

2025 学年第二学期期末参考样卷

初二数学

(考试时间 90 分钟 满分 100 分) 2026.6

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤;
3. 填空题须在对应矩形框内作答, 超出对应边框作答无效.

一. 选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的】

1. 如果点 A 的坐标为 $(-3, -2)$, 则点 A 到 x 轴的距离为 ()

- A. $\sqrt{13}$ B. -2 C. 3 D. 2

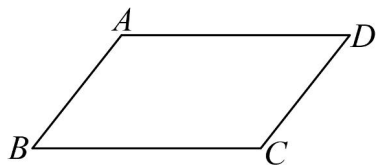
【答案】D

【解析】

【详解】解: $\because$ 点 A 的坐标为 $(-3, -2)$,

$\therefore$ 点 A 到 x 轴的距离为 $|-2| = 2$.

2. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 若 $\angle A = 100^\circ$, 则 $\angle C$ 的度数为 ()



- A. 120° B. 100° C. 80° D. 60°

【答案】B

【解析】

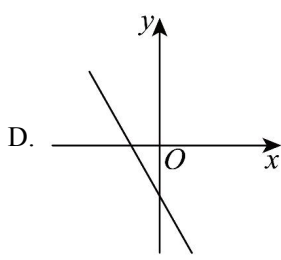
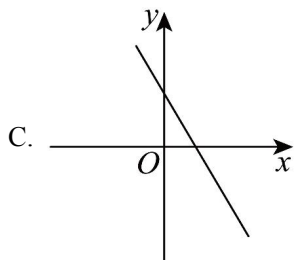
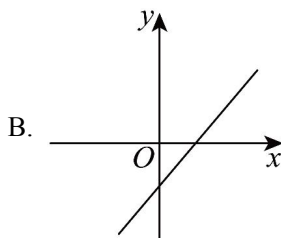
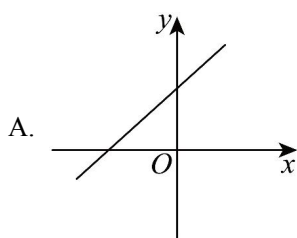
【分析】本题主要考查了平行四边形的性质, 根据平行四边形的性质求解即可.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \angle C = \angle A = 100^\circ$,

故选: B.

3. 一次函数 $y = x - 3$ 的图象大致是 ()



【答案】 B

【解析】

【分析】 根据一次函数解析式求出它与坐标轴的交点坐标，判断出它的函数图象.

【详解】 解：在 $y = x - 3$ 中，令 $y = 0$ ，可得到 $x = 3$ ，令 $x = 0$ ，可得 $y = -3$ ，

$\therefore$ 直线与 x 轴交点为 $(3, 0)$ ，与 y 轴的交点为 $(0, -3)$ ，

故选： B.

【点睛】 本题考查一次函数的图象性质，解题的关键是根据一次函数解析式得到函数图象的性质.

4. 关于反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ ，下列说法错误的是 ()

A. y 随着 x 的增大而减少

B. 图像与坐标轴没有交点

C. 图像经过第一、三象限

D. 图像是双曲线

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据反比例函数的性质逐项判断即可.

【详解】 解： A： 反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ ， $k = 1 > 0$ ， 只有在每个象限内， y 随着 x 的增大而减少， 故该选项符合题意；

B： $\because x \neq 0$ ， $y = \frac{1}{x} \neq 0$ ，

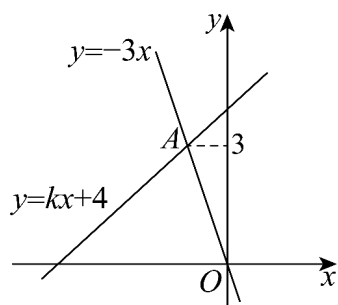
$\therefore$ 函数图像与坐标轴没有交点， 故该选项不合题意；

C： $\because k = 1 > 0$ ，

$\therefore$ 反比例函数图像经过第一、三象限， 故该选项不合题意；

D: 反比例函数的图像都是双曲线, 故该选项不合题意.

5. 如图, 直线 $y = kx + 4$ ($k \neq 0$) 与直线 $y = -3x$ 相交于点 A , 已知点 A 的纵坐标为 3, 则不等式 $kx + 4 > -3x$ 的解集为 ()



A. $x < 3$

B. $x > 3$

C. $x > -1$

D. $x < -1$

【答案】C

【解析】

【分析】先将纵坐标代入正比例函数求出交点 A 的横坐标, 得到交点坐标, 再根据两直线图象位置关系, 交点右侧一次函数图象更高, 得出对应不等式解集.

【详解】解: $\because$ 点 A 在直线 $y = -3x$ 上, 且纵坐标为 3,

把 $y = 3$ 代入 $y = -3x$ 得: $3 = -3x$,

解得 $x = -1$,

$\therefore$ 交点 A 坐标为 $(-1, 3)$,

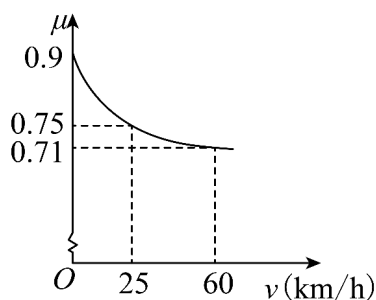
直线 $y = kx + 4$ 的图象在直线 $y = -3x$ 上方时, 对应的 x 的取值范围,

从图中可知: 在交点 $A(-1, 3)$ 的右侧, 即 $x > -1$ 时, $y = kx + 4$ 在 $y = -3x$ 上方, 满足不等式,

$\therefore$ 不等式 $kx + 4 > -3x$ 的解集为 $x > -1$.

6. 汽车轮胎的摩擦系数是影响行车安全的重要因素, 在一定条件下, 它会随车速的变化而变化. 研究发现, 某款轮胎的摩擦系数 μ 与车速 $v(\text{km/h})$ 之间的函数关系如图所示.

下列说法中错误的是 ()



- A. 汽车静止时，这款轮胎的摩擦系数为 0.9
- B. 当 $0 \leq v \leq 60 \text{ km/h}$ 时，这款轮胎的摩擦系数随车速的增大而减小
- C. 要使得这款轮胎的摩擦系数高于 0.71，车速应高于 60 km/h
- D. 当车速从 0 km/h 加速到 25 km/h 时，该轮胎的摩擦系数减小了 0.15

【答案】C

【解析】

【分析】结合给定的摩擦系数 - 车速函数图像，读取特殊点的数值、判断函数的增减性，依次验证四个选项的描述是否正确，最终找出说法错误的选项.

- 【详解】解：A、汽车静止时车速 $v = 0$ ，由图象可得此时摩擦系数 $\mu = 0.9$ ，说法正确；
- B、 $0 \leq v \leq 60 \text{ km/h}$ 时，图象呈下降趋势，说明摩擦系数随车速增大而减小，说法正确；
- C、由图象可知，车速 $v = 60 \text{ km/h}$ 时 $\mu = 0.71$ ，且车速越大摩擦系数越小，因此摩擦系数高于 0.71 时，车速应低于 60 km/h ，原说法错误；
- D、 $v = 0$ 时 $\mu = 0.9$ ， $v = 25 \text{ km/h}$ 时 $\mu = 0.75$ ，摩擦系数减小了 $0.9 - 0.75 = 0.15$ ，说法正确.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 已知点 $P(-1, 2)$ 和点 Q 关于 x 轴对称，则点 Q 的坐标 _____.

【答案】 $(-1, -2)$

【解析】

【分析】根据关于 x 轴对称的点，横坐标相同，纵坐标互为相反数.

【详解】解：根据关于 x 轴对称的点，横坐标相同，纵坐标互为相反数，

$\therefore$ 点 $P(-1, 2)$ 关于 x 轴对称的点 Q 为 $(-1, -2)$ ，

故答案为： $(-1, -2)$ 。

【点睛】本题考查了坐标系中的轴对称，掌握坐标系中的轴对称的特点是解题的关键。在平面直角坐标系

中,关于 x 轴对称的点,横坐标相同,纵坐标互为相反数,关于 y 轴对称的点,纵坐标相同,横坐标互为相反数.

8. 在平面直角坐标系中,将点 $A(1,2)$ 先向左平移3个单位长度,再向下平移1个单位长度后得到点 A_1 ,则点 A_1 的坐标是_____.

【答案】 $(-2,1)$

【解析】

【分析】点平移的坐标变化规律为横坐标左移减,右移加;纵坐标上移加,下移减,根据规律计算即可得到平移后点的坐标.

【详解】解:已知点 A 的坐标为 $(1,2)$,将点 A 先向左平移3个单位长度,再向下平移1个单位长度得到点 A_1 ,根据平移规律可得点 A_1 的横坐标为 $1-3=-2$,纵坐标为 $2-1=1$,因此点 A_1 的坐标是 $(-2,1)$.

9. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{x}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x \leq 2$ 且 $x \neq 0$

【解析】

【分析】根据分式的分母不为0,以及二次根式的被开方数大于等于0,进行求解即可.

【详解】解:由题意得:

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}, \text{解得: } x \leq 2 \text{ 且 } x \neq 0;$$

故答案为: $x \leq 2$ 且 $x \neq 0$.

【点睛】本题考查求函数的定义域.熟练掌握分式的分母不为0,以及二次根式的被开方数大于等于0,是解题的关键.

10. 已知 $E(-1, y_1)$ 、 $F(2, y_2)$ 是函数 $y=2x+m$ 图像上的两点,则 y_1 _____ y_2 . (填“>”、“=”或“<”)

【答案】<

【解析】

【分析】先根据一次函数解析式判断函数的增减性,再比较两点横坐标的大小,即可得到纵坐标的大小关系.

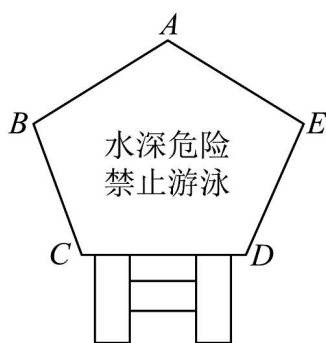
【详解】解:函数 $y=2x+m$ 是一次函数,其一次项系数 $k=2>0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,

$\because E(-1, y_1), F(2, y_2), -1 < 2,$

$\therefore y_1 < y_2.$

11. 如图是某一水塘边的警示牌, 牌面是五边形 $ABCDE$, 其中 $\angle B = \angle E = 100^\circ$, $\angle C = \angle D = 110^\circ$, 则这个五边形的内角 $\angle A$ 的大小为 _____ $^\circ$.



【答案】 120

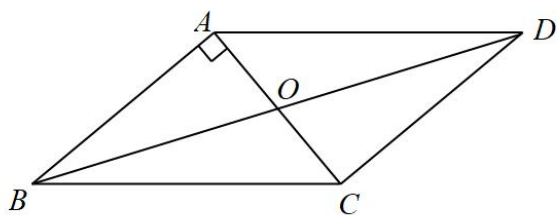
【解析】

【分析】 先求出五边形的内角和, 再减去已知的角即可求解.

【详解】 解: $\because$ 五边形的内角和 $= (5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$,

$\therefore \angle A = 540^\circ - \angle B - \angle E - \angle C - \angle D = 540^\circ - 100^\circ - 100^\circ - 110^\circ - 110^\circ = 120^\circ$.

12. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AB \perp AC$. 若 $AB = 12$, $AC = 10$, 则 BD 的长为 _____.



【答案】 26.

【解析】

【分析】 利用平行四边形的性质可知 $AO = 5$, 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中利用勾股定理可得 $BO = 13$, 即可得出 $BD = 2BO = 26$.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore BD = 2BO, AO = OC = \frac{1}{2}AC = 5,$

$$\therefore AB \perp AC,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, 由勾股定理可得: $BO = \sqrt{AO^2 + AB^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$

$$\therefore BD = 2BO = 26,$$

故答案为: 26.

【点睛】 本题考查了平行四边形对角线互相平分性质和勾股定理运用, 解题关键是熟悉相关性质.

13. 已知菱形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 、 BD 的长分别为 4 cm 和 6 cm, 则菱形的面积为 _____ cm^2 .

【答案】

12

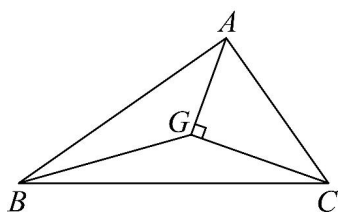
【解析】

【分析】 本题考查菱形的面积计算, 根据菱形面积等于对角线乘积的一半代入计算即可.

【详解】 解: $\because$ 菱形 $ABCD$ 的两条对角线 AC , BD 的长分别为 4cm 和 6cm,

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12 (\text{cm}^2).$$

14. 如图, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 且 $AG \perp GC$, 已知 $BG = 6$, 则 AC 的长为 _____.



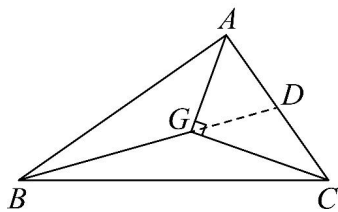
【答案】

6

【解析】

【分析】 延长 BG 交 AC 于点 D , 根据三角形重心的性质可得 BD 为 $\triangle ABC$ 的中线且 $BG:GD = 2:1$, 从而求出 GD 的长, 再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半即可求解.

【详解】 解: 如图, 延长 BG 交 AC 于点 D ,



$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore BD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $BG:GD = 2:1$, D 为 AC 的中点,

$$\because BG = 6,$$

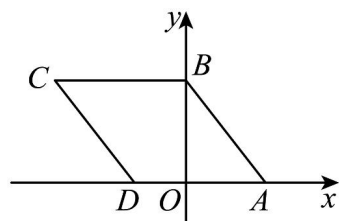
$$\therefore GD = \frac{1}{2}BG = 3,$$

$\because AG \perp GC$, D 为 AC 的中点,

$\therefore GD$ 是 $Rt\triangle AGC$ 斜边 AC 上的中线,

$$\therefore AC = 2GD = 2 \times 3 = 6.$$

15. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知菱形 $ABCD$, 且 $A(3,0)$, $B(0,4)$, 则点 C 的坐标为_____.



【答案】 $(-5,4)$

【解析】

【分析】 利用勾股定理求出 AB 的长, 再根据菱形的性质得出 BC 的长, 进而即可求解.

【详解】 解: $\because A(3,0)$, $B(0,4)$,

$$\therefore OA = 3, OB = 4,$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore BC = AB = 5, BC \parallel AD \parallel x \text{ 轴},$$

$\therefore$ 点 C 的纵坐标为 4, 横坐标为 $0 - 5 = -5$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-5,4)$.

16. 某快递公司规定: 寄到甲地的快递费, 当物件质量不超过1千克时, 一律按12元收取“首重”费用; 当物件的质量超过1千克时, 超过部分按价格2元/千克收取“续重”费用; 如果某物件质量超过1千克, 那么寄到甲地的快递费 y (单位: 元) 与物件质量 x (单位: 千克) 之间的函数表达式是_____ (无需写定义域).

【答案】

$$y = 2x + 10$$

【解析】

【分析】 根据题意, 总快递费由首重费用和续重费用两部分组成, 先求出超过1千克部分的质量, 再根据收费规则列出函数关系式, 化简后即可得到结果.

【详解】解：当物件质量 $x > 1$ 千克时，快递费分为两部分：

首重（1千克内）固定收费12元；

超过1千克的续重部分质量为 $(x-1)$ 千克，续重费用为 $2(x-1)$ 元，

总快递费： $y = 12 + 2(x-1) = 2x + 10$ ，

$\therefore$ 函数表达式为 $y = 2x + 10$ 。

17. 在平面直角坐标系中，如果某一个点的纵坐标比横坐标大 2，那么我们把这样的点称为“两步点”，例如点 $(-3, -1)$ 、 $(2, 4)$ 都是“两步点”。已知一条直线与坐标轴的交点都是“两步点”，则这条直线的表达式是_____。

【答案】 $y = x + 2$ 或 $y = 2 + x$

【解析】

【分析】先根据“两步点”的定义求出直线与 x 轴、 y 轴的交点坐标，再利用待定系数法求出直线的表达式即可。

【详解】解：由题意可得，直线与 x 轴的交点为 $(-2, 0)$ ，与 y 轴交点为 $(0, 2)$ ，

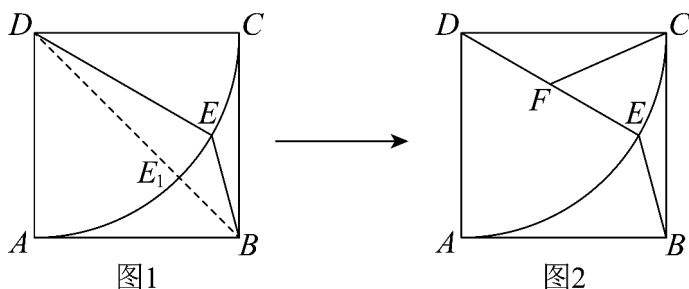
设直线函数表达式为 $y = kx + b$ ，

把 $(-2, 0)$ ， $(0, 2)$ 代入，得 $\begin{cases} -2k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 直线函数表达式为 $y = x + 2$ 。

18. 正方形 $ABCD$ 中， $AD = 2$ ，以点 D 为圆心， DA 为半径画圆， E 为弧 AC 上的一个动点，连接 DE 、 BE 。如图 1 所示，当 D 、 E 、 B 三点在一条直线上时， DE 、 BE 两条线段长度之和取得最小值 $2\sqrt{2}$ ，即为 DB 的长；如图 2 所示，如果点 F 是 DE 的中点，连接 CF ，那么在点 E 运动过程中， CF 、 BE 两条线段长度之和取得的最小值为_____。



【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】取 CD 的中点 G ，连接 EG ，证明 $\triangle DFC \cong \triangle DGE$ ，则有 $EG = CF$ ，从而将 $CF + BE$ 转化为 $EG + BE \geq BG$ ，当三点共线时取得最小值，利用勾股定理计算 BG 的长即可求解。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $AD = 2$ ，

∴ $CD = AD = BC = 2$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ，

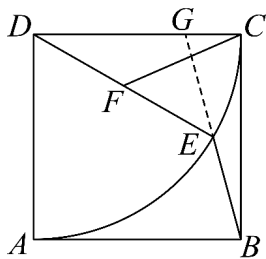
∵ 点 E 在以 D 为圆心， DA 为半径的圆上，

∴ $DE = DA = 2$ ，

∵ F 是 DE 的中点，

∴ $DF = \frac{1}{2}DE = 1$ ，

取 CD 的中点 G ，连接 EG ，如图，



则 $DF = DG = 1$ ，

∴ $\angle CDF = \angle EDG$ ， $DC = DE$ ，

∴ $\triangle DFC \cong \triangle DGE$ (SAS)，

∴ $EG = CF$ ，

∴ $CF + BE = EG + BE \geq BG$ ，

当三点共线时取得最小值，

在 $\text{Rt}\triangle BCG$ 中， $BC = 2$ ， $CG = CD - DG = 1$ ，

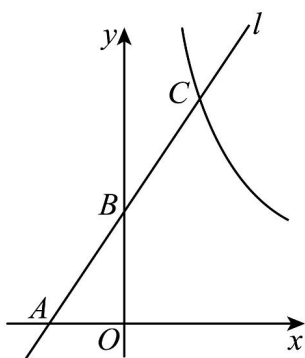
由勾股定理得 $BG = \sqrt{BC^2 + CG^2} = \sqrt{5}$ ，

即 CF 、 BE 两条线段长度之和取得的最小值为 $\sqrt{5}$ 。

三、解答题 (本大题共 7 题，满分 58 分)

19. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，将正比例函数 $y = 1.5x$ 的图像向上平移，得到的直线 l 与 x 轴、 y 轴

分别交于 A 、 B 两点，与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ ($m \neq 0$ ， $x > 0$) 的图像交于点 C ，已知点 A 的坐标为 $(-2, 0)$ 。



- (1) 求直线 l 的表达式；
 (2) 如果 $BC = AB$ ，求 m 的值.

【答案】 (1) $y = 1.5x + 3$

(2) 12

【解析】

【分析】 (1) 根据直线的平移，设直线 l 的表达式为 $y = 1.5x + b$ ，再将 $A(-2, 0)$ 代入求出 b 的值即可；

(2) 作 $CD \perp y$ 轴于点 D ，证明 $\triangle CDB \cong \triangle AOB$ (AAS)，求出点 C 的坐标，代入 $y = \frac{m}{x}$ 即可求解.

【小问 1 详解】

解：设直线 l 的表达式为 $y = 1.5x + b$ ，

将 $A(-2, 0)$ 代入，得： $0 = 1.5 \times (-2) + b$ ，

解得 $b = 3$ ，

$\therefore$ 直线 l 的表达式为 $y = 1.5x + 3$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because$ 点 A 的坐标为 $(-2, 0)$ ，

$\therefore OA = 2$ ，

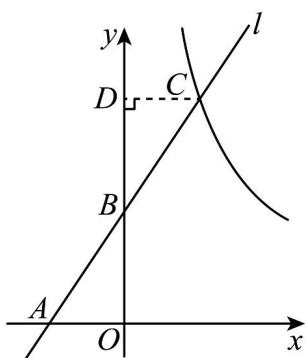
由 (1) 得直线 l 的表达式为 $y = 1.5x + 3$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 3)$ ，

$\therefore OB = 3$ ，

如图，作 $CD \perp y$ 轴于点 D ，则 $\angle CDB = \angle AOB = 90^\circ$ ，



在 $\triangle CDB$ 和 $\triangle AOB$ 中,

$$\begin{cases} \angle CDB = \angle AOB \\ \angle CBD = \angle ABO, \\ BC = BA \end{cases}$$

$\therefore \triangle CDB \cong \triangle AOB (AAS),$

$\therefore BD = OB = 3, \quad CD = AO = 2,$

$\therefore OD = BD + OB = 6,$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(2, 6),$

$\because$ 点 C 在反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象上,

$\therefore m = 2 \times 6 = 12.$

20. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 BC 的中点, 请仅用无刻度的直尺按要求完成以下作图 (用 2B 铅笔, 保留作图过程与痕迹).

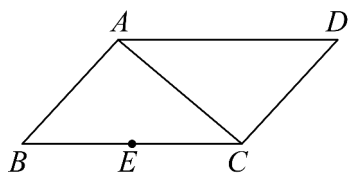


图1

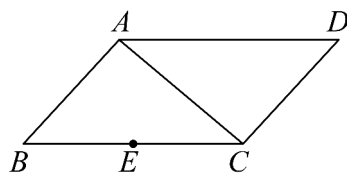


图2

(1) 如图 1, 在对角线 AC 上找一点 F , 连接 EF , 使得 $EF = \frac{1}{2}CD$.

(2) 如图 2, 作出边 AB 的中点 P .

【答案】 (1) 如图, EF 即为所求;

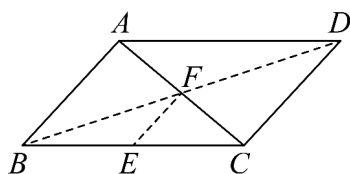


图1

(2) 如图, 点 P 即为所求.

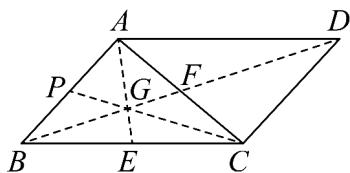


图2

【解析】

【分析】(1) 连接 BD 交 AC 于点 F , 连接 EF 即可;

(2) 连接 BD 交 AC 于点 F , 连接 AE 交 BF 于点 G , 连接 CG 并延长交 AB 于点 P 即可.

【小问 1 详解】

解: 作图略;

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 点 F 是 BD 的中点,

$\because$ 点 E 是 BC 的中点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}CD;$$

【小问 2 详解】

解: 作图略;

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 点 F 是 AC 的中点, 即 BF 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的中线,

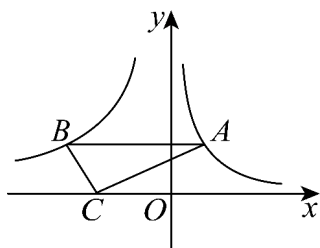
$\because$ 点 E 是 BC 的中点, 即 AE 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线,

$\therefore CP$ 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中线,

$\therefore$ 点 P 是边 AB 的中点.

21. 如图, 点 A 是反比例函数 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象上一点, 过点 A 作 $AB \parallel x$ 轴交反比例函数

$y = -\frac{12}{x} (x < 0)$ 的图像于点 B . 点 C 是 x 轴上任意一点, 连接 AC 、 BC .



(1) 如果点 A 的横坐标为 2, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

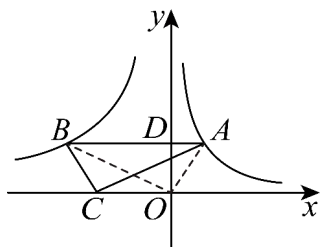
(2) 如果点 A 是反比例函数 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图像上任意一点, 那么 $\triangle ABC$ 的面积会发生改变吗? 给出你

的判断并通过计算说明理由.

【答案】(1) 8

(2) 解: 不会, 理由如下:

如图, 连接 OA 、 OB , 设 AB 与 y 轴的交点为 D ,



$\because AB \parallel x$ 轴,

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO}$, $AB \perp y$ 轴,

由反比例函数 k 的几何意义可知,

$$S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} \times 4 = 2, \quad S_{\triangle OBD} = \frac{1}{2} \times |-12| = 6,$$

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} = S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBD} = 8$ 为定值.

【解析】

【分析】(1) 先求出点 A 、 B 的坐标, 再求出 $\triangle ABC$ 的面积即可;

(2) 连接 OA 、 OB , 设 AB 与 y 轴的交点为 D , 由反比例函数 k 的几何意义可知,

$S_{\triangle ABO} = S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBD} = 8$, 由等积变形可得 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} = 8$ 为定值.

【小问 1 详解】

解: 将 $x = 2$ 代入 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$, 得 $y = 2$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2, 2)$,

$\because AB \parallel x$ 轴,

$\therefore y_A = y_B = 2$,

将 $y = 2$ 代入 $y = -\frac{12}{x} (x < 0)$, 得 $y = -6$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-6, 2)$,

$\therefore AB = 8$,

$\because$ 点 C 是 x 轴上任意一点,

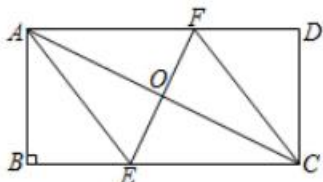
∴ 点 C 到直线 AB 的距离为 2,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8;$$

【小问 2 详解】

略

22. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 O 为对角线 AC 的中点, 过点 O 作 $EF \perp AC$ 交 BC 于点 E , 交 AD 于点 F , 连接 AE , CF .



(1) 求证: 四边形 $AECF$ 是菱形;

(2) 连接 OB , 若 $AB = 8$, $AF = 10$, 求 OB 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 由矩形的性质可得 $\angle ACB = \angle DAC$, 然后利用“ASA”证明 $\triangle AOF$ 和 $\triangle COE$ 全等, 根据全等三角形对应边相等可得 $OE = OF$, 即可证四边形 $AECF$ 是菱形;

(2) 连接 BD , $BO = \frac{1}{2}BD$, 根据平行四边形的性质可得 $AF = CF = 10$, 用勾股定理求得 $FD = 6$, 在 $\triangle BDC$ 中, $\angle DCB = 90^\circ$, 用勾股定理求出 BD 的值, 即可解答.

【详解】(1) ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DAC,$$

∵ O 是 AC 的中点,

$$\therefore AO = CO,$$

在 $\triangle AOF$ 和 $\triangle COE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACB = \angle DAC \\ AO = CO \\ \angle AOF = \angle COE, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE (\text{ASA}),$$

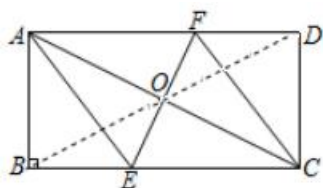
$$\therefore OE = OF, \text{ 且 } AO = CO,$$

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

又 $\because EF \perp AC$,

$\therefore$ 四边形 AECF 是菱形;

(2) 连接 BD, $BO = \frac{1}{2}BD$



$\therefore$ 四边形 AFCE 是平行四边形

$\therefore AF = CF = 10$

$\therefore \angle CDF = 90^\circ$

$$\therefore CF^2 = DC^2 + DF^2$$

$\therefore CF = 10, CD = AB = 8$

$\therefore FD = 6$

$\therefore AD = AF + DF = 6 + 10 = 16$

$\therefore \angle DAB = 90^\circ$

$$\therefore BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{16^2 + 8^2} = 8\sqrt{5}$$

$$\therefore BO = \frac{8\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5}$$

故答案为: $4\sqrt{5}$

【点睛】 本题主要考查平行四边形，解题关键是熟练掌握平行四边形的性质.

23. 【问题背景】 折纸不仅能创造出非常奇妙的图形，还能发现许多有趣的数学结论.

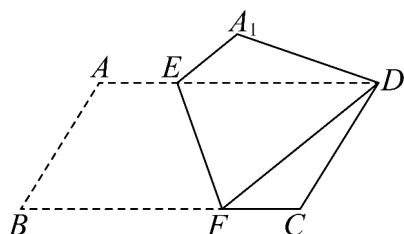


图1

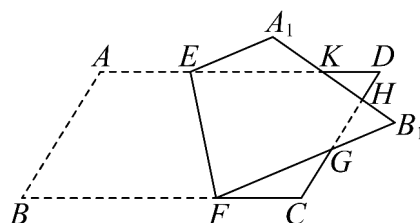


图2

【初步发现】 如图 1，将 $\square ABCD$ 纸片折叠，使点 B 与点 D 重合，得到折痕 EF. 观察发现 $DE = DF$ ，证明如下:

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle DEF = \angle EFB.$$

$\because$ $\square ABCD$ 纸片沿 EF 折叠得到四边形 A_1DFE ,

$$\therefore \text{四边形 } ABFE \cong \text{四边形 } A_1DFE.$$

$$\therefore \angle EFB = \angle EFD,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle EFD,$$

$$\therefore DE = DF.$$

【探究发现】

如图 2, 将 $\square ABCD$ 纸片沿 EF 折叠, 点 A 落在点 A_1 处, 点 B 落在点 B_1 处, FB_1 交 CD 边于点 G , A_1B_1 分别交边 CD 、 AD 于点 H 、 K .

如果折叠中始终保持 $AE = CF$ 成立, 观察发现 $EK = FG$ 也成立. 请你给出证明.

【答案】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle A = \angle C, \quad \angle B = \angle D,$$

由折叠得 $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AE = A_1E$,

又 $\because AE = CF$,

$$\therefore CF = A_1E, \quad \angle C = \angle A_1, \quad \angle D = \angle B_1,$$

又 $\because \angle DHK = \angle B_1HG$,

$$\therefore \angle DKH = \angle B_1GH,$$

又 $\because \angle DKH = \angle A_1KE$, $\angle CGF = \angle B_1GH$,

$$\therefore \angle CGF = \angle A_1KE,$$

在 $\triangle CGF$ 和 $\triangle A_1KE$ 中,

$$\begin{cases} \angle CGF = \angle A_1KE \\ \angle C = \angle A_1 \\ CF = A_1E \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CGF \cong \triangle A_1KE (AAS),$$

$$\therefore EK = FG.$$

【解析】

【分析】要想证明 $EK = FG$ ，需先证 $\triangle CGF \cong \triangle A_1KE$ ，根据平行四边形的性质得 $\angle A = \angle C$ ， $\angle B = \angle D$ ，由折叠得 $\angle A = \angle A_1$ ， $\angle B = \angle B_1$ ， $AE = A_1E$ ，通过导角证明两组对角相等，结合 $AE = CF$ ，证明 $\triangle A_1KE \cong \triangle A_1KF$ 即可。

【详解】略

24. 问题情境：综合与实践小组的同学到某食品直营店研学，对该店销售的上海产的“梨膏糖”的生产和销售情况进行了数据收集和信息整理，结果如下：

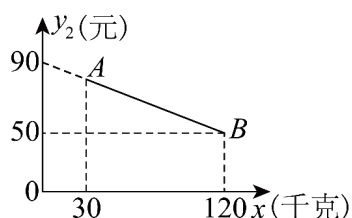
信息 1：该店每日生产的这款“梨膏糖”当日全部售完。

信息 2：该店这款“梨膏糖”日产量 x （千克）的范围是 $30 \leq x \leq 120$ 。

信息 3：该款“梨膏糖”每千克的生产成本 y_1 （元）与日产量 x （千克）之间的关系如下表所示。

信息 4：该款“梨膏糖”每千克的售价 y_2 （元）与日产量 x （千克）之间的关系可用如图的平面直角坐标系中的线段 AB 所示。

日产量 x （千克）	30	60	90	120
每千克的成本 y_1 （元）	55	50	45	40



问题解决：

(1) 根据收集的信息，该“梨膏糖”每千克的生产成本 y_1 （元）与日产量 x （千克）之间的变化规律可用学习过的函数模型刻画，其函数关系式为_____（无需写定义域）；

(2) ①该“梨膏糖”每千克的售价 y_2 （元）与日产量 x （千克）之间的函数关系式为_____；

②该款“梨膏糖”每千克的售价 y_2 最高是_____元，理由是_____；

(3) 已知销售部计划将某日该款“梨膏糖”的销售利润定额为 1200 元，如果你是生产部经理，当日该产品的产量应该定为多少比较合理？请说明理由。

【答案】(1) $y_1 = -\frac{1}{6}x + 60$

(2) ① $y_2 = -\frac{1}{3}x + 90$; ② 80; y_2 随 x 的增大而减小, 因此当 $x = 30$ 时, y_2 取得最大值 80

(3) 当日该产品的产量应该定为 60 千克比较合理, 理由如下:

根据题意可列方程: $(y_2 - y_1)x = 1200$,

$$\therefore \left[-\frac{1}{3}x + 90 - \left(-\frac{1}{6}x + 60 \right) \right] x = 1200,$$

整理, 得 $x^2 - 180x + 7200 = 0$,

解得 $x_1 = 60$, $x_2 = 120$,

当 $x = 60$ 时, 总成本为 $60 \times 50 = 3000$ (元); 当 $x = 120$ 时, 总成本为 $120 \times 40 = 4800$ (元),

$\therefore$ 当日该产品的产量应该定为 60 千克, 总成本更低, 更合理.

【解析】

【分析】(1) 容易判断 y_1 与 x 成一次函数关系, 使用待定系数法求出关系式即可;

(2) ①使用待定系数法求出函数关系式; ②利用一次函数的增减性结合 x 的取值范围求出 y_2 的最大值;

(3) 根据题意列出方程, 求解出 x 的值, 对比两种方案的总成本即可得出结论.

【小问 1 详解】

解: 由表格可知, 日产量 x 每增加 30 千克, 每千克的成本 y_1 会下降 5 元,

$\therefore y_1$ 与 x 成一次函数关系,

设 $y_1 = k_1x + b_1$,

将 $x = 30$, $y_1 = 55$; $x = 60$, $y_1 = 50$, 代入 $y_1 = k_1x + b_1$, 得,

$$\begin{cases} 55 = 30k_1 + b_1 \\ 50 = 60k_1 + b_1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{6}, \\ b_1 = 60 \end{cases},$$

$$\therefore y_1 = -\frac{1}{6}x + 60;$$

【小问 2 详解】

解: ①设 $y_2 = k_2x + b_2$,

将 $x=0$, $y_2=90$; $x=120$, $y_2=50$, 代入 $y_2=k_2x+b_2$, 得,

$$\begin{cases} 90=b_2 \\ 50=120k_2+b_2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_2=-\frac{1}{3}, \\ b_2=90 \end{cases},$$

$$\therefore y_2 = -\frac{1}{3}x + 90;$$

$$\textcircled{2} \because -\frac{1}{3} < 0,$$

$\therefore y_2$ 随 x 的增大而减小,

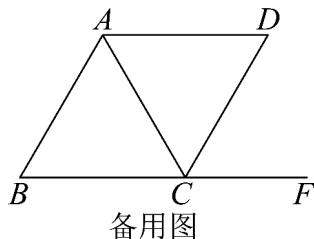
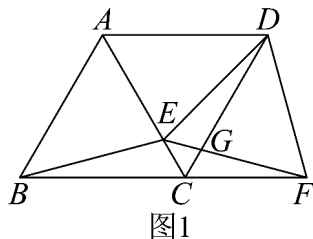
又 $\because 30 \leq x \leq 120$,

$\therefore$ 当 $x=30$ 时, y_2 取得最大值 $-\frac{1}{3} \times 30 + 90 = 80$ (元).

【小问 3 详解】

略

25. 在菱形 $ABCD$ 中, $AB=10\text{cm}$, $\angle ABC=60^\circ$, 点 E 为对角线 AC 所在直线上的一个动点, 以 DE 为边, 沿着点 E 顺时针方向作 $\angle DEF=60^\circ$, 角的另一边 EF 交射线 BC 于点 F , 交射线 DC 于点 G , 连接 BE 、 DF .



(1) 如图 1, 当点 E 在对角线 AC 上 (点 E 不与点 A 、 C 重合) 时,

①求证: $BE=EF$;

②设 CE 的长为 $x\text{cm}$, $\triangle BEF$ 的面积为 $y\text{cm}^2$. 求 y 与 x 的函数表达式, 并写出自变量 x 的取值范围;

(2) 连接 AF , 当 $\triangle ADF$ 是直角三角形时, 直接写出 CE 的长.

【答案】(1) ①证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$\therefore BC=DC$, $\angle BCE=\angle DCE$, $AB\parallel CD$,

$\because \angle ABC=60^\circ$,

$\therefore \angle DCE=60^\circ$, $\angle DCF=60^\circ$,

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle DCE$ 中,

$$\begin{cases} BC = DC \\ \angle BCE = \angle DCE, \\ CE = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CDE, \quad BE = DE,$$

$$\because \angle DGF = \angle DEF + \angle CDE = \angle DCF + \angle CFE,$$

$$\text{又} \because \angle DEF = \angle DCF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle CFE,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CFE,$$

$$\therefore BE = EF;$$

$$\textcircled{2} y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 5\sqrt{3}x \quad (0 < x < 10);$$

(2) 5cm 或 15cm

【解析】

【分析】(1) ①先证明 $\triangle BCE \cong \triangle DCE$ (SAS), 可得 $\angle CBE = \angle CDE$, $BE = DE$, 利用三角形外角性质可得 $\angle CDE = \angle CFE$, 即得 $\angle CBE = \angle CFE$, 即可求证;

②过点 E 作 $EN \perp BC$ 于 N , 解直角三角形得到 EN , CN , 可得 BN , 由等腰三角形三线合一可得 BF , 即可由三角形面积公式得到 y 与 x 的函数表达式, 最后由点 E 在对角线 AC 上且点 E 不与点 A 、 C 重合, 可得自变量 x 的取值范围;

(2) 根据题意分 $\angle ADF = 90^\circ$ 和 $\angle FAD = 90^\circ$ 两种情况讨论, 分别列方程求解即可.

【小问1详解】

①略;

②解: 过点 E 作 $EN \perp BC$ 于 N , 则 $\angle ENC = 90^\circ$,

$$\because BE = EF,$$

$$\therefore BF = 2BN,$$

$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 为菱形, } \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore BC = AB = 10\text{cm}, \quad \angle ACB = \frac{1}{2}\angle BCD = 60^\circ,$$

$$\text{即 } \angle ECN = 60^\circ,$$

$$\because CE = x\text{cm},$$

$$\therefore EN = CE \cdot \sin 60^\circ = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x (cm), \quad CN = CE \cdot \cos 60^\circ = x \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x (cm),$$

$$\therefore BN = BC - CN = \left(10 - \frac{1}{2}x\right) cm,$$

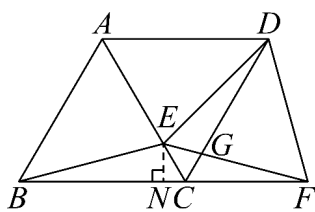
$$\therefore BF = 2\left(10 - \frac{1}{2}x\right) = (20 - x) cm,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}BF \cdot EN = \frac{1}{2} \times (20 - x) \times \frac{\sqrt{3}x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 5\sqrt{3}x,$$

$\because$ 点 E 在对角线 AC 上且点 E 不与点 A 、 C 重合,

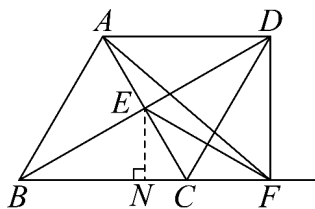
$$\therefore 0 < x < 10,$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 5\sqrt{3}x (0 < x < 10);$$



【小问 2 详解】

解: 当 $\angle ADF = 90^\circ$ 时, $\triangle ADF$ 是直角三角形, 如图所示,



$$\because \angle ADC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF = 30^\circ,$$

$$\because \angle DCF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\because CD = 10 cm,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}CD = 5 cm,$$

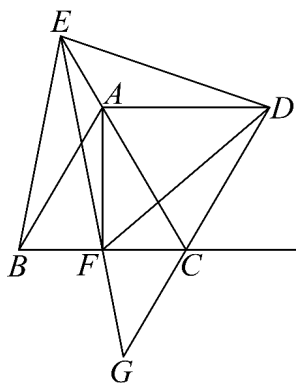
由 (1) 知, $BF = 20 - x$,

$$\because BF = BC + CF = 15 cm,$$

$$\therefore 20 - x = 15, \text{ 即 } x = 5,$$

$\therefore CE$ 的长为 5cm ；

当 $\angle FAD = 90^\circ$ 时， $\triangle ADF$ 是直角三角形，如图所示，



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle AFB = \angle FAD = 90^\circ$,

$\because AB = AC$,

$\therefore BF = FC = \frac{1}{2}BC = 5\text{cm}$,

由 (1) 知， $BF = 20 - x$,

$\therefore 20 - x = 5$,

$\therefore x = 15$,

$\therefore CE$ 的长为 15cm ,

综上所述， CE 的长为 5cm 或 15cm .

【点睛】 本题以菱形为背景，综合考查全等三角形的判定与性质、锐角三角函数解直角三角形、二次函数面积建模以及直角三角形存在性分类讨论，解题关键在于通过全等及角度传递证明 $BE = CF$ ，架起边角转化的桥梁，利用等腰三角形“三线合一”将底边 BF 用 CE 表示，再借助 60° 角的三角函数建立面积与 x 的二次函数关系，最后对直角三角形可能情形逐一排除，锁定唯一情况，结合边长关系列方程求解，体现数形结合与分类讨论的核心思想.