

2024 学年度第二学期期末学情诊断

初二数学试卷

(测试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 一次函数 $y=x+2$ 的图象不经过的象限是()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【详解】分析: 根据一次函数的图像与性质, 由 k 、 b 的值得到函数的图像, 由图像判断即可求解.

详解: $\because k=1>0$,

$\therefore$ 图象过第一、三象限,

$\because b=2>0$,

$\therefore$ 图象过第二象限,

$\therefore$ 直线 $y=x+2$ 经过第一、二、三象限, 不经过第四象限.

故选 D.

点睛: 一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$, k 、 b 为常数) 的图像与性质可知: 当 $k>0$, $b>0$ 时, 图像过一二三象限, y 随 x 增大而增大; 当 $k>0$, $b<0$ 时, 图像过一三四象限, y 随 x 增大而增大; 当 $k<0$, $b>0$ 时, 图像过一二四象限, y 随 x 增大而减小; 当 $k<0$, $b<0$, 图像过二三四象限, y 随 x 增大而减小.

2. 若 $k<0$, 关于 x 的一元二次方程 $kx^2-x+1=0$ 的根的情况是 ()

- A. 有两个相等的实数根 B. 有两个不相等的实数根
C. 没有实数根 D. 无法判断

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式. 熟练掌握一元二次方程根的判别式与根的情况的关系, 是解题的关键.

根据一元二次方程根的判别式 Δ 进行判断. 当 $\Delta>0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta=0$ 时, 有两个相等的实数根; 当 $\Delta<0$ 时, 无实数根.

【详解】解: $\because$ 方程 $kx^2-x+1=0$ 中, $a=k$, $b=-1$, $c=1$.

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4 \cdot k \cdot 1=1-4k$.

$$\therefore k < 0,$$

$$\therefore -4k > 0,$$

$$\therefore \Delta = 1 + (-4k) > 1,$$

$$\text{即 } \Delta > 0.$$

故方程有两个不相等的实数根,

故选: **B**.

3. 学校艺术节需用红纸花 3000 朵, 某班全体同学自愿承担这批红纸花的制作任务, 在实际制作时, 有 10 名同学因排练节目而没有参加, 这样参加劳动的同学平均每人制花的数量比原定全班同学平均每人要完成的数量多 15 朵, 设这个班级共有 x 名同学, 根据题意可得方程 ()

$$\text{A. } \frac{3000}{x} - \frac{3000}{x-10} = 15$$

$$\text{B. } \frac{3000}{x-10} - \frac{3000}{x} = 15$$

$$\text{C. } \frac{3000}{x} - \frac{3000}{x+10} = 15$$

$$\text{D. } \frac{3000}{x+10} - \frac{3000}{x} = 15$$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的实际应用, 正确理解题意, 找到等量关系是解题的关键.

设班级共有 x 名同学, 原定全班平均每人制作 $\frac{3000}{x}$ 朵, 实际参加人数为 $(x-10)$ 人, 平均每人制作 $\frac{3000}{x-10}$

朵, 根据题意, 实际平均比原定多 15 朵, 列方程即可.

【详解】 解: 设这个班级共有 x 名同学, 根据题意可得方程 $\frac{3000}{x-10} - \frac{3000}{x} = 15$,

故选: **B**.

4. 下列事件中, 属于必然事件的是 ()

A. 在平面上画一个四边形, 这个四边形的内角和等于 360°

B. 在平面上画一个平行四边形, 这个平行四边形的对角线互相垂直

C. 在平面上画一个平行四边形, 这个平行四边形的对角线相等

D. 在平面上画一个平行四边形, 这个平行四边形是轴称图形

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的性质, 必然事件的概念, 需根据平行四边形的性质进行判断, 即可作答.

【详解】 解: A、任意四边形的内角和恒为 360° , 无论形状如何, 均满足该性质, 属于必然事件,

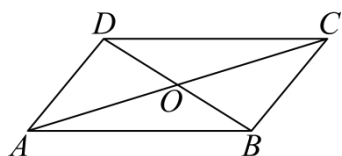
B、平行四边形的对角线互相垂直仅在菱形时成立，普通平行四边形对角线仅互相平分，不必然垂直，属于不确定事件，

C、平行四边形的对角线相等仅在矩形时成立，普通平行四边形对角线长度不等，属于不确定事件，

D、平行四边形是轴对称图形仅在菱形或矩形时成立，普通平行四边形（如非菱形、非矩形）无对称轴，属于不确定事件，

故选：A

5. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AO}$ 可以表示为（ ）



A. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

B. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

C. $\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平面向量，三角形法则，平行四边形的性质等知识，根据平行四边形的性质以及三角形法则求解即可，解题的关键是熟练掌握三角形法则.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

故选：D.

6. 在四边形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 、 G 、 H 分别是各边的中点，四边形 $EFGH$ 是正方形，下列选项中正确的是（ ）

A. 四边形 $ABCD$ 一定是矩形

B. 四边形 $ABCD$ 一定是正方形

C. 四边形 $ABCD$ 的对角线相等且垂直

D. 四边形 $ABCD$ 有一组邻边相等且有一个内角是直角

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查中点四边形的性质，解题的关键是掌握三角形中位线定理以及中点四边形与原四边形对角线的关系.

利用三角形中位线定理，得出中点四边形 $EFGH$ 的边与原四边形 $ABCD$ 对角线的关系，再结合正方形性质判断原四边形对角线特征.

【详解】中点四边形性质：四边形各边中点连线形成的四边形（中点四边形）的边平行于原四边形的对角线，且长度为对角线的一半.

正方形条件：若中点四边形为正方形，则其四条边相等且互相垂直.

边相等：原四边形的两条对角线长度相等（若中点四边形边长为原对角线的一半，则对角线相等）.

边垂直：原四边形的对角线互相垂直（若中点四边形邻边垂直，则原对角线垂直）.

A、B 错误，原四边形不一定是矩形或正方形，只需满足对角线相等且垂直即可；

C 正确：对角线相等且垂直是原四边形满足中点四边形为正方形的充要条件；

D 错误：原四边形可能无邻边相等或直角，仅需对角线满足条件.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 把直线 $y = -2x + 3$ 向上平移 2 个单位所得直线的解析式是_____.

【答案】 $y = -2x + 5$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的平移，根据一次函数的平移法则即可得解，熟练掌握一次函数的平移法则是解此题的关键.

【详解】解：把直线 $y = -2x + 3$ 向上平移 2 个单位所得直线的解析式是 $y = -2x + 3 + 2 = -2x + 5$,

故答案为： $y = -2x + 5$.

8. 直线 $y = -2x + 1$ 在 y 轴上的截距是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的性质，求出当 $x = 0$ 时的 y 的值，即可得解，熟练掌握一次函数的性质是解此题的关键.

【详解】解：当 $x = 0$ 时， $y = 1$,

故直线 $y = -2x + 1$ 在 y 轴上的截距是 1,

故答案为： 1.

9. 方程 $x = \sqrt{x+2}$ 的解是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题考查无理方程的求法，把方程两边平方求解，再检验即可得到答案.

【详解】 解：把方程两边平方得： $x+2 = x^2$,

整理得： $(x-2)(x+1) = 0$,

解得： $x = 2$ 或 $x = -1$,

经检验， $x = 2$ 是原方程的解.

故答案为： $x = 2$.

10. 方程组 $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ 的解为_____.

【答案】 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 利用代入消元法求解即可.

【详解】 解： $\begin{cases} x+y=3 \text{①} \\ xy=2 \text{②} \end{cases}$

由题意可知 $x=3-y$ ③，代入 $xy=2$ 可得

$3y - y^2 = 2$,

变式为 $y^2 - 3y + 2 = 0$ ，即 $(y-2)(y-1) = 0$,

解得： $y=2$ 或 $y=1$,

把 $y=2$ 代入③得 $x=1$,

把 $y=1$ 代入③得 $x=2$,

$\therefore$ 方程组的解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

故答案为： $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

【点睛】 此题考查了二元二次方程组的解法，要熟练应用代入消元法和加减消元法.

11. 某公司 5 月份的营业额为 25 万，7 月份的营业额为 36 万，已知 6、7 月的增长率相同，则增长率为_____.

【答案】 20%

【解析】

【分析】根据该公司 6、7 两个月营业额的月均增长率为 x ，结合 5 月、7 月营业额即可得出关于 x 的一元二次方程，解此方程即可得解.

【详解】解：设该公司 6、7 两个月营业额的月均增长率为 x ，根据题意得，

$$25(1+x)^2 = 36$$

解得， $x_1 = 0.2, x_2 = -2.2$ （舍去）

所以，增长率为 20%

故答案为：20%

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，根据数量关系列出关于 x 的一元二次方程是解题的关键.

12. 有 10 张卡片，上面分别写着数 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10. 从中随机抽取 1 张，该卡片上的数是 3 的整数倍的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{10}$

【解析】

【分析】本题考查了根据概率公式求概率，由题意可得，从中随机抽取 1 张，共有 10 种等可能出现的结果，其中该卡片上的数是 3 的整数倍的情况有 3 种，由此计算即可得解，用到的知识点为：概率等于所求情况数与总情况数之比.

【详解】解：由题意可得，从中随机抽取 1 张，共有 10 种等可能出现的结果，其中该卡片上的数是 3 的整数倍的情况有 3 种，

故从中随机抽取 1 张，该卡片上的数是 3 的整数倍的概率是 $\frac{3}{10}$ ，

故答案为： $\frac{3}{10}$.

13. 一个多边形的内角和等于 900° ，这个多边形的边数是_____.

【答案】 7

【解析】

【分析】本题主要考查了多边形的知识，熟练掌握多边形内角和公式是解题关键. 设该多边形的边数为 n ，根据多边形内角和公式 $(n-2) \times 180^\circ$ 求解即可.

【详解】解：设该多边形的边数为 n ，根据题意，

可得 $(n-2) \times 180^\circ = 900^\circ$,

解得 $n = 7$,

所以, 这个多边形的边数是 7.

故答案为: 7.

14. 如果梯形的一条底边长为 6, 中位线长为 8, 那么梯形的另一条底边长 x 的值是 _____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查梯形中位线定理等知识点, 只需根据梯形的中位线定理“梯形的中位线等于两底和的一半”, 进行计算即可, 熟练掌握“梯形的中位线等于两底和的一半”是解决此题的关键.

【详解】 根据梯形的中位线定理, 得:

$$x = 2 \times 8 - 6 = 10,$$

故答案为: 10.

15. 如果 CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, E 、 F 分别是 AC , BC 的中点, 连接 DE 、 DF , 那么再加一个条件_____ (只要写一种情况), 就可得到四边形 $CEDF$ 是菱形.

【答案】 $AD = BD$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 利用中位线定理, 角的平分线, 菱形的判定, 平行四边形的判定解答即可.

【详解】 证明: 添加条件为: $AD = BD$.

如图: E 、 F 分别是 AC , BC 的中点, $AD = BD$,

则 $DE \parallel BC, DF \parallel AC$,

故四边形 $CEDF$ 是平行四边形;

$\therefore CD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD,$$

$$\therefore DE \parallel BC, DF \parallel AC,$$

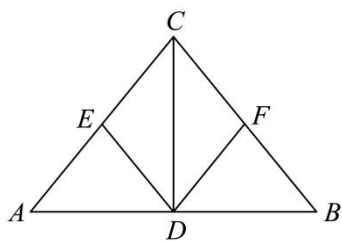
$$\therefore \angle EDC = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle EDC,$$

$$\therefore EC = ED,$$

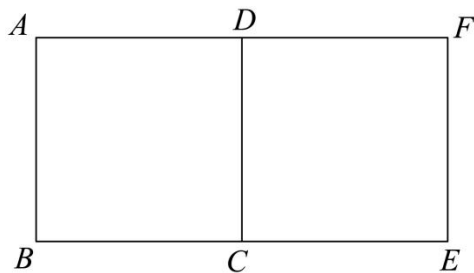
$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是菱形.

故答案为: $AD = BD$ (答案不唯一)



【点睛】 本题考查了中位线定理，角的平分线，菱形的判定，平行四边形的判定，熟练掌握判定和性质是解题的关键.

16. 如图，如果把正方形 CDFE 经过旋转后能与正方形 ABCD 重合，那么图形所在的平面上可作为旋转中心的点共有___个.



【答案】 3

【解析】

【分析】 根据旋转的性质，把正方形 CDFE 经过旋转后能与正方形 ABCD 重合，分析对应点的不同情况，易得答案.

【详解】 根据图形间的关系，分析可得如果把正方形 CDFE 经过旋转后能与正方形 ABCD 重合，那么图形所在的平面上可作为旋转中心的点有 C、D，以及线段 CD 的中点共三个，故答案为 3.

【点睛】 本题考查了旋转的性质：旋转前后的两个图形全等，对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角，对应点到旋转中心的距离相等.

17. 矩形纸片 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 5$ ，点 M 在 AD 边所在的直线上，且 $DM = 1$ ，将矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 B 与点 M 重合，折痕与 AD ， BC 分别交于点 E ， F ，则线段 EF 的长度为_____.

【答案】 $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 分点 M 在 D 点右边与左边两种情况分别画出图形，根据勾股定理即可求解.

【详解】 解： $\because$ 折叠，

$$\therefore OM = OB, EF \perp BM,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AD \parallel BC$$

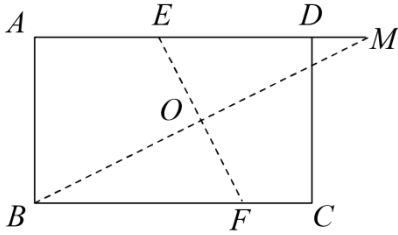
$$\therefore \angle M = \angle OBF, \angle MEO = \angle BFO,$$

$$\text{又 } OM = OB$$

$$\therefore \triangle OEM \cong \triangle OFB$$

$$\therefore OF = OB,$$

当 M 点在 D 点的右侧时, 如图所示, 设 BM, EF 交于点 O ,



$$\because AB = 3, BC = 5, DM = 1,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \text{ 中, } BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\text{则 } OM = \frac{1}{2}BM = \frac{3}{2}\sqrt{5},$$

$$\because \tan M = \frac{EO}{OM} = \frac{AB}{AM} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

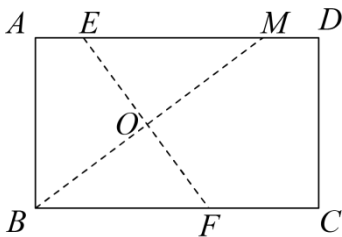
$$\therefore EO = \frac{1}{2}OM$$

$$\therefore EF = 2OE = OM = \frac{3}{2}\sqrt{5},$$

当 M 点在 D 点的左侧时, 如图所示, 设 BM, EF 交于点 O ,

$$\because AB = 3, BC = 5, DM = 1,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \text{ 中, } BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$



$$\text{则 } OM = \frac{1}{2}BM = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \tan \angle EMO = \frac{EO}{OM} = \frac{AB}{AM} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore EO = \frac{3}{4}OM$$

$$\therefore EF = 2OE = \frac{3}{2}OM = \frac{15}{4},$$

综上所述, EF 的长为: $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{5}$,

故答案为: $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了矩形与折叠问题, 勾股定理, 分类讨论是解题的关键.

三、(本大题共 4 题, 每题 6 分, 满分 24 分)

18. 解方程: $x + \sqrt{2x+3} = 0$.

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程, 将原方程变形为 $-x = \sqrt{2x+3}$, 两边同时平方可得 $x^2 = 2x+3$, 解此方程并检验即可得解.

【详解】 解: $\because x + \sqrt{2x+3} = 0$,

$$\therefore -x = \sqrt{2x+3},$$

$$\therefore x^2 = 2x+3,$$

解得: $x = 3$ 或 $x = -1$,

经检验, $x = 3$ 不是方程的解,

$$\therefore x = -1.$$

19. 解方程: $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{2}$.

【答案】 $x = -3$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 根据解分式方程的步骤计算即可得解, 熟练掌握解分式方程的步骤是解此题的关键.

【详解】 解: 去分母可得: $2x(x+1) - 4 = x^2 - 1$,

整理可得: $x^2 + 2x - 3 = 0$,

解得 $x = -3$ 或 $x = 1$,

经检验, $x = 1$ 时增根, 舍去,

$\therefore x = -3$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程, 将原方程变形为 $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$, 分别求解即可, 正确变形是解此题的关键.

【详解】 解: $\because \begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \\ x - y = 2 \end{cases},$

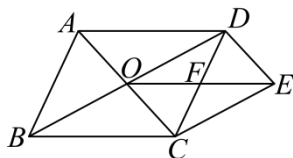
$\therefore \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases},$

解 $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases},$

解 $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases},$

$\therefore$ 方程组的解为 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$

21. 如图, 已知: 平行四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , 过点 D 、 C 分别作 $DE \parallel AC$, $CE \parallel BD$, DE 、 CE 相交于点 E , 连接 OE 交 CD 于点 F , 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



(1) 用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OE} =$ _____;

(2) 连接 BF , 用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BF} =$ _____.

【答案】(1) $\vec{b} + 0 \times \vec{a}$

(2) $\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】(1) 先证明四边形 $DECO$ 是平行四边形，再证明四边形 $BCEO$ 是平行四边形，解答即可；

(2) 利用三角形法则，平行四边形法则解答即可.

本题考查了平行四边形的判定和性质，向量的计算，熟练掌握向量的计算是解题的关键.

【小问 1 详解】

解：∵ 平行四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ,

$$\therefore OA = OC, OB = OD,$$

$$\therefore DE \parallel AC, CE \parallel BD,$$

∴ 四边形 $DECO$ 是平行四边形,

$$\therefore OD = CE = BO, OD \parallel CE,$$

∴ 四边形 $BCEO$ 是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{OE} = \vec{b} + 0\vec{a},$$

故答案为: $\vec{b} + 0 \times \vec{a}$.

【小问 2 详解】

∵ 平行四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ,

$$\therefore \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BO} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2},$$

根据题意，四边形 $DECO$ 是平行四边形,

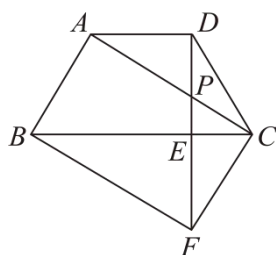
$$\therefore \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

故答案为: $\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$.

四、(本大题共 4 题, 满分 34 分)

22. 如图, 已知: 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$, 过点 D 作 $DE \perp BC$, 垂足为 E , 延长 DE 至 F , 使 $EF = DE$, 连接 BF 、 AC , AC 与 DE 相交于点 P .



(1) 求证: 四边形 $ABFC$ 是平行四边形;

(2) 如果 $AD = DE$, $AP = DC$, 求证: 四边形 $ABFC$ 是矩形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

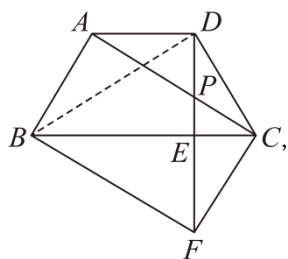
【分析】本题考查了证明四边形是平行四边形、证明四边形是矩形、等腰梯形的性质、全等三角形的判定与性质, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

(1) 连接 BD , 由等腰梯形的性质可得 $AC = BD$, 再结合线段垂直平分线的性质可得 $AC = BF$, $CF = AB$, 即可得证;

(2) 证明 $\triangle ADP \cong \triangle DEC$ (HL), 得出 $\angle DAP = \angle CDE$, 从而可得 $\angle CDE = \angle ACB$, 求出 $\angle BAC = 90^\circ$, 即可得证.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 连接 BD ,



$\because$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$,

$\therefore AC = BD$,

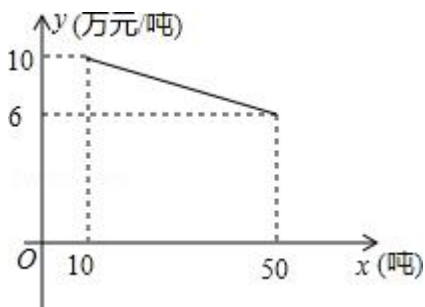
$\therefore DE \perp BC$, $EF = DE$,
 $\therefore BD = BF$, $CD = CF$,
 $\therefore AC = BF$, $CF = AB$,
 $\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

证明: $\therefore$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$,
 $\therefore \angle ABC = \angle DCB$, $\angle DAP = \angle ACB$,
 $\therefore DE \perp BC$,
 $\therefore \angle ADP = \angle DEC = 90^\circ$,
 $\therefore AD = DE$, $AP = DC$,
 $\therefore \triangle ADP \cong \triangle DEC$ (HL),
 $\therefore \angle DAP = \angle CDE$,
 $\therefore \angle CDE = \angle ACB$,
 $\therefore \angle CDE + \angle DCE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ACB + \angle ABC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAC = 180^\circ - (\angle ACB + \angle ABC) = 90^\circ$,
 $\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是平行四边形,
 $\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是矩形.

23. 某工厂生产一种产品, 当生产数量至少为 10 吨, 但不超过 50 吨时, 每吨的成本 y (万元/吨) 与生产数量 x (吨) 的函数关系式如图所示.

- (1) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出它的定义域;
 - (2) 当生产这种产品的总成本为 280 万元时, 求该产品的生产数量.
- (注: 总成本=每吨的成本 $\times$ 生产数量)



【答案】(1) y 关于 x 的函数解析式为 $y = -\frac{1}{10}x + 11$ ($10 \leq x \leq 50$). (2) 该产品的生产数量为 40 吨.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求出一函数解析式即可，根据当生产数量至少为 10 吨，但不超过 50 吨时，得出 x 的定义域.

(2) 根据总成本=每吨的成本 $\times$ 生产数量，利用 (1) 中所求得出即可.

【详解】(1) 利用图象设 y 关于 x 的函数解析式为 $y=kx+b$,

将 (10, 10) (50, 6) 代入解析式得: $\begin{cases} 10k+b=10 \\ 50k+b=6 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} k=-\frac{1}{10} \\ b=11 \end{cases}$.

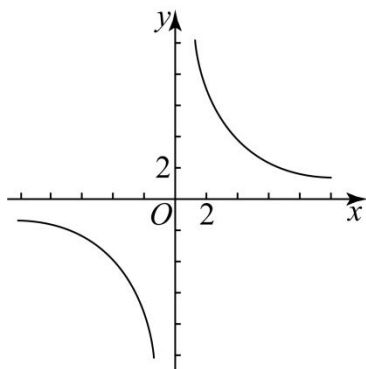
$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y=-\frac{1}{10}x+11$ ($10 \leq x \leq 50$).

(2) 当生产这种产品的总成本为 280 万元时,

$x(-\frac{1}{10}x+11)=280$, 解得: $x_1=40$, $x_2=70$ (不合题意舍去).

$\therefore$ 该产品的生产数量为 40 吨.

24. 已知反比例函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图像和一次函数 $y=kx-7$ 的图像都经过点 $P(m, 2)$.



(1) 求这个一次函数的解析式;

(2) 如果等腰梯形 $ABCD$ 的顶点 A 、 B 在这个一次函数的图像上，顶点 C 、 D 在这个反比例函数的图像上，两底 AD 、 BC 与 y 轴平行，且 A 和 B 的横坐标分别为 a 和 $a+2$ ，求 a 的值.

【答案】(1) $y=\frac{3}{2}x-7$

(2) -4 或 2

【解析】

【分析】(1) 根据点 P 在函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图象上，求出 P 点坐标，代入一次函数，从而求出一函数图象;

(2) 由题意和图象知等腰梯形 $ABCD$ 的顶点 A 、 B 在这个一次函数的图象上，求出 A 、 B 、 C 、 D 点的坐标，根据等腰梯形性质得到 $AB=CD$ ，根据两点的距离公式 $l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 得到关于 a 的方程，解方程即可求出 a 值.

【小问 1 详解】

$\because$ 点 $P(m, 2)$ 在函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象上,

$$\therefore m=6,$$

$\therefore$ 一次函数 $y=kx-7$ 的图象经过点 $P(6, 2)$,

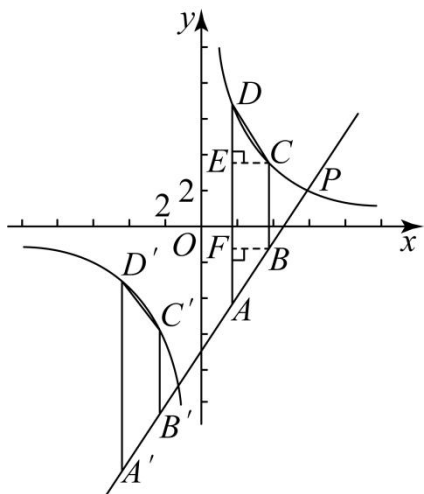
$$\text{得 } 6k-7=2,$$

$$\therefore k = \frac{3}{2},$$

$\therefore$ 所求的一次函数解析式是 $y = \frac{3}{2}x - 7$;

【小问 2 详解】

过 B 作 $BF \perp AD$, 过 C 作 $CE \perp AD$,



$\therefore$ 点 A 、 B 的横坐标分别是 a 和 $a+2$,

$\therefore$ 可得, $A(a, \frac{3a}{2} - 7), B(a+2, \frac{3(a+2)}{2} - 4), C(a+2, \frac{12}{a+2}), D(a, \frac{12}{a})$,

$$\therefore AB=CD,$$

在 $Rt\triangle CDE$ 与 $Rt\triangle ABF$ 中,

$$\text{由勾股定理得: } CD^2 = DE^2 + EC^2 = 2^2 + (\frac{12}{a} - \frac{12}{a+2})^2,$$

$$AB^2 = AF^2 + BF^2 = 2^2 + 3^2,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$$\therefore AB=CD, \text{ 即 } 2^2 + 3^2 = 2^2 + (\frac{12}{a} - \frac{12}{a+2})^2,$$

$$\text{即 } \frac{12}{a+2} - \frac{12}{a} = \pm 3,$$

$$\textcircled{1} \text{ 由 } \frac{12}{a+2} - \frac{12}{a} = 3, \text{ 化简得 } a^2 + 2a + 8 = 0, \text{ 方程无实数根,}$$

②由 $\frac{12}{a+2} - \frac{12}{a} = -3$, 化简得 $a^2 + 2a - 8 = 0$,

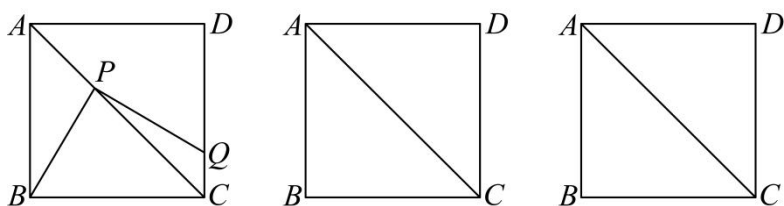
$\therefore a_1 = -4, a_2 = 2$.

经检验, $a_1 = -4, a_2 = 2$ 均为所求的值.

所以, a 的值是 -4 或 2

【点睛】此题看似比较复杂, 其实并不难, 主要考查一次函数和反比例函数的性质和图象, 学会联立方程求出交点坐标, 应用等腰梯形的基本性质求出 a 值.

25. 如图, 已知: 正方形 $ABCD$ 边长为 1, 点 P 是对角线 AC 上一点, $PQ \perp BP$, P 交射线 DC 于点 Q .



(1) 当点 Q 在边 CD 上时, 线段 PQ 与线段 PB 之间有怎样的大小关系? 试证明你观察得到的结论;

(2) 当点 Q 在边 DC 的延长线上, $\triangle PCQ$ 是等腰三角形时, 求 PC 的长;

(3) 当以 P, B, C, Q 为顶点的四边形的面积为 $\frac{1}{3}$ 时, 直接写出 AP 的长.

【答案】(1) $PB = PQ$, 证明见解析

(2) $\sqrt{2} - 1$

(3) AP 的长为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 或 $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】(1) 由正方形的性质可得 $\angle BCA = \angle DCA = 45^\circ$, $\angle BCD = 90^\circ$, 作 $PE \perp BC$ 于 E , $PF \perp CD$ 于 F , 则 $PE = PF$, 四边形 $PECF$ 为矩形, 证明 $\triangle BPE \cong \triangle QPF$ (AAS), 即可得解;

(2) 由正方形的性质可得 $\angle BAC = \angle BCA = \angle ACD = 45^\circ$, $AB = BC = 1$, $AC = \sqrt{2}$, 由点 Q 在边 DC 的延长线上可得 $\angle PCQ$ 为钝角, 证明 $\angle ABP = \angle APB$, 得出 $AP = AB = 1$, 即可得解;

(3) 分两种情况: 当点 Q 在线段 CD 上时, 作 $PE \perp BC$ 于 E , $PF \perp CD$ 于 F ; 当点 Q 在 DC 的延长线上时, 作 $PG \perp AB$ 于 G , 延长 GP 交 CD 于 H ; 分别求解即可.

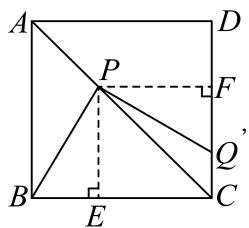
【小问 1 详解】

解: $PB = PQ$, 证明如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore \angle BCA = \angle DCA = 45^\circ, \angle BCD = 90^\circ,$

如图，作 $PE \perp BC$ 于 E ， $PF \perp CD$ 于 F ，



则 $PE = PF$ ， $\angle PEC = \angle BCD = \angle PFC = \angle PEB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $PECF$ 为矩形，

$\therefore \angle EPF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BPQ - \angle EPQ = \angle EPF - \angle EPQ$ ，

$\therefore \angle BPE = \angle QPF$ ，

$\therefore \triangle BPE \cong \triangle QPF$ (AAS)，

$\therefore BP = PQ$ ；

【小问 2 详解】

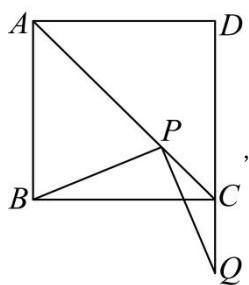
解： $\because$ 正方形 $ABCD$ 边长为 1，

$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \angle ACD = 45^\circ$ ， $AB = BC = 1$ ，

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}$ ，

$\because$ 点 Q 在边 DC 的延长线上，

$\therefore$ 如图所示， $\angle PCQ$ 为钝角，



$\therefore \triangle PCQ$ 是等腰三角形，

$\therefore CP = CQ$ ，

$\therefore \angle Q = \angle CPQ$ ，

$\because \angle Q + \angle CPQ = \angle ACD = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle Q = \angle CPQ = 22.5^\circ$ ，

$$\therefore PQ \perp BP,$$

$$\therefore \angle APB = 180^\circ - \angle BPQ - \angle CPQ = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP = 180^\circ - \angle APB - \angle BAP = 67.5^\circ,$$

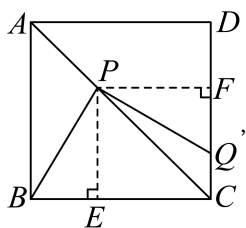
$$\therefore \angle ABP = \angle APB,$$

$$\therefore AP = AB = 1,$$

$$\therefore PC = AC - AP = \sqrt{2} - 1;$$

【小问 3 详解】

解：如图，当点 Q 在线段 CD 上时，作 $PE \perp BC$ 于 E ， $PF \perp CD$ 于 F ，



由 (1) 可得 $\angle BCA = \angle DCA = 45^\circ$ ，四边形 $PECF$ 为矩形， $\triangle BPE \cong \triangle QPF$ ，

$$\therefore \triangle PEC \text{ 为等腰直角三角形，} S_{\triangle BPE} = S_{\triangle QPF},$$

$$\therefore PE = CE,$$

$\therefore$ 四边形 $PECF$ 为正方形，

$$\therefore S_{\text{四边形}BPQC} = S_{\triangle BPE} + S_{\text{四边形}PECQ} = S_{\triangle QPF} + S_{\text{四边形}PECQ} = S_{\square PECF},$$

$\therefore$ 以 P 、 B 、 C 、 Q 为顶点的四边形的面积为 $\frac{1}{3}$ ，

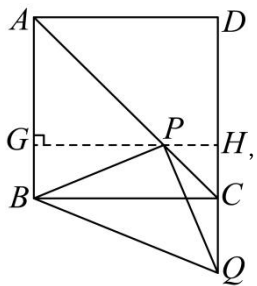
$$\therefore S_{\square PECF} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } PE^2 = \frac{1}{3},$$

$$\therefore PC = \sqrt{PE^2 + CE^2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

由 (2) 可得： $AC = \sqrt{2}$ ，

$$\therefore AP = AC - CP = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3};$$

当点 Q 在 DC 的延长线上时，作 $PG \perp AB$ 于 G ，延长 GP 交 CD 于 H ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ, \quad \angle BCA = \angle DCA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BCD = \angle HGB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $GBCH$ 为矩形,

$$\therefore \angle CHG = 90^\circ, \quad BG = CH, \quad BC = GH = 1,$$

$\therefore \triangle CHP$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore HC = PH = BG,$$

$$\because PQ \perp BP,$$

$$\therefore \angle GBP + \angle BPG = \angle BPG + \angle GQH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GBP = \angle QPH,$$

$$\therefore \triangle BPG \cong \triangle PQH \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BP = PQ, \quad GP = QH,$$

设 $GB = PH = CH = a$, 则 $QH = GP = 1 - a$,

$\therefore$ 以 P 、 B 、 C 、 Q 为顶点的四边形的面积为 $\frac{1}{3}$,

$$\therefore S_{\text{四边形}BPCQ} = S_{\text{梯形}BGHQ} - S_{\triangle BPG} - S_{\triangle PCH} = \frac{1}{2}(a+1-a) \times 1 - \frac{1}{2}a \times (1-a) - \frac{1}{2}a \times a = \frac{1}{3},$$

解得: $a = \frac{1}{3}$,

$$\therefore PH = CH = \frac{1}{3},$$

$$\therefore PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore AP = AC - CP = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

综上所述， AP 的长为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 或 $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}$.

【点睛】 本题考查了正方形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、勾股定理，熟练掌握以上知识点并灵活运用，采用分类讨论的思想是解此题的关键.