意，能从图象中获取有用的信息. 根据图象中的信息逐项求解即可.

【详解】由图象可得，甲车的平均速度为 $300 \div 5 = 60\text{km/h}$ ，故 A 正确；

乙车的平均速度为 $300 \div (4-1) = 100\text{km/h}$ ，故 B 正确；

根据题意得， $60t = 100t - 100$

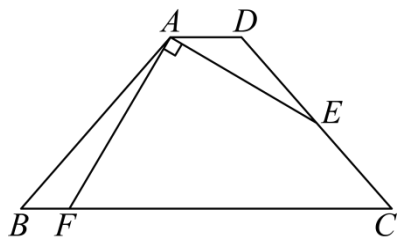
解得 $t = 2.5$ ，

$\therefore$ 在甲车出发 2.5 小时后两车相遇，故 C 错误；

由图象可得，乙比甲车先到达 B 地，故 D 正确；

故选：C.

6. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = CD$ ，点 E 为 CD 中点，联结 AE ，作 $AF \perp AE$ 交 BC 于点 F . 如果 $AD = \sqrt{2}$ ， $AE = 2\sqrt{3}$ ，且 $\angle DAE = 30^\circ$ ，那么 BF 的长为. ()



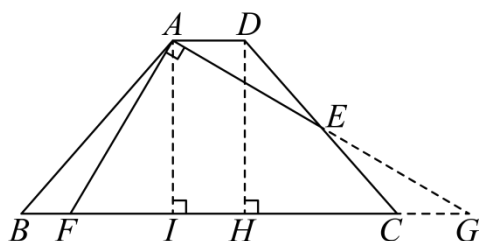
- A. $4 - \sqrt{2}$ B. $6 - \sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3} - 2$ D. $4 - 2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的性质与判定，勾股定理，矩形的性质与判定，含 30° 度角的直角三角形的性质，过点 A 作 $AI \perp BC$ 于 I ，过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H ，延长 AE ， BC 交于 G ，可证明 $\triangle ADE \cong \triangle GCE$ 得到 $GE = AE = 2\sqrt{3}$ ， $\angle G = \angle DAE = 30^\circ$ ， $CG = AD = \sqrt{2}$ ，则 $AG = 4\sqrt{3}$ ，据此可求出 $AF = 4$ ，进而得到 $FG = 8$ ；求出 $AI = \frac{1}{2}AG = 2\sqrt{3}$ ，得到 $IG = \sqrt{AG^2 - AI^2} = 6$ ，则 $FI = 2$ ；证明四边形 $ADHI$ 是矩形，得到 $AD = HI = \sqrt{2}$ ， $AI = DH$ ，再证明 $\text{Rt}\triangle ABI \cong \text{Rt}\triangle DCH$ (HL)，可得 $HC = BI = 6 - 2\sqrt{2}$ ，则可求出 $BF = 4 - 2\sqrt{2}$ 。

【详解】 解：如图所示，过点 A 作 $AI \perp BC$ 于 I ，过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H ，延长 AE ， BC 交于 G



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle EAD = \angle EGC$, $\angle EDA = \angle ECG$,

$\because$ 点 E 为 CD 中点,

$\therefore DE = CE$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle GCE$ (AAS)

$\therefore GE = AE = 2\sqrt{3}$, $\angle G = \angle DAE = 30^\circ$, $CG = AD = \sqrt{2}$,

$\therefore AG = 4\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中, $\angle FAG = 90^\circ$, $\angle AGF = 30^\circ$,

$\therefore FG = 2AF$,

$\therefore AG = \sqrt{FG^2 - AF^2} = \sqrt{3}AF = 4\sqrt{3}$,

$\therefore AF = 4$,

$\therefore FG = 8$,

在 $\text{Rt}\triangle AIG$ 中, $\angle AIG = 90^\circ$, $\angle AGI = 30^\circ$,

$\therefore AI = \frac{1}{2}AG = 2\sqrt{3}$,

$\therefore IG = \sqrt{AG^2 - AI^2} = 6$,

$\therefore FI = 2$;

$\because AD \parallel BC, AI \perp BC,$

$\therefore AI \perp AD,$

又 $\because DH \perp BC,$

$\therefore$ 四边形 $ADHI$ 是矩形,

$\therefore AD = HI = \sqrt{2}, AI = DH,$

又 $\because AB = CD,$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABI \cong \text{Rt}\triangle DCH (\text{HL})$

$\therefore HC = BI = GI - IH - CG = 6 - 2\sqrt{2}$

$\therefore BF = 6 - 2\sqrt{2} - 2 = 4 - 2\sqrt{2}.$

故选: D.

二、填空题 (本大题共有 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 直线 $y = 3x + 1$ 的截距是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的性质, 关键是明白截距的概念, 以及求法. 根据函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的截距就是 b , 进行作答即可.

【详解】 解: 依题意, 直线 $y = 3x + 1$ 的截距是 1,

故答案为: 1.

8. 将一次函数 $y = 2x - 2$ 的图像向上平移 3 个单位, 平移后得到的新的函数解析式是_____.

【答案】 $y = 2x + 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的图象的平移, 根据函数图象平移的原则“上加下减, 左加右减”的原则进行解答即可.

【详解】 解: 将一次函数 $y = 2x - 2$ 的图像向上平移 3 个单位, 平移后得到的新的函数解析式是

$y = 2x - 2 + 3 = 2x + 1,$

故答案为: $y = 2x + 1$

9. 已知直线 $y = (k+1)x - 1$ 与直线 $y = -2x$ 平行, 那么 $k =$ _____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 此题考查了两条直线平行的条件: k 值相等, b 值不相等, 解题的关键是熟练掌握两直线平行的条件.

根据平行的两直线的解析式的一次项系数相等, 即可求解.

【详解】 解: $\because$ 直线 $y = (k+1)x - 1$ 与直线 $y = -2x$ 平行,

$$\therefore k+1 = -2,$$

$$\text{解得 } k = -3,$$

故答案为: -3 .

10. 方程 $x^3 - 8 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求立方根的方法解方程, 先把常数项移到方程右边, 再把方程两边同时开立方即可得到答案.

【详解】 解: $\because x^3 - 8 = 0,$

$$\therefore x^3 = 8,$$

$$\therefore x = 2,$$

故答案为: $x = 2$.

11. 方程 $\sqrt{x+4} = x-2$ 的根是_____.

【答案】 $x = 5$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程, 先把原式整理得 $x^2 - 5x = 0$, 再运用因式分解法进行解方程, 最后验根, 即可作答.

【详解】 解: $\sqrt{x+4} = x-2,$

$$x+4 = (x-2)^2,$$

$$x+4=x^2-4x+4,$$

$$x^2-5x=0,$$

$$x(x-5)=0,$$

$$x_1=0, x_2=5,$$

经检验: $x=0$, $\sqrt{0+4}=2 \neq x-2=0-2=-2$, 故 $x=0$ 是方程增根, 舍去;

$\therefore$ 原方程的根为 $x=5$

故答案为: $x=5$

12. 已知关于 x 的方程 $\frac{x}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x} = 1$, 如果设 $\frac{x}{x^2-1} = y$, 那么原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2-y-1=0$

【解析】

【分析】 根据题意, 用含 y 的式子表示出方程并整理方程即可.

【详解】 解: 设 $\frac{x}{x^2-1} = y$, 则 $\frac{x^2-1}{x} = \frac{1}{y}$,

$\therefore$ 原方程可变形为: $y - \frac{1}{y} = 1$,

去分母, 得: $y^2-y-1=0$,

故答案为: $y^2-y-1=0$.

【点睛】 本题考查了换元法. 换元法解方程一般四步: 设元 (未知数), 换元, 解元, 还元.

13. 一个正多边形的每个外角为 60° , 那么这个正多边形的内角和是_____.

【答案】 720° 度

【解析】

【分析】 先利用多边形的外角和为 360° 计算出这个正多边形的边数, 然后再根据内角和公式进行求解即可.

【详解】 这个正多边形的边数为 $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$,

所以这个正多边形的内角和是 $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$,

故答案为: 720° .

【点睛】 本题考查了多边形内角与外角: 内角和定理: $(n-2) \cdot 180^\circ$ ($n \geq 3$ 且 n 为整数); 多边形的外角和等于 360° 度.

14. 在一个不透明的盒子中放入编号为 1、2、3、4、5、6、7 的七个球，它们除标号以外完全相同。充分混合后，从中取出一个球，标号为奇数的概率是_____。

【答案】 $\frac{4}{7}$

【解析】

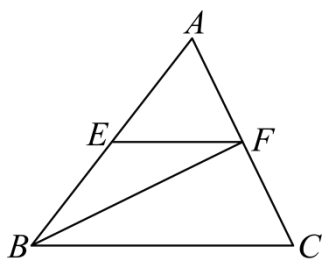
【分析】 本题主要考查概率公式，随机事件 A 的概率等于事件 A 可能出现的结果数与所有可能出现的结果数的商成为解题的关键。

随机摸出一个小球共有 7 种等可能结果，其中摸出标号为奇数的有 4 种结果，再根据概率公式求解即可。

【详解】 解：在一个不透明的盒子中放入编号为 1、2、3、4、5、6、7 的七个球，充分混合后，从中取出一个球，标号为奇数的有 1、3、5、7 共 4 种，所以标号为奇数的概率是 $\frac{4}{7}$ 。

故答案为： $\frac{4}{7}$ 。

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， E 、 F 分别是 AB 、 AC 的中点，且 BF 平分 $\angle ABC$ 。如果 $AE = 6$ ，那么 BC 的长等于_____。



【答案】 12

【解析】

【分析】 根据三角形中位线定理可得出 $EF = \frac{1}{2}BC$ ， $EF \parallel BC$ ，结合平行线的性质和角平分线的定义得出 $\angle EFB = \angle EBF$ ，即可证 $EF = BE = AE = 6$ ，即得出 $BC = 2EF = 12$ 。

【详解】 解： $\because$ 点 E 、 F 分别是 AB 、 AC 的中点，

$$\therefore BE = AE = 6, EF = \frac{1}{2}BC, EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EFB = \angle CBF.$$

$$\because BF \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle EBF,$$

$$\therefore \angle EFB = \angle EBF,$$

$$\therefore EF = BE = AE = 6,$$

$$\therefore BC = 2EF = 12.$$

故答案为：12.

【点睛】本题考查三角形中位线定理，平行线的性质，角平分线的定义，等腰三角形的判定和性质，熟记三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半是解题的关键.

16. 平行四边形两邻边的长分别为 20 和 16，两条长边的距离是 10，那么两条短边的距离等于_____.

【答案】 $\frac{25}{2}$ 或 $12\frac{1}{2}$ 或 12.5

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质，理解两条长边的距离和两条短边的距离即为分别以长边和短边为底时该平行四边形的高是解题关键. 根据平行四边形面积的求法列方程求解即可.

【详解】解：设两条短边的距离为 h ,

以长边为底，该平行四边形的面积为 $20 \times 10 = 200$ ；以短边为底，该平行四边形的面积为 $16h$,

$$\therefore 16h = 200,$$

$$\therefore h = \frac{25}{2}.$$

故答案为： $\frac{25}{2}$.

17. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于任意一点 M ，给出如下定义：点 M 到 x 轴、 y 轴的距离中的较小值叫做点 M 的“短距”. 如果点 P 和点 Q 的短距相等，那么称 P 、 Q 两点为“等距点”. 例如点 $P(5,2)$ 与点 $Q(-2,-3)$ 为“等距点”. 已知点 A 的坐标为 $(1,4)$ ，如果点 B 在第三象限，且在直线 $y = x - 1$ 上，且 A 、 B 两点为“等距点”，那么点 B 的坐标是_____.

【答案】 $(-1,-2)$

【解析】

【分析】本题主要考查了新定义，求一次函数的函数值和自变量的值，点到坐标轴的距离，根据定义可得点 A 的“短距”为 1，则点 B 到 x 轴的距离为 1 或点 B 到 y 轴的距离为 1，据此求出点 B 的坐标，再验证其“短距”是否为 1 即可.

【详解】解： $\because$ 点 A 的坐标为 $(1,4)$,

$\therefore$ 点 A 到 x 轴的距离为 4，到 y 轴的距离为 1,

$$\therefore 1 < 4,$$

$\therefore$ 点 A 的“短距”为 1,

$\therefore A$ 、 B 两点为“等距点”，

$\therefore$ 点 B 到 x 轴的距离为 1 或点 B 到 y 轴的距离为 1,

$\therefore$ 点 B 在第三象限,

$\therefore$ 点 B 的横纵坐标都为负,

在 $y = x - 1$ 中, 当 $x = -1$ 时, $y = -2$, 此时 $B(-1, -2)$,

$$\therefore |-1| = 1 < |-2| = 2,$$

$\therefore$ 此时点 B 的“短距”为 1, 符合题意;

当 $y = -1$ 时, $x = 0$, 此时 $B(0, -1)$,

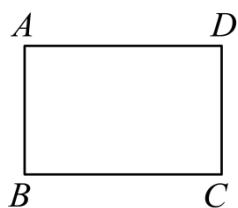
$$\therefore |-1| = 1 > |0| = 0,$$

$\therefore$ 此时点 B 的“短距”为 0, 不符合题意;

$$\therefore B(-1, -2),$$

故答案为: $(-1, -2)$.

18. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 6$, 点 E 在边 AD 上 (点 E 与点 A 、 D 不重合), 将 $\triangle CDE$ 沿直线 CE 翻折, 点 D 的对应点为点 G , 连接 EG , EG 的延长线交边 BC 于点 F , 如果 $BF = 1$, 那么 DE 的长为_____.

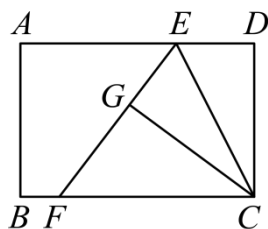


【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了折叠的性质, 矩形的性质, 勾股定理, 等积转换; 由勾股定理得 $FG = \sqrt{CF^2 - CG^2} = 3$, 由三角形的面积得 $\frac{1}{2}EF \cdot CG = \frac{1}{2}CF \cdot CD$, 即可求解; 掌握性质, 能用三角形面积转化求解是解题的关键.

【详解】解: 如图,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle D = 90^\circ,$$

$$CD = AB = 4,$$

$$BC = AD = 6,$$

由翻折得: $CG = CD = 4,$

$$\angle CGE = \angle D = 90^\circ,$$

$$EG = DE,$$

$$\therefore \angle CGF = 90^\circ,$$

$$\because BF = 1,$$

$$\therefore CF = BC - BF = 5,$$

$$\therefore FG = \sqrt{CF^2 - CG^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - 4^2}$$

$$= 3,$$

$$\therefore \frac{1}{2}EF \cdot CG = \frac{1}{2}CF \cdot CD,$$

$$\therefore \frac{1}{2}(3 + EG) \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times 4,$$

解得: $EG = 2,$

$$\therefore DE = 2,$$

故答案: 2.

三、简答题 (本大题共有 4 题, 每题 6 分, 满分 24 分)

19. 解方程: $\frac{2x}{x+3} - \frac{18}{x^2+3x} = 1.$

【答案】 $x = 6$

【解析】

【分析】本题考查解分式方程, 解一元二次方程, 掌握分式方程和一元二次方程的解法和步骤是解题关键. 将原分式方程化为整式方程, 再根据因式分解法解一元二次方程, 最后检验即可.

【详解】解: $\frac{2x}{x+3} - \frac{18}{x^2+3x} = 1,$

$$2x^2 - 18 = x^2 + 3x,$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0,$$

$$(x+3)(x-6) = 0,$$

$$x_1 = -3, x_2 = 6.$$

经检验: $x_1 = -3$ 是原方程的增根, 舍去; $x_2 = 6$ 是原方程的解

所以原方程的解是 $x = 6$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x^2 - xy - 2y^2 = 2 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题主要考出了解方程组, 将原方程化成 $\begin{cases} x - 2y = 1 \textcircled{1} \\ x + y = 2 \textcircled{2} \end{cases}$ 成为解题的关键.

先将原方程组化成 $\begin{cases} x - 2y = 1 \textcircled{1} \\ x + y = 2 \textcircled{2} \end{cases}$, 然后运用加减消元法求解即可.

【详解】 解: $\because x^2 - xy - 2y^2 = 2$,

$$\therefore (x - 2y)(x + y) = 2,$$

$$\because x - 2y = 1,$$

$$\therefore x + y = 2,$$

原方程组化为 $\begin{cases} x - 2y = 1 \textcircled{1} \\ x + y = 2 \textcircled{2} \end{cases}$,

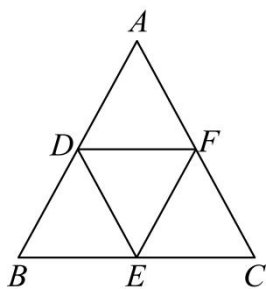
$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 得: } 3y = 1, \text{ 解得: } y = \frac{1}{3};$$

把 $y = \frac{1}{3}$ 代入 $\textcircled{2}$ 可得: $x + \frac{1}{3} = 2$, 解得: $x = \frac{5}{3}$,

该方程组的解为 $\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 、 F 分别是边 AB 、 BC 、 CA 的中点.



- (1) 写出图中所有与 $\overrightarrow{BE}$ 相等的向量: _____;
- (2) 填空: $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CF} =$ _____;
- (3) 求作: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EB}$. (不要求写作法, 但要写出结论)

【答案】(1) $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{EC}$

(2) 0 (3) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了向量的定义、三角形法则求向量等知识点, 熟练掌握向量的定义以及线性运算是解题的关键.

- (1) 根据中位线的性质得出 $DF \parallel BC$, $DF = \frac{1}{2}BC = BE = EC$, 即可求解;
- (2) 根据三角形法则求向量的和即可解答;
- (3) 连接 AE , 则 $\overrightarrow{AE}$ 即为所求.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 在 ABC 中, 点 D 、 E 、 F 分别是边 AB 、 BC 、 CA 的中点,

$$\therefore DF \parallel BC, DF = \frac{1}{2}BC = BE = EC,$$

$\therefore$ 与 $\overrightarrow{BE}$ 相等的向量是: $\overrightarrow{DF}$ 、 $\overrightarrow{EC}$.

故答案为: $\overrightarrow{DF}$ 、 $\overrightarrow{EC}$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 在 ABC 中, 点 D 、 E 、 F 分别是边 AB 、 BC 、 CA 的中点,

$$\therefore DE \parallel AC, DE = \frac{1}{2}AC = FC,$$

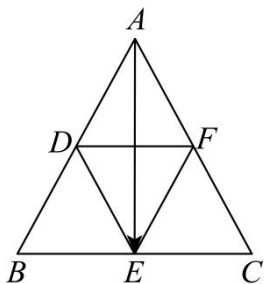
$$\therefore \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{ED},$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE},$$

$$\therefore \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ED} = \mathbf{0}.$$

【小问 3 详解】

解：如图， $\overrightarrow{AE}$ 即为所求，



$$\because \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE},$$

$\therefore \overrightarrow{AE}$ 即为所求.

22. “半马苏河步道”是上海市普陀区依托苏州河岸线打造的城市滨水景观廊道，全长 21 千米. 小普和小陀两位同学沿着该步道行走健身，如果小普的平均步行速度比小陀的平均步行速度快 1 千米/时，并且小普比小陀提前 42 分钟走完全程，请你分别求出小普和小陀的平均步行速度.

【答案】小普的平均步行速度是 6 千米/时，小陀的平均步行速度是 5 千米/时

【解析】

【分析】本题主要考查了分式方程的实际应用，设小普的平均步行速度是 x 千米/时，则小陀的平均步行速度是 $(x-1)$ 千米/时. 根据小普比小陀提前 42 分钟走完全程为等量关系列出分式方程求解即可得出答案.

【详解】解：设小普的平均步行速度是 x 千米/时，则小陀的平均步行速度是 $(x-1)$ 千米/时.

因为 42 分钟 = 0.7 小时，

由题意， $\frac{21}{x-1} - \frac{21}{x} = 0.7$

即 $\frac{30}{x-1} - \frac{30}{x} = 1$

即 $x^2 - x - 30 = 0$

解得 $x_1 = 6$, $x_2 = -5$

经检验： $x_1 = 6$, $x_2 = -5$ 都是原方程的根，

但 $x_2 = -5$ 不合题意，应舍去，

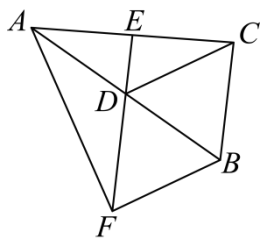
所以小陀的平均步行速度 = $x - 1 = 5$ (千米/时)

答：小普的平均步行速度是 6 千米/时，小陀的平均步行速度是 5 千米/时.

四、解答题 (本大题共 3 题，第 23、24 题每题 8 分，第 25 题 12 分，满分 28 分)

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D ， E 分别为边 AB ， AC 的中点，延长 ED 至点 F ，使得 $DF = 2DE$ ，连接 CD 、

BF .



(1) 求证：四边形 $BCDF$ 是平行四边形；

(2) AF ，如果 $AF = AC$ ，请判断四边形 $BCDF$ 是什么特殊的平行四边形，并证明.

【答案】 (1) 见解析 (2) 四边形 $BCDF$ 是菱形，见解析

【解析】

【分析】 本题考查的是平行四边形的判定及菱形的判定，

(1) 先证明 $DE = \frac{1}{2}BC$ ， $DE \parallel BC$ ，进而得出 $DF = BC$ ，即可证明结论；

(2) 联结 CF ，得出 BD 、 CF 互相平分，进而得出 $AB \perp CF$ ，即可证明结论；

【小问 1 详解】

证明： $\because D, E$ 分别为边 AB, AC 的中点，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC, DE \parallel BC,$$

$$\because DF = 2DE,$$

$$\therefore DF = BC,$$

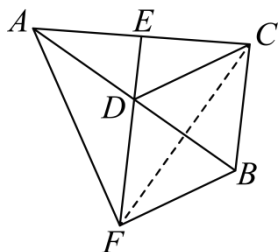
$$\therefore DF \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BCFD$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

解：四边形 $BCDF$ 是菱形.

联结 CF ；



$\therefore$ 四边形 $BCDF$ 是平行四边形，

$\therefore BD$ 、 CF 互相平分，

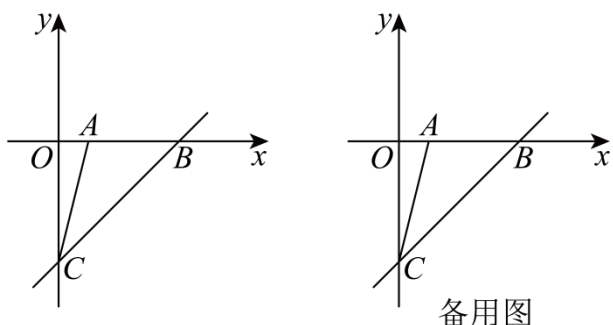
$\therefore AF = AC$ ，

$\therefore AB \perp CF$ ，即 $BD \perp CF$ ，

$\therefore$ 四边形 $BCDF$ 是平行四边形，

$\therefore$ 平行四边形 $BCDF$ 是菱形.

24. 如图，已知点 $A(1,0)$ ，点 $B(4,0)$ ，点 C 在 y 轴负半轴上， $S_{\triangle ABC} = 6$ ，点 P 为直线 BC 上一点.



(1) 直线 BC 的表达式为_____；直线 BC 与 x 轴的夹角等于_____度；

(2) 点 Q 为平面内任一点，如果以点 A 、 B 、 P 、 Q 为顶点的四边形是正方形，直接写出点 Q 的坐标是_____；

(3) 直线 AP 与 y 轴交于点 M ，当 $\triangle PMC$ 的面积是 $\triangle ACP$ 面积的 2 倍时，求出点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = x - 4$ ，45

(2) $(4, -3)$ 或 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ ；

(3) $(2, -2)$ 或 $(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图象及性质、腰直角的判定与性质等知识点，灵活运用二次函数的图象与性质以及数形结合是解题的关键.

(1) 根据 $S_{\triangle ABC} = 6$ ，求出点 C 的坐标，再利用待定系数法求出直线 CB 的解析式即可，再求得 $OB = OC$ ，然后根据等腰直角三角形的性质即可解答；

(2) 分 AB 是正方形的边、 AB 是正方形的对角线两种情况，分别利用正方形性质即可求解；

(3) 当点 M 在 y 轴的正半轴和负半轴时，分别根据三角形等分点的性质列方程组求解即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 $A(1,0)$ ，点 $B(4,0)$ ，

$\therefore AB = 3$ ， $OB = 4$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC} = 6$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times OC = \frac{1}{2} \times 3 \times OC = 6,$$

$$\therefore OC = 4,$$

$\therefore$ 点 C 在 y 轴负半轴上,

$$\therefore C(0, -4),$$

设直线 BC 的解析式是 $y = kx + b$,

$$\begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = -4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 1 \\ b = -4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = x - 4$;

$\therefore OB = OC = 4, \angle BOC = 90^\circ$,

$\therefore$ 直线 BC 与 x 轴的夹角等于 45° .

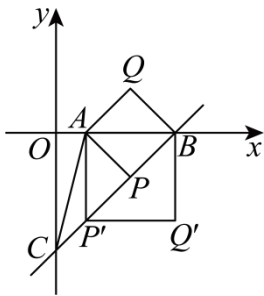
【小问 2 详解】

解: ①当 AB 是正方形的边时, 对应的正方形为 $AP'Q'B$,

$\therefore$ 点 $A(1, 0)$, 点 $B(4, 0)$,

$$\therefore AB = 3,$$

$$\therefore P'(1, -3), Q'(4, -3);$$



②当 AB 是正方形的对角线时, 对应的矩形为 $APBQ$,

$\therefore AB, PQ$ 是正方形对角线,

$\therefore$ 线段 AB 和线段 PQ 互相垂直平分,

$\therefore$ 点 P, Q 的横坐标为 $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$,

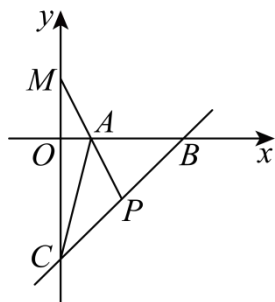
$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right), Q\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

综上所述, Q 点的坐标为 $(4, -3)$ 或 $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$;

【小问 3 详解】

解: 如图: 当点 M 在 y 轴的正半轴时, 此时点 P 在第三象限.

设 $P(t, t-4)$, $M(0, m)$,



$\because \triangle PMC$ 的面积是 $\triangle ACP$ 面积的 2 倍,

$$\therefore S_{\triangle ACP} = S_{\triangle ACM},$$

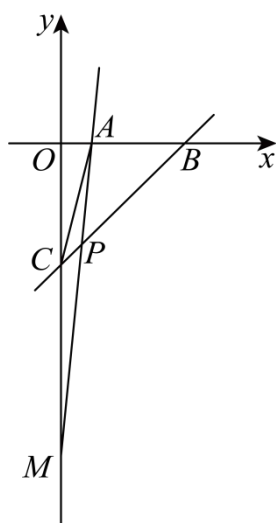
$\therefore AM = AP$, 即 A 为 MP 的中点,

$$\begin{cases} t+0=2 \times 1 \\ t-4+m=2 \times 0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} t=2 \\ m=2 \end{cases},$$

$$\therefore t-4=2-4=-2,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2, -2)$;

如图: 当点 M 在 y 轴的负半轴时, 此时点 P 在第三象限.



$\because \triangle PMC$ 的面积是 $\triangle ACP$ 面积的 2 倍,

$$\therefore S_{\triangle ACP} = S_{\triangle ACM},$$

$$\therefore AP = \frac{1}{3}AM,$$

$$\begin{cases} t = 2 \times \frac{0+1}{3} = \frac{2}{3} \\ t-4 = 2 \times \frac{0+m}{3} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ m = -5 \end{cases},$$

$$\therefore t-4 = \frac{2}{3} - 4 = -\frac{10}{3},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3}\right);$$

综上, 点 P 的坐标为 $(2, -2)$ 或 $\left(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3}\right)$.

25. 小普在综合与实践课上, 参加了以“神奇的正方形”为主题的数学活动, 通过“折、转、探”等方式研究有关正方形折纸的有趣结论.

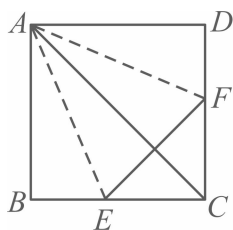


图-1

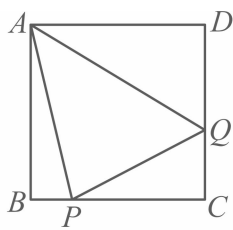
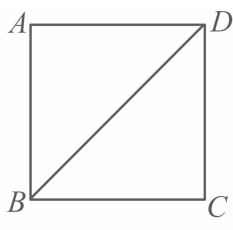
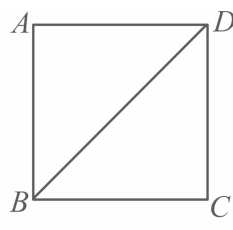


图-2



备用图



备用图

(1) 折一折: 如图-1, 小普将正方形纸片 $ABCD$ 折叠, 使边 AB 、 AD 都落在对角线 AC 上, 展开得折痕 AE 、 AF , 联结 EF . 那么 $\angle EAF =$ _____ 度; 如果 $AB = 1$, 那么 EF 的长度等于 _____;

(2) 转一转: 小普将图-1 中的 $\angle EAF$ 绕点 A 旋转, 使它的两边分别交直线 BC 、 CD 于点 P 、 Q .

①如图-2, 当点 P 、 Q 在边 BC 、 CD 上, 联结 PQ . 如果 $BP = 1$, $DQ = 3$, 求 $\triangle APQ$ 的面积;

②探一探: 联结 BD , 射线 AP 、 AQ 分别交对角线 BD 所在直线于点 M 、 N , 且点 N 在正方形内部. 正方形的边长 $AB = a$, 联结 CM . 如果 $\triangle PCM$ 是等腰三角形, 请直接写出线段 CP 的长度 _____. (用含有字母 a 的代数式表示)

【答案】 (1) 45 , $2\sqrt{2} - 2$;

(2) ① $4 + 2\sqrt{7}$; ② $PC = \frac{3-\sqrt{3}}{3}a$ 或 $\frac{3+\sqrt{3}}{3}a$

【解析】

【分析】 (1) 如图 1, 延长 CB 至点 F' , 使 $BF' = DF$, 连接 AF' , 设 $DF = x$, 证明

$\triangle ADF \cong \triangle ABF$; $\triangle ABE \cong \triangle ABF$ 和 $\triangle AEF' \cong \triangle AEF$, 根据勾股定理得: $CE^2 + CF^2 = EF^2$, 列方程即可解答;

(2) ①如图 2, 延长 CB 至点 Q , 使 $BQ = DQ$, 连接 AQ' , 过点 A 作 $AE \perp PQ$ 于点 E , 同理得:

$\triangle ADQ \cong \triangle ABQ$; $\triangle APQ \cong \triangle APQ$, 根据勾股定理列方程得 $PC^2 + CQ^2 = PQ^2$, $a^2 + (a-2)^2 = 4^2$, 解方程可得 a 的值, 证明 $\triangle APB \cong \triangle APE$, 根据三角形的面积公式即可解答;

②分两种情况: i) 如图 3, $PC = PM$, 过点 M 作 $MG \perp BC$ 于点 G , 则 $\angle BGM = \angle CGM = 90^\circ$, 设 $\angle BCM = a$, $PG = x$; ii) 如图 4, $PC = PM$, 正确画图根据含 30° 角的直角三角形的性质即可解答.

【小问 1 详解】

解: 如图 1, 延长 CB 至点 F' , 使 $BF' = DF$, 连接 AF' ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

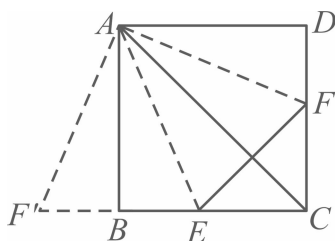


图1

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ$, $AB = BC = CD = AD$, $\angle BCD = \angle D = \angle ABE = 90^\circ$,

由折叠得: $\angle BAE = \angle CAE = \frac{1}{2} \angle BAC = 22.5^\circ$, $\angle DAF = \angle CAF = \frac{1}{2} \angle CAD = 22.5^\circ$,

$\therefore \angle EAF = 22.5^\circ + 22.5^\circ = 45^\circ$,

设 $DF = x$,

$\because AD = AB$, $\angle D = \angle ABF' = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ABF'$ (SAS),

$\therefore AF = AF'$; $\angle DAF = \angle BAF' = 22.5^\circ = \angle BAE$,

$\because AB = AB$, $\angle ABE = \angle ABF' = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ABF'$,

$\therefore BE = BF' = x$,

$\because \angle EAF = \angle EAF' = 45^\circ$, $AE = AE$,

$\therefore \triangle AEF' \cong \triangle AEF$,

$\therefore EF = EF' = 2x$,

$\because$ 正方形 $ABCD$ 是正方形, 且边长 $= 1$,

$$\therefore BC = DC = 1,$$

$$\therefore CE = CF = 1 - x,$$

$$\text{由勾股定理得: } CE^2 + CF^2 = EF^2,$$

$$\therefore (1-x)^2 + (1-x)^2 = (2x)^2,$$

$$\therefore x_1 = -1 + \sqrt{2}, x_2 = -1 - \sqrt{2} \quad (\text{舍}),$$

$$\therefore EF = 2x = 2\sqrt{2} - 2,$$

故答案为: 45, $2\sqrt{2} - 2$;

【小问2 详解】

①如图2, 由旋转得: $\angle PAQ = 45^\circ$,

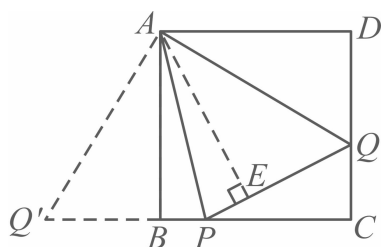


图2

延长CB至点Q, 使 $BQ = DQ$, 连接AQ', 过点A作 $AE \perp PQ$ 于点E,

同理得: $\triangle ADQ \cong \triangle ABQ$, $\triangle APQ \cong \triangle APQ$,

$$\therefore BQ = DQ = 3, PQ = PQ, \angle APB = \angle APE,$$

$$\therefore BP = 1,$$

$$\therefore PQ = 3 + 1 = 4,$$

$$\therefore PQ = 4,$$

设 $PC = a, BC = CD = a + 1$,

$$\therefore CQ = a + 1 - 3 = a - 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle PCQ$ 中, $PC^2 + CQ^2 = PQ^2$,

$$\therefore a^2 + (a - 2)^2 = 4^2,$$

$$\therefore a^2 - 2a - 6 = 0,$$

解得: $a_1 = 1 - \sqrt{7}$ (舍), $a_2 = 1 + \sqrt{7}$,

$$\therefore AB = BC = a + 1 = 1 + \sqrt{7} + 1 = \sqrt{7} + 2,$$

$$\because \angle ABP = \angle AEP = 90^\circ, \angle APB = \angle APE, AP = AP,$$

$$\therefore \triangle APB \cong \triangle APE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = AB = \sqrt{7} + 2,$$

$$\therefore \triangle APQ \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot AE = \frac{1}{2} \times 4 \times (\sqrt{7} + 2) = 2\sqrt{7} + 4;$$

②分两种情况:

i) 如图3, $PC = PM$, 过点 M 作 $MG \perp BC$ 于点 G , 则 $\angle BGM = \angle CGM = 90^\circ$,

设 $\angle BCM = \alpha, PG = x$,

$$\therefore \angle CMP = \angle BCM = \alpha,$$

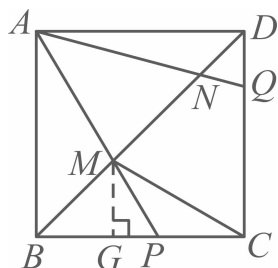


图3

$$\therefore \angle BPM = 2\alpha,$$

$$\because AB = BC, \angle ABM = \angle CBM, BM = BM,$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle CBM,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle BCM = \alpha,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP + \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore \alpha + 2\alpha = 90^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BPM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle PMG = 30^\circ,$$

$$\therefore CP = PM = 2x, GM = \sqrt{3}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle BMG$ 中, $\angle MBG = 45^\circ$,

$\therefore \triangle BMG$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore BG = MG = \sqrt{3}x,$$

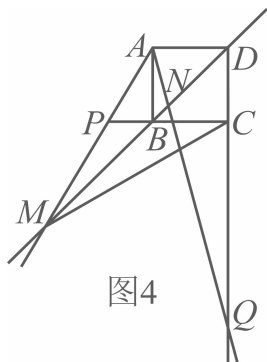
$$\therefore BC = a,$$

$$\therefore \sqrt{3}x + x + 2x = a ,$$

$$\therefore x = \frac{a}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})a}{6},$$

$$\therefore PC = 2x = \frac{(3 - \sqrt{3})a}{3};$$

ii) 如图 4, $PC = PM$,



$$\therefore \angle PCM = \angle PMC,$$

同理得: $\triangle ABM \cong \triangle CBM$,

$$\therefore \exists BAM = \exists PCM = \exists CMP,$$

$$\therefore \mathfrak{D}APB = \mathfrak{D}PCM + \mathfrak{D}PMC = 2\mathfrak{D}PAB,$$

$$\therefore \angle ABP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB + \angle PAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAB = 30^\circ,$$

设 $PB = b$, 则 $AP = 2b$,

$$\therefore AB = \sqrt{3}b ,$$

$$\therefore AB = a ,$$

$$\therefore a = \sqrt{3}b ,$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$$\therefore PC = BC + PB = a + \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}a ;$$

综上，线段 CP 的长度 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}a$ 或 $\frac{3+\sqrt{3}}{3}a$.

【点睛】本题属于四边形综合题，考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，含 30° 角的直角三角形的性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，属于中考压轴题.