

2024 学年八年级数学练习卷

(完卷时间 100 分钟, 满分 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 26 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列二项方程中, 有两个实数根的是 ()

- A. $x^5 + 1 = 0$ B. $x^4 - 1 = 0$ C. $x^3 - 1 = 0$ D. $x^2 + 1 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了二项方程的解. 分别解每个二项方程即可得到答案.

【详解】解: $x^5 + 1 = 0$, 则 $x^5 = -1$,

$$\therefore (-1)^5 = -1$$

$$\therefore x = -1,$$

选项 A 不符合题意;

$$x^4 - 1 = 0, \text{ 则 } x^4 = 1,$$

$$\therefore (\pm 1)^4 = 1,$$

$$\therefore x = 1 \text{ 或 } x = -1,$$

选项 B 符合题意;

$$x^3 - 1 = 0, \text{ 则 } x^3 = 1,$$

$$\therefore 1^3 = 1$$

$$\therefore x = 1,$$

选项 C 不符合题意;

$$x^2 + 1 = 0, \text{ 则 } x^2 = -1$$

$$\therefore x^2 \geq 0,$$

$\therefore x^2 + 1 = 0$ 没有根,

选项 D 不符合题意;

故选: B

2. 成语是中华文化精髓的重要载体, 其背后蕴含着丰富的历史典故与哲学智慧. 通过学习、运用成语, 并探究其蕴含的语言文化现象, 是传承中华优秀传统文化的重要方式. 下列成语所描述的事件中, 不属于必然事件的是 ()

- A. 水涨船高 B. 日出东方 C. 异口同声 D. 冬去春来

【答案】 C

【解析】

【分析】此题考查了必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 必然事件指在一定条件下一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下, 一定不发生的事件. 不确定事件即随机事件是指在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件. 根据必然事件、不可能事件、随机事件的概念分别对每一项进行分析, 即可得出答案.

【详解】解: 水涨船高、日出东方、冬去春来都是必然事件;

异口同声是随机事件, 故选项 C 不符合题意;

故选: C.

3. 如果一次函数 $y = kx + 3$ 的图像经过点 A, 且函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小, 那么点 A 的坐标可以是 ()

- A. $(2, 3)$ B. $(-3, 2)$ C. $(-3, -2)$ D. $(2, -3)$

【答案】 D

【解析】

【分析】此题考查了一次函数的图象和性质, 熟练掌握一次函数的增减性是关键. 根据选项的条件和一次函数的增减性依次进行分析即可.

【详解】解: A、当点 P 的坐标为 $(2, 3)$ 时, $2k + 3 = 3$.

解得: $k = 0$

$\therefore y$ 不随 x 的变化而变化, 选项 A 不符合题意;

B、当点 P 的坐标为 $(-3, 2)$ 时, $-3k + 3 = 2$

解得: $k = \frac{1}{3} > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大, 选项 B 不符合题意;

C、当点 P 的坐标为 $(-3, -2)$ 时, $-3k + 3 = -2$,

解得: $k = \frac{5}{3} > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,

选项 C 不符合题意;

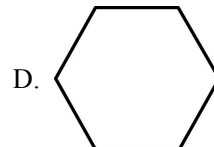
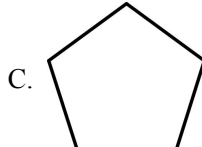
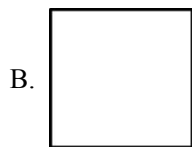
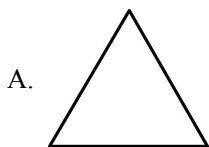
D、当点 P 的坐标为 $(2, -3)$ 时, $2k + 3 = -3$

解得: $k = -3 < 0$, $\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

选项 D 符合题意.

所以选: D.

4. 下列多边形中, 内角和最大的是 ()



【答案】 D

【解析】

【分析】 根据多边形内角和公式可直接进行排除选项.

【详解】 解: A、是一个三角形, 其内角和为 180° ;

B、是一个四边形, 其内角和为 360° ;

C、是一个五边形, 其内角和为 540° ;

D、是一个六边形, 其内角和为 720° ;

$\therefore$ 内角和最大的是六边形;

故选 D.

【点睛】 本题主要考查多边形内角和, 熟练掌握多边形内角和公式是解题的关键.

5. 平行四边形的四个内角的平分线, 如果能围成一个四边形, 那么这个四边形一定是 ()

A. 矩形

B. 菱形

C. 正方形

D. 等腰梯形

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据矩形的判定定理判断即可.

【详解】 因为“平行四边形的两组对角分别相等”, “邻角互补”所以相邻两个角的平分线组成角是直角, 即平行四边形的四个内角的平分线围成的四边形四个角都是直角, 是矩形.

故选 A.

【点睛】 本题考查矩形的判定以及平行四边形的基本性质. 解题的关键是知道平行四边形基本性质: ①平行四边形两组对边分别平行; ②平行四边形的两组对边分别相等; ③平行四边形的两组对角分别相等; ④平行四边形的对角线互相平分.

6. 符号“ $\Rightarrow$ ”读作“推出”, 表示这个符号左边的数学事实可以推出右边的数学事实. 下面是关于某个四边形的三个结论: ①它的对角线互相垂直; ②它是一个正方形; ③它是一个菱形. 下列用符号“ $\Rightarrow$ ”表示的推出过程正确的是 ()

- A. $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$ B. $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{2}$ C. $\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$ D. $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了正方形的性质与判定, 菱形的性质与判定, 熟知相关知识是解题的关键. 根据正方形的性质与判定, 菱形的性质进行判断即可.

【详解】 解: 正方形是特殊的菱形, 而菱形不一定是正方形;

菱形的对角线互相垂直, 而对角线互相垂直的四边形不一定是菱形;

正方形拥有菱形的一切性质,

故②可以推出③和①, ③可以推出①, 而①推不出②和③, ③推不出②;

即 $\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$

故选: C.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 已知 $f(x) = 3x - 7$, 那么 $f(-2) =$ _____.

【答案】 -13

【解析】

【分析】 本题主要考查自变量和函数值; 把 $x = -2$ 时代入 $f(x) = 3x - 7$ 中计算即可.

【详解】 解: 把 $x = -2$ 代入 $f(x) = 3x - 7$ 中得:

$$f(-2) = 3 \times (-2) - 7 = -13,$$

故答案为: -13.

8. 方程 $\sqrt{x-2} = 2$ 的根是_____.

【答案】 $x = 6$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，掌握解方程的步骤是解题的关键.

先两边平方，化为整式方程，再求解，注意解无理方程与分式方程一样需要检验.

【详解】 解： $\sqrt{x-2} = 2$

$$x - 2 = 4,$$

解得： $x = 6$,

经检验： $x = 6$ 是原方程的根，

$\therefore$ 原方程的根为 $x = 6$,

故答案为： $x = 6$.

9. 写出一个二元二次方程，使该方程有一个解是 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ ，这个方程可以是_____.

【答案】 $x + y^2 = 5$

【解析】

【分析】 本题考查二元二次方程的定义，方程的解，理解方程的解和二元二次方程的定义是解题的关键.

根据二元二次方程的定义及该方程的解直接写出方程即可.

【详解】 解： $\because 1 + (-2)^2 = 5$,

$$\therefore x + y^2 = 5,$$

故答案为： $x + y^2 = 5$ (答案不唯一).

10. 如果函数 $y = (a-1)x + a$ (其中 a 是常数) 是一次函数，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \neq 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数的定义；根据一次函数的定义得出 $a-1 \neq 0$ ，计算即可.

【详解】 解： $\because$ 函数 $y = (a-1)x + a$ 是一次函数，

$$\therefore a - 1 \neq 0$$

解得： $a \neq 1$,

故答案为： $a \neq 1$.

11. 用换元法解分式方程 $x^2 - x - 1 = \frac{6}{x^2 - x}$, 如果设 $y = x^2 - x$, 那么原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - y - 6 = 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式方程的化简, 根据题意可把原方程变成 $y - 1 = \frac{6}{y}$, 根据分式的化简步骤一步步得到即可;

【详解】 解: 由题意得: $y - 1 = \frac{6}{y}$,

两边同时乘以 y 得:

$$y^2 - y - 6 = 0$$

故答案为: $y^2 - y - 6 = 0$

12. 某品牌鞋子的长度 y cm 与鞋子的码数 x (码)之间满足一次函数关系. 如果 22 码鞋子的长度为 16 cm, 44 码鞋子的长度为 27 cm, 那么长度为 24 cm 的鞋子码数是_____码.

【答案】 38

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数关系; 设 $y = kx + b$, 代入 $(22, 16), (44, 27)$ 得出 $y = \frac{1}{2}x + 5$, 再把 $y = 24$ 代入计算即可.

【详解】 解: 设 $y = kx + b$,

代入 $(22, 16), (44, 27)$ 得:

$$\begin{cases} 22k + b = 16 \\ 44k + b = 27 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = 5 \end{cases},$$

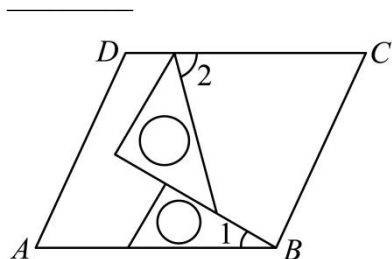
$$\text{所以 } y = \frac{1}{2}x + 5$$

$\therefore$ 当 $y = 24$ 时, $\frac{1}{2}x + 5 = 24$,

解得: $x = 38$,

故答案为: 38.

13. 将一副三角板在平行四边形 $ABCD$ 中按如图所示位置摆放, 如果 $\angle 1 = 30^\circ$, 那么 $\angle 2$ 的度数是



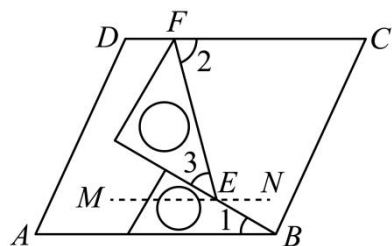
【答案】75 度## 75°

【解析】

【分析】本题考查平行四边形性质与平行线性质的综合运用, 解题关键是作辅助线构造平行关系, 利用平行线性质的三角板角度计算角度.

过点 E 作 $MN \parallel AB$, 利用平行线的性质, 结合三角板已知角度, 逐步推导求出答案.

【详解】解析: 如图, 过点 E 作 $MN \parallel AB$,



$$\therefore \angle BEN = \angle 1 = 30^\circ,$$

由题意得: $\angle 3 = 45^\circ$,

$$\therefore \angle FEN = 180^\circ - \angle 3 - \angle BEN = 105^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore MN \parallel CD,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle FEN = 75^\circ.$$

故答案为: 75° .

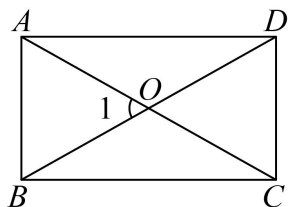
14. 如果一个矩形的两条对角线的夹角是 60° , 那么这个矩形的短边与长边的比是_____.

【答案】 $1:\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查矩形的性质，等边三角形的判定和性质，勾股定理；根据矩形的性质得到 AOB 为等边三角形，再利用勾股定理得到 $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{3}AB$ ，即可求出.

【详解】 解：如图：



矩形的两条对角线的夹角为 $\angle 1 = 60^\circ$ ，且矩形对角线相等且互相平分，

$\therefore AOB$ 为等边三角形，

$\therefore AB = AO = BO = OD, \angle ABD = 60^\circ$

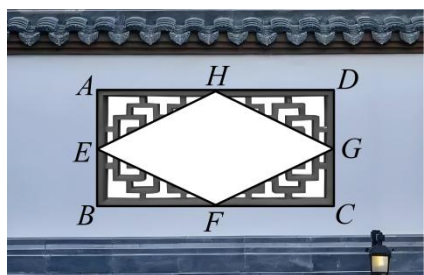
在 $Rt\triangle ABD$ 中，

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{(2AB)^2 - AB^2} = \sqrt{3}AB,$$

$\therefore$ 这个矩形的短边与长边的比是 $1:\sqrt{3}$ ，

故答案为： $1:\sqrt{3}$.

15. 如图，，在一座木建筑中，有一扇矩形窗户(四边形 $ABCD$)，工人师傅准备连接窗户各边中点 E 、 F 、 G 、 H 来制作精美的装饰边框，如果他们测得边 AB 的长为1米，边 BC 的长为2.4米，那么四边形 $EFGH$ 的周长为_____米.



【答案】 5.2

【解析】

【分析】 本题主要考查勾股定理，四边形的综合；根据题意得到四边形 $EFGH$ 为菱形，结合勾股定理得到 $EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = 1.3$ ，再计算周长即可.

【详解】 解：由题知： 四边形 $EFGH$ 为菱形；

$$\because AB=1, BC=2.4,$$

$$\therefore BE=0.5, BF=1.2,$$

$$\therefore EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = 1.3$$

所以形 $EFGH$ 的周长为 $1.3 \times 4 = 5.2$ 米,

故答案为: 5.2.

16. 如果一个梯形的四条边的长度分别为 3,5,5,11, 那么这个梯形的中位线长是_____.

【答案】 7 或 8

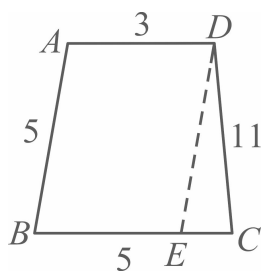
【解析】

【分析】 本题考查了梯形的中位线的性质, 分 3,11 为底边、5,11 为底边和 3,5 为底边三种情况, 利用梯形的中位线的性质解答即可求解, 掌握梯形的中位线的性质是解题的关键.

【详解】 解: 当 3,11 为底边, 5,5 为腰时, 梯形的中位线长为 $\frac{3+11}{2} = 7$;

当 5,11 为底边, 3,5 为腰时, 梯形的中位线长为 $\frac{5+11}{2} = 8$;

当 3,5 为底边, 5,11 为腰时, 如图, 过点 D 作 $DE \parallel AB$ 交 BC 于 E ,



$$\because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形,

$$\therefore BE = AD = 3, DE = AB = 5,$$

$$\therefore CE = 5 - 3 = 2,$$

$$\because DE + CE = 5 + 2 = 7 < CD,$$

$\therefore$ 此种情况不存在;

综上, 这个梯形的中位线长是 7 或 8.

17. 数学小组在探究直线 $y = (a-1)x + 3 - 2a$ ($a \neq 1$) 时发现: 无论 a 取什么值, 该直线始终会经过同一个点 P , 那么点 P 坐标是_____.

【答案】 (2,1)

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数；将 $y = (a-1)x + 3 - 2a$ ($a \neq 1$) 整理为 $a(x-2) + 3 - x$ ，根据题意得到

$$\begin{cases} x-2=0 \\ y=3-x \end{cases}, \text{ 解二元一次方程即可.}$$

【详解】 解： $y = (a-1)x + 3 - 2a = ax - x + 3 - 2a = a(x-2) + 3 - x$

因为 a 取什么值，该直线始终会经过同一个点 P

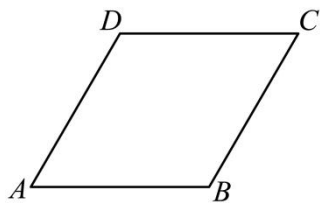
$$\text{所以 } \begin{cases} x-2=0 \\ y=3-x \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases},$$

所以 $P(2,1)$,

故答案为： $(2,1)$.

18. 如图，将一张菱形纸片 $ABCD$ 沿 DE 所在的直线翻折，使点 C 落在点 F 处，联结 DF 交边 AB 于点 G 。如果 $\angle A = 60^\circ$, $AB = 2$, G 为 AB 中点，那么折痕 DE 与边 BC 的夹角的度数是_____.

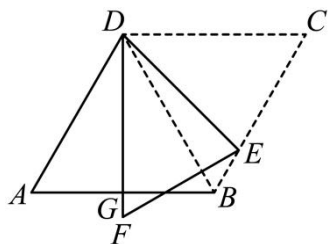


【答案】 75°

【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质，折叠性质，等边三角形的判定与性质，三角形内角和性质，正确掌握相关性质内容是解题的关键。先根据菱形的性质证明 $\triangle ABD$ 为等边三角形，因为 G 为 AB 中点，则 $\angle ADG = \angle BDG = 30^\circ$ ，根据翻折，得 $\angle FDE = \angle CDE = 45^\circ$ ，最后由三角形内角和性质列式计算，即可作答。

【详解】 解： 如图所示： 连接 BD



$\because ABCD$ 是菱形,

$\therefore AD = AB$,

$\therefore \angle A = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形,

$\therefore \angle ADC = 120^\circ, \angle C = 60^\circ$,

$\because G$ 为 AB 中点,

$\therefore \angle ADG = \angle BDG = 30^\circ$,

$\because$ 翻折,

$\therefore \angle FDE = \angle CDE = \frac{120^\circ - 30^\circ}{2} = 45^\circ$,

$\therefore \angle DEC = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$,

故答案为: 75° .

三、解答题 (本大题共 8 题, 19-23 每题 6 分, 24 题、25 题每题 8 分、26 题 12 分, 满分 58 分)

19. 解方程: $\frac{x}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} = \frac{1}{x-3}$

【答案】 $x=1$.

【解析】

【分析】 首先去掉分母, 观察可得最简公分母是 $(x+3)(x-3)$, 方程两边乘最简公分母, 可以把分式方程转化为整式方程求解, 然后解一元二次方程, 最后检验即可求解.

【详解】 方程的两边同乘以 $(x+3)(x-3)$, 得

$x(x-3) + 6 = x+3$,

整理, 得 $x^2 - 4x + 3 = 0$,

解得 $x_1=1$, $x_2=3$.

经检验: $x=3$ 是方程的增根, $x=1$ 是原方程的根.

$\therefore$ 原方程的解为 $x=1$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x^2 + 4xy - 5y^2 = 0 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 10 \\ y_2 = -2 \end{cases}$

【解析】

【分析】先将第二个方程利用因式分解法得到两个一元一次方程，然后分别与第一个方程联立成二元一次方程组，分别解方程组即可.

【详解】
$$\begin{cases} x+3y=4 \textcircled{1} \\ x^2+4xy-5y^2=0 \textcircled{2} \end{cases}$$

由②得: $(x-y)(x+5y)=0$;

所以, $x-y=0$ 或 $x+5y=0$;

整理得: $\begin{cases} x+3y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+3y=4 \\ x+5y=0 \end{cases}$;

解得: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=10 \\ y=-2 \end{cases}$;

所以, 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=10 \\ y_2=-2 \end{cases}$.

【点睛】本题主要考查二元二次方程组的解法, 能够将原方程组转化成两个二元一次方程组是解题的关键.

21. 一个不透明的箱子里装有2个红球和1个黄球, 每个小球除颜色外其他完全都相同.

(1) 现从该箱子里摸出1个小球, 记下颜色后放回箱子里, 摇匀后, 再摸出1个小球, 求两次摸出的小球颜色恰好不同的概率. (用画树形图或列表的方法);

(2) 如果将箱子中增加若干个白球 (与其他球除颜色外完全相同) 后, 把箱子里的小球摇匀, 再随机摸出一个小球, 然后记下颜色后再放回箱子里, 通过大量重复实验后, 发现摸到红球的频率稳定于0.4左右, 请你估计增加白球的个数.

【答案】(1) $\frac{4}{9}$

(2) 2个

【解析】

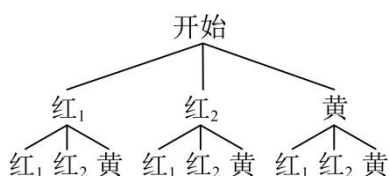
【分析】本题考查了解分式方程, 已知频率求数量, 画树状图或列表法求概率, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 先画树状图, 得出一共有9种等可能的结果, 再运用概率公式列式计算, 即可作答.

(2) 理解题意, 再设增加 x 个白球, 运用概率公式列式计算, 即可作答.

【小问1详解】

解: 画树状图, 如图所示:



∴一共有9种等可能的结果，两次摸出的小球颜色恰好不同的结果有4种，

∴两次摸出的小球颜色恰好不同的概率 $= \frac{4}{9}$ ；

【小问2 详解】

解：设增加 x 个白球，

$$\text{则 } \frac{2}{3+x} = 0.4,$$

解得： $x = 2$ ，

经检验： $x = 2$ 是原方程的解，

∴需要增加2个白球.

22. 【学习材料】

如何求直线 $y = 2x + 3$ 向右平移5个单位长度后的函数表达式呢？

因为所求直线是由直线 $y = 2x + 3$ 平移得到的，可以设所求直线的表达式为 $y = 2x + b$.

在直线 $y = 2x + 3$ 上取点 $A(0, 3)$ ，将这点向右平移5个单位得到 $A_1(5, 3)$ ，点 A_1 在平移后的直线上，于是代入得到 $3 = 2 \times 5 + b$ ，解得 $b = -7$.

所以直线 $y = 2x + 3$ 向右平移5个单位长度后的函数表达式是 $y = 2x - 7$.

【根据以上学习材料解决问题】

(1) 如果直线 $y = -2x + 1$ 向左平移 m 个单位得到直线 $y = kx - 3$ ，求 k 和 m 的值；

(2) 如果直线 $y = kx + b$ 与直线 $y = -2x + 1$ 关于 y 轴对称，求这条直线的表达式.

【答案】 (1) $k = -2, m = 2$

(2) $y = 2x + 1$

【解析】

【分析】 (1) 根据平移后比例系数 k 相等，即可得到 k 值，再在直线 $y = -2x + 1$ 取 $(0, 1)$ 向左平移 m 得到 $(-m, 1)$ ，代入 $y = -2x - 3$ 中求解，即可解题；

(2) 根据直线 $y = kx + b$ 与直线 $y = -2x + 1$ 关于 y 轴对称, 得到 b 值, 再取直线 $y = -2x + 1$ 的点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 关于 y 轴对称点为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 将 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 代入 $y = kx + 1$ 中求解, 即可解题.

【小问 1 详解】

解析: $\because$ 直线 $y = -2x + 1$ 向左平移 m 个单位得到直线 $y = kx - 3$,

根据平移后比例系数 k 相等,

$$\therefore k = -2,$$

在直线 $y = -2x + 1$ 取 $(0, 1)$ 向左平移 m 得到 $(-m, 1)$, 代入 $y = -2x - 3$ 得:

$$1 = -2(-m) - 3, \text{ 解得 } m = 2;$$

【小问 2 详解】

解: 因为直线 $y = kx + b$ 与直线 $y = -2x + 1$ 关于 y 轴对称,

所以 $y = kx + 1$,

取直线 $y = -2x + 1$ 的点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 关于 y 轴对称点为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$,

将 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 代入 $y = kx + 1$ 得:

$$0 = -\frac{1}{2}k + 1, \text{ 解得 } k = 2,$$

所以这条直线的表达式为: $y = 2x + 1$.

【点睛】 本题考查了一次函数图象的平移, 点坐标的平移, 一次函数解析式, 轴对称的性质等知识, 熟练掌握一次函数图象的平移, 点坐标的平移, 一次函数解析式, 轴对称的性质是解题的关键.

23. 某学校为了响应“绿色校园”倡议, 计划在若干个月内种植一定数量的树木, 使校园绿化总面积达到 180 平方米. 实际在种植时, 第一个月比原计划每个月多种植 10 平方米, 并且按照这个进度继续推进, 结果可以提前 3 个月完成目标. 求实际执行中每月种植的绿化面积是多少平方米?

【答案】 实际执行中每月种植的绿化面积是 30 平方米

【解析】

【分析】 此题考查了分式方程的应用, 解答本题的关键是读懂题意, 根据题意设出适当的未知数, 找出等量关系, 列方程求解, 注意检验.

设实际执行中每月种植的绿化面积是 x 平方米，则原计划每月种植的绿化面积是 $(x-10)$ 平方米，根据第一个月比原计划每个月多种植 10 平方米，并且按照这个进度继续推进，结果可以提前 3 个月完成目标，列出分式方程，解方程即可解答.

【详解】解：设实际执行中每月种植的绿化面积是 x 平方米，则原计划每月种植的绿化面积是 $(x-10)$ 平方米，根据题意得：

$$\frac{180}{x-10} - \frac{180}{x} = 3$$

解得： $x_1 = 30$ ， $x_2 = -20$ （不符合题意，舍去）

经检验 $x = 30$ 是原方程的解，且符合题意；

答：实际执行中每月种植的绿化面积是 30 平方米.

24. 【阅读材料】

老师提出的问题：	同学们的方案：
如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD < AB$ ， $\angle A$ 为锐角. 在对角线 BD 上如何确定点 E 、 F 的位置，使四边形 $AECF$ 为平行四边形？	方案 1：分别作 AE 平分 $\angle BAD$ ， CF 平分 $\angle BCD$ ，交 BD 于点 E 、 F . 方案 2：取 BD 的两个三等分点 E 、 F . 方案 3：在 BD 上任意取一点 E ，连接 AE ，再以 C 为圆心， AE 长为半径画弧，交 BD 于点 F .

【解决问题】

- 写出以上三种方案中正确方案，并选择一种正确的方案，在图 1 中画出图形，并说明理由；
- 除了这些同学们已经研究的方案之外，你还有其他方案吗？请写出方案，画出图形，并说明理由.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查平行四边形的判定和性质，角平分线的性质，三角形全等的判定和性质；

(1) 根据平行四边形的性质和角平分线的性质证出 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$ (ASA)，得到 $AE = CF$ ， $\angle AED = \angle CFB$ ，求出 $AE \parallel CF$ ，即可得到结论；

(2) 在 BD 上取点 E 、 F 使得 $DE = BF$ ，证出 $\triangle AED \cong \triangle CFB$ ，得到 $AE = CF$ ， $\angle AED = \angle CFB$ ，求

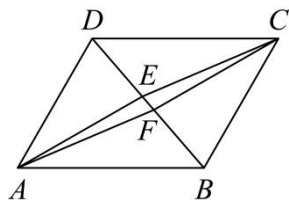
出 $AE \parallel CF$ ，即可得到结论.

【小问 1 详解】

解：方案 1 和 2 正确；

选择方案 1 证明：

如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore DC \parallel AB, DC = AB, AD \parallel BC, AD = BC, \angle DAB = \angle BCD, \angle ADC = \angle ABC$

$\because AE$ 平分 $\angle BAD, CF$ 平分 $\angle BCD$,

$\therefore \angle BAE = \angle DAE = \frac{1}{2} \angle DAB = \angle BCF = \angle DCF = \frac{1}{2} \angle DCB$

$\therefore AD \parallel BC$

$\therefore \angle ADE = \angle CBF$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAE = \angle BCF \\ AD = BC \\ \angle ADE = \angle CBF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF$ (ASA)

$\therefore AE = CF, \angle AED = \angle CFB$,

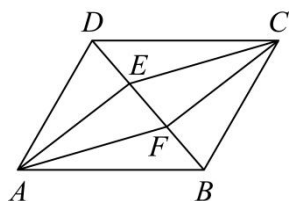
$\therefore \angle AEF = \angle CFE$

$\therefore AE \parallel CF$

所以四边形 $AECF$ 为平行四边形.

方案 2 证明：

如图：



根据题意得： $DE = EF = BF$ ，

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CBF,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} AD = BC \\ \angle ADE = \angle CBF \\ DE = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF \text{ (SAS)}$$

$$\therefore AE = CF, \angle AED = \angle CFB,$$

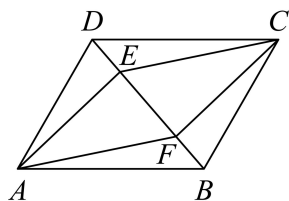
$$\therefore \angle AEF = \angle CFE$$

$$\therefore AE \parallel CF$$

所以四边形 $AECF$ 为平行四边形.

方案 3 证明:

如图:



根据题意得: $AE = CF$,

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC, AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CBF,$$

根据已知得: $AE = CF$, $AD = BC$, $\angle ADE = \angle CBF$,

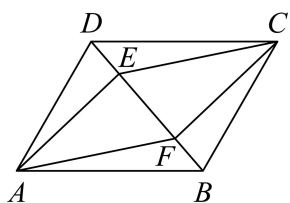
无法根据边边角证出 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 全等,

∴ 无法得到四边形 $AECF$ 为平行四边形.

【小问 2 详解】

解: 方案: 在 BD 上取点 E 、 F 使得 $DE = BF$,

如图所示: 在 BD 上取点 E 、 F 使得 $DE = BF$,



在 $\triangle AED$ 和 $\triangle CFB$ 中,

$$\begin{cases} AD = BC \\ \angle ADE = \angle CBF \\ DE = BF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle CFB$ (SAS),

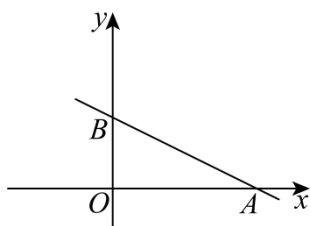
$\therefore AE = CE, \angle AED = \angle CFB$

$\therefore \angle AEF = \angle CFE$

$\therefore AE \parallel CF$

所以四边形 $AECF$ 为平行四边形.

25. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = kx + 2$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于点 $A(4, 0)$ 和点 B , 点 C 和点 E 分别在线段 AB 和 x 轴正半轴上, 点 D 在第一象限内, 且四边形 $OCDE$ 是菱形.



(1) 求 k 的值和点 B 坐标;

(2) 设直线 $y = kx + 2$ 与菱形 $OCDE$ 的边 DE 交于点 F .

①当 F 是 AC 的中点时, 判断 $\triangle OBC$ 的形状, 并说明理由;

②如果四边形 $OCFE$ 是直角梯形, 求菱形 $OCDE$ 的边长.

【答案】 (1) $k = -\frac{1}{2}, (0, 2)$

(2) ①等腰三角形, 见解析; ② $OC = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数与几何综合, 菱形的性质, 勾股定理, 三角形全等的判定 和性质;

(1) 将 $A(4, 0)$ 代入 $y = kx + 2$ 计算得出 k , 令 $x = 0$, 得出 B 点坐标即可;

(2) ①根据题意再结合菱形的性质证出 $\triangle AEF \cong \triangle CDF$ ，得到 $AE = CD$ ，求出 $OC = OB$ 即可得出结论；②根据直角梯形的性质求出 $AB = 2\sqrt{5}$ ，设 $BC = m$ ，则 $AC = 2\sqrt{5} - m$ ，结合勾股定理计算即可.

【小问 1 详解】

解：将 $A(4, 0)$ 代入 $y = kx + 2$ 得：

$$0 = 4k + 2,$$

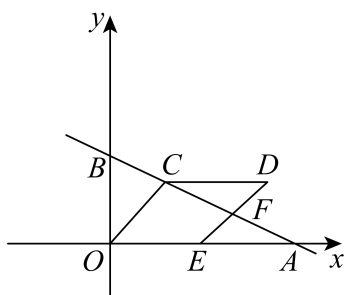
$$\text{解得：} k = -\frac{1}{2},$$

$$\text{令 } x = 0, \quad y = 0 + 2 = 2,$$

$$\therefore B(0, 2);$$

【小问 2 详解】

$$\text{解：① } y = -\frac{1}{2}x + 2$$



$\because$ 四边形 $OCDE$ 为菱形

$$\therefore OC = CD = DE = OE$$

$\because F$ 是 AC 的中点,

$$\therefore CF = FA,$$

$$\because CD \parallel OA$$

$$\therefore \angle D = \angle AEF$$

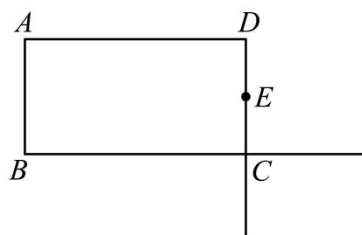
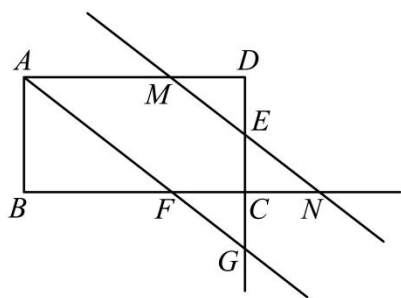
在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle D = \angle AEF \\ \angle CFD = \angle AFE \\ CF = FA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CDF$$

$$\therefore AE = CD$$

$$\because CD = OE$$



备用图

- (1) 如果点 F 与点 C 重合时, 求 $\frac{AM}{DM}$ 的值;
- (2) 如果四边形 $AFNM$ 是菱形, 求这个菱形的面积;
- (3) 连接 EF 、 GN , 当 $EF = GN$ 时, 求 BF 的长.

【答案】(1) 1 (2) 15

(3) 3 或 $\frac{14}{3}$

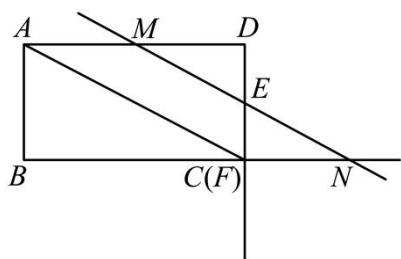
【解析】

【分析】 本题主要考查平行四边形的判定和性质, 三角形全等的判定和性质, 勾股定理, 菱形的性质;

- (1) 根据题意得到 $AMNF$ 是平行四边形, 证出 $\triangle MDE \cong \triangle NFE$, 得到 $AM = MD$, 即可求出;
- (2) 设 $MD = x$, 则 $CN = x, AM = 7 - x, FC = 7 - 2x, BF = 2x$, 根据菱形的性质得到 $AF = 7 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, 结合勾股定理 $AB^2 + BF^2 = AF^2$, 得到 $MD = CN = 2, AM = 5$, 计算即可;
- (3) 分两种情况, 若 $EFGN$ 为平行四边形时, 若 $EFGN$ 为等腰梯形时, 分别进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: 如图:



$$\because AM \parallel CN, ME \parallel AF$$

$\therefore$ 四边形 $AMNF$ 是平行四边形,

$$\therefore AM = CN$$

$$\because E \text{ 为 } FD \text{ 的中点, } \angle MDE = \angle NFE, \angle EMD = \angle ENF,$$

$$\therefore \triangle MDE \cong \triangle NFE$$

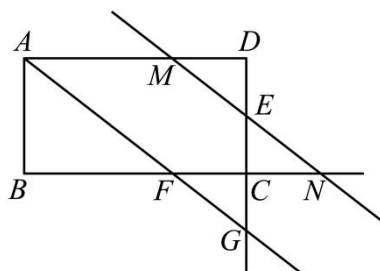
$$\therefore FN = MD$$

$$\therefore AM = MD$$

$$\therefore \frac{AM}{DM} = 1.$$

【小问 2 详解】

解：如图：



由 (1) 得 $\triangle MDE \cong \triangle NFE$ ，四边形 $AMNF$ 是平行四边形，

$$\therefore CN = MD$$

设 $MD = x$ ，则 $CN = x$, $AM = 7 - x$, $FC = 7 - 2x$, $BF = 2x$

因为四边形 $AFNM$ 是菱形

$$\therefore AF = 7 - x$$

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中

$$\therefore AB^2 + BF^2 = AF^2$$

$$\therefore 3^2 + (2x)^2 = (7 - x)^2$$

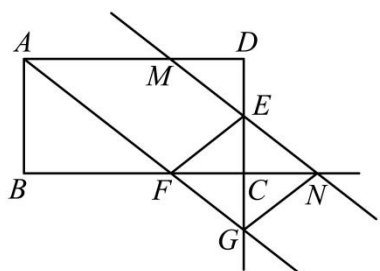
$$\text{解得: } x_1 = 2, x_2 = -\frac{20}{3}$$

$$\therefore MD = CN = 2, AM = 5$$

$$\therefore S_{\triangle MCF} = 5 \times 3 = 15.$$

【小问 3 详解】

解：



①若 $EFGN$ 为平行四边形时;

由 (2) 得 $CN = x, FC = 7 - 2x, BF = 2x$,

$$\therefore 7 - 2x = x,$$

$$\text{解得 } x = \frac{7}{3},$$

$$\therefore BF = \frac{14}{3};$$

②若 $EFGN$ 为等腰梯形时;

$$\therefore EC = NE = \frac{3}{2}$$

$$\therefore MD = \frac{3}{2}$$

$$\therefore AM = \frac{11}{2}$$

$$\therefore FC = \frac{11}{2} - \frac{3}{2} = 4,$$

$$\therefore FC = 7 - 2x = 4,$$

$$\text{解得 } x = \frac{3}{2},$$

$$\therefore BF = 3.$$