

2024-2025 学年上海市徐汇区八年级(下)期末数学模拟练习试题

考试范围：一次函数、代数方程、四边形、平面向量、概率

题号	一	二	三	四	总分
得分					

注意事项:

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在试卷上无效。
- 考试结束后，本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.如果函数 $y = 3x - 2$ 与 $y = 2x + 3k$ 的图象相交于 y 轴上，那么 k 的值为()。

- A. -2 B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{3}{2}$

【答案】 B

【解析】 解： $y = 3x - 2$ 与 y 轴交点的坐标是 $(0, -2)$ ，

把点 $(0, -2)$ 代入 $y = 2x + 3k$ ，得：

$$\text{即 } -2 = 3k,$$

$$\therefore k = -\frac{2}{3}.$$

故选 B.

2.下列关于 x 的方程中，其中说法正确的是()

- A. 方程 $x^2 + a^3x - 1 = 0$ 是一元三次方程 B. 方程 $4x^3 + 81 = 0$ 是一元三次方程
C. 方程 $x = a^2 - 2a - 3$ 是一元二次方程 D. 方程 $3a + 2x = 5x - \frac{1}{a}$ 是分式方程

【答案】 B

【解析】

【详解】 A.方程 $x^2 + a^3x - 1 = 0$ 是一元二次方程，原选项错误，该选项不符合题意；

B.方程 $4x^3 + 81 = 0$ 是一元三次方程，原选项正确，该选项符合题意；

C.方程 $x = a^2 - 2a - 3$ 是一元一次方程，原选项错误，该选项不符合题意；

D.方程 $3a + 2x = 5x - \frac{1}{a}$ 是一元一次方程，原选项错误，该选项不符合题意；

故选: B.

3. 用换元法解方程 $\frac{x^2+1}{2x} - \frac{3x}{x^2+1} = 5$, 设 $\frac{x^2+1}{x} = y$, 则得到关于 y 的整式方程为()

A. $2y^2 - 5y - 3 = 0$

B. $6y^2 + 10y - 1 = 0$

C. $3y^2 + 5y - 2 = 0$

D. $y^2 - 10y - 6 = 0$

【答案】 D

【解析】

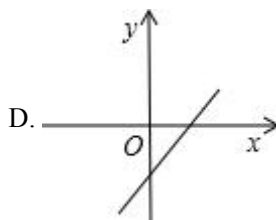
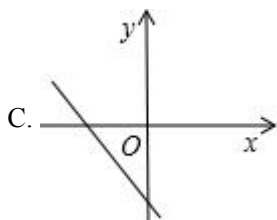
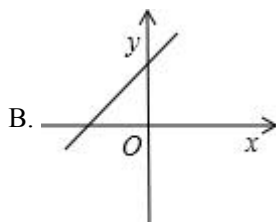
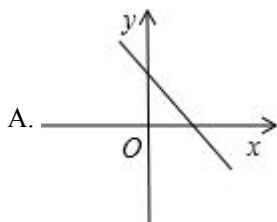
解: 设 $\frac{x^2+1}{x} = y$,

$\therefore$ 分式方程 $\frac{x^2+1}{2x} - \frac{3x}{x^2+1} = 5$ 可化为 $\frac{y}{2} - \frac{3}{y} = 5$,

化为整式方程为: $y^2 - 10y - 6 = 0$,

故选: D.

4. 若一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、四象限, 则一次函数 $y = bx + k$ 的图象大致是()



【答案】 D

【解析】 解: 一次函数 $y = kx + b$ 过二、四象限, 则函数值 y 随 x 的增大而减小, 因而 $k < 0$;

又因为经过第一象限, 那么图象与 y 轴的正半轴相交, 则 $b > 0$,

因而一次函数 $y = bx + k$ 的一次项系数 $b > 0$, y 随 x 的增大而增大, 经过一、三象限,

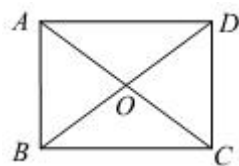
常数项 $k < 0$, 则函数与 y 轴负半轴相交, 因而一定经过一、三、四象限,

故选: D.

5. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 O , 下列选项中错误的是()

A. $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$



C. $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO}$

D. $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$

【答案】C

【解析】解：∵四边形ABCD是矩形，

$$\therefore AD \parallel BC, AB = CD, BO = OD, CO = OA,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA},$$

∴选项C错误，选项A、B、D正确，

故选：C.

6. 在平行四边形ABCD中，对角线AC，BD相交于点O，下列条件中，能推出四边形ABCD是正方形的是()

A. $AB = BC$ 且 $AC \perp BD$

B. $AB \perp BC$ 且 $AC = BD$

C. $OA = OB$ 且 $AB = BC$

D. $OA = OB$ 且 $AC = BD$

【答案】C

【解析】解：A、平行四边形ABCD中， $AB = BC$ 且 $AC \perp BD$ ，则四边形ABCD是菱形，故A错误；

B、平行四边形ABCD中， $AB \perp BC$ 且 $AC = BD$ ，则四边形ABCD是矩形，故B错误；

C、平行四边形ABCD中， $OA = OB$ 且 $AB = BC$ ，则四边形ABCD是正方形，故C正确；

D、平行四边形ABCD中， $OA = OB$ 且 $AC = BD$ ，则四边形ABCD是矩形，故D错误。故选C.

二、填空题：本题共12小题，每小题3分，共36分。

7. 在实数范围内，方程 $3x^3 + 81 = 0$ 的根是_____.

【答案】-3

【解析】解：∵ $3x^3 + 81 = 0$,

$$\therefore 3x^3 = -81,$$

$$\therefore x^3 = -27,$$

$$\therefore x = -3.$$

故答案为：-3.

8. 若方程 $\frac{x-3}{x-2} + 1 = \frac{3}{2-x}$ 的解使关于x的不等式 $(2-a)x - 3 > 0$ 成立，则实数a的取值范围是_____.

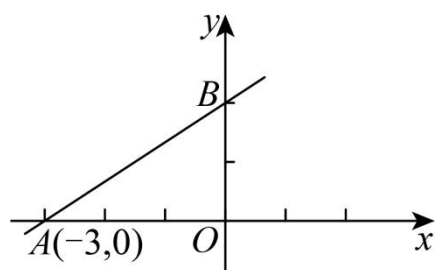
【答案】 $a < -1$

【解析】解方程 $\frac{x-3}{x-2} + 1 = \frac{3}{2-x}$ ，得 $x = 1$.

把 $x = 1$ 代入 $(2 - a)x - 3 > 0$, 得 $2 - a - 3 > 0$, 解得 $a < -1$.

故实数 a 的取值范围是 $a < -1$.

9. 如图, 一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过 A 、 B 两点, 那么关于 x 的不等式 $kx + b \geq 0$ 的解集是_____.



【答案】 $x \geq -3$

【解析】 本题考查了一次函数与一元一次不等式, 根据函数图象即可得解, 采用数形结合的思想是解此题的关键.

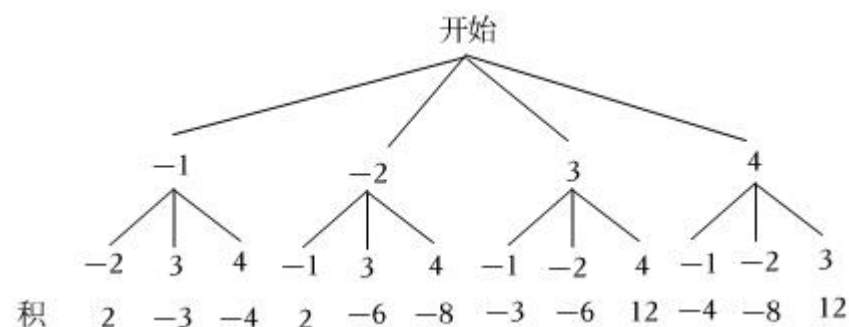
【详解】 解: 由图象可得, 关于 x 的不等式 $kx + b \geq 0$ 的解集是 $x \geq -3$,

故答案为: $x \geq -3$.

10. 有四张大小和形状完全相同的卡片, 卡片上分别写有 -1 , -2 , 3 , 4 , 从这四张卡片中随机抽取两张, 则抽取的两张卡片上的数字之积大于 0 的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 解: 画树状图如下:



由图可知, 共有 12 种等可能的结果, 其中抽取的两张卡片上的数字之积大于 0 的结果有 4 种,

$\therefore$ 抽取的两张卡片上的数字之积大于 0 的概率是 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{3}$.

11. 电影《哪吒之魔童闹海》于 2025 年春节档上映, 一上映就获得全国人民的追捧. 据不完全统计, 某市第一天票房约 200 万元, 以后每天票房按相同的增长率增长, 三天后累计票房收入共 728 万元, 将增长率记作 x , 则方程可以列为_____.

【答案】 $200 + 200(1+x) + 200(1+x)^2 = 728$

【解析】解：∵第一天票房约 200 万元，以后每天票房按相同的增长率增长，且将增长率记作 x ，
∴第二天票房约 $200(1+x)$ 万元，第三天票房约 $200(1+x)^2$ 万元。

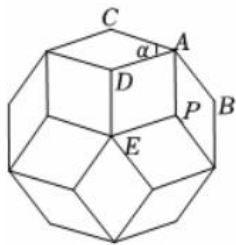
根据题意得： $200 + 200(1+x) + 200(1+x)^2 = 728$ 。

故答案为： $200 + 200(1+x) + 200(1+x)^2 = 728$ 。

由第一天的票房及每天票房的增长率，可得出第二天票房约 $200(1+x)$ 万元，第三天票房约 $200(1+x)^2$ 万元，结合三天后累计票房收入共 728 万元，可列出关于 x 的一元二次方程，此题得解。

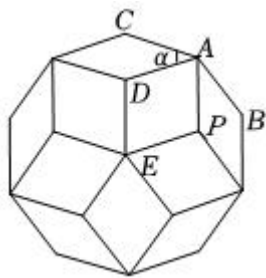
本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键。

12. 如图是一种彭罗斯地砖局部示意图，它是由两种“胖”“瘦”菱形拼接而成(不重叠、无缝隙)，则图中的 $\angle \alpha$ 为 _____°。



【答案】 36

【解析】解：如图，



$$\because \angle DEP = \angle DAP = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ, \quad \angle CAB = \frac{(10-2) \times 180^\circ}{10} = 144^\circ,$$

$$\therefore \alpha = \frac{144^\circ - 72^\circ}{2} = 36^\circ.$$

故答案为： 36。

13. 在直角坐标平面内，如果 $\square ABCD$ 的两条对角线的交点正好与坐标原点重合，已知点 $A(3,2)$ ，那么点 C 的坐标是 _____。

【答案】 $(-3, -2)$

【解析】 本题考查了平行四边形的性质，点坐标。熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键。

由 $\square ABCD$ 的两条对角线的交点正好与坐标原点重合, 点 $A(3,2)$, 可得 $C(-3,-2)$.

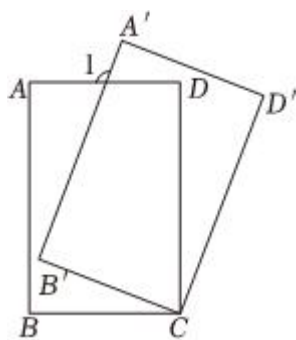
【详解】解: $\because \square ABCD$ 的两条对角线的交点正好与坐标原点重合, 点 $A(3,2)$,

$\therefore O(0,0)$ 是 AC 的中点,

$\therefore C(-3,-2)$,

故答案为: $(-3,-2)$.

14.如图, 将矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转到矩形 $A'B'CD'$ 的位置, 旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).若 $\angle 1 = 112^\circ$, 则 $\alpha =$ _____.



【答案】22

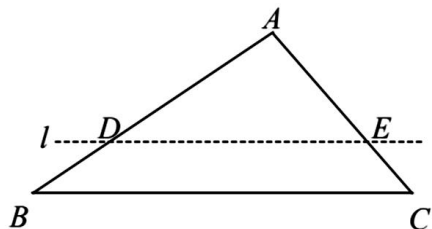
【解析】解: $\because$ 将矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转到矩形 $A'B'CD'$ 的位置,

$\therefore \angle BCD = \angle B'CD' = 90^\circ = \angle B' = \angle D$, $\angle BCB' = \alpha$,

$\because \angle 1 = 112^\circ$, $\therefore \angle B'CD = 68^\circ$,

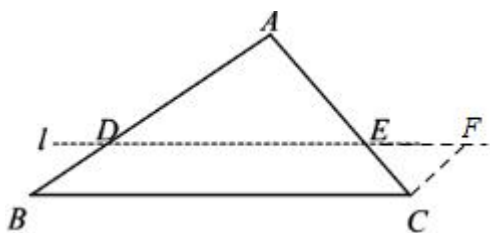
$\therefore \alpha = 22^\circ$, 故答案为: 22.

15.如图, $\triangle ABC$ 被平行于边 BC 的直线 l 分成梯形 $DBCE$ 和 $\triangle ADE$, 当 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 且 $\angle A = 90^\circ$ 时, 我们叫梯形 $DBCE$ 是“余角梯形”.如果一个“余角梯形”较短底边长 9, 两腰长分别是 3 和 4, 那么该梯形的中位线长是_____.



【答案】 $\frac{23}{2}$

【解析】解：过点C作 $CF \parallel BD$ ，交直线 l 于点F，



$\because DE \parallel BC, CF \parallel BD,$

$\therefore$ 四边形 $DBCF$ 是平行四边形,

$\therefore CF = BD, BC = DF,$

$\because CF \parallel BD, \angle A = 90^\circ,$

$\therefore \angle ECF = \angle A = 90^\circ,$

在 $Rt \triangle ECF$ 中, $EF = \sqrt{CE^2 + CF^2} = 5,$

$\therefore BC = DF = DE + EF = 9 + 5 = 14,$

$\therefore$ 梯形的中位线长是 $\frac{9+14}{2} = \frac{23}{2}.$

故答案为 $\frac{23}{2}.$

16. 设关于 x 的一次函数 $y = a_1x + b_1$ 与 $y = a_2x + b_2$, 则称函数 $y = m(a_1x + b_1) + n(a_2x + b_2)$ (其中 $m + n = 1, mn \neq 0$) 为此两个函数的生成函数. 写出一个 $y = x + 1$ 和 $y = 2x$ 的生成函数: _____.

【答案】 $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ (答案不唯一).

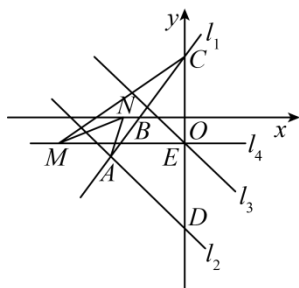
【解析】解：由题意可得,

$y = x + 1$ 和 $y = 2x$ 的生成函数是 $y = \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1}{2} \times (2x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2},$

故答案为: $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ (答案不唯一).

17. 在平面直角坐标系中, 直线 $l_1: y = \frac{7}{5}x + 4$ 与直线 $l_2: y = -x - 8$ 交于点A, 直线 l_1 与 x 轴交于点B, 与 y 轴交于点C, 直线 l_2 与 y 轴交于点D. 将直线 l_2 向上平移 6 个单位得到直线 l_3 , 直线 l_3 与 y 轴交于点E, 过点E作 y 轴的垂线 l_4 , 若点M为垂线 l_4 上的一个动点, 点N为 x 轴上的一个动点, 当 $CM + MN + NA$ 的

值最小时，此时点 M 的坐标为_____.



【答案】 $(-\frac{30}{11}, -2)$

【解析】

解：∵直线 l_2 : $y = -x - 8$,

∴当 $x = 0$ 时,

$y = -8$,

∴ $D(0, -8)$,

∵直线 l_1 : $y = \frac{7}{5}x + 4$,

∴当 $x = 0$ 时, $y = 4$,

∴ $C(0, 4)$,

∵将直线 l_2 向上平移 6 个单位得到直线 l_3 ,

∴直线 l_3 : $y = -x - 8 + 6 = -x - 2$,

∵直线 l_3 与 y 轴交于点 E ,

∴ $E(0, -2)$,

∴ $CE = 4 - (-2) = 6$, $ED = -2 - (-8) = 6$,

∴ $CE = ED$,

∴点 D 是点 C 关于直线 l_4 对称,

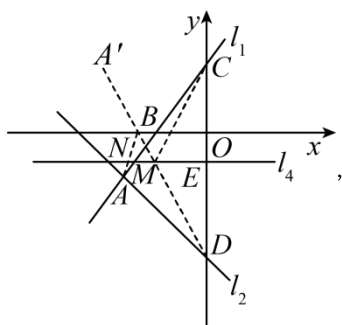
联立直线 l_1 : $y = \frac{7}{5}x + 4$ 与直线 l_2 : $y = -x - 8$ 得:

$$\begin{cases} y = \frac{7}{5}x + 4 \\ y = -x - 8 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$

∴ $A(-5, -3)$,

如图，作点 A 关于 x 轴的对称点为 A' ，则 $A'(-5, 3)$



连接 $A'D$ 交 x 轴、 l_4 于点 N 、 M ，则此时 $CM + MN + NA$ 最小，最小值为： $A'D$ ，

设直线 AD 为 $y = kx + b$ ，则有

$$\begin{cases} -5k + b = 3 \\ b = -8 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} k = -\frac{11}{5}, \\ b = -8 \end{cases}$

$\therefore$ 直线 AD 为 $y = -\frac{11}{5}x - 8$ ，

当 $y = -2$ 时，

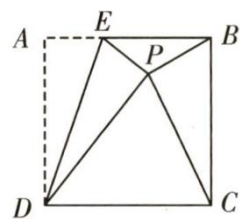
$$-\frac{11}{5}x - 8 = -2,$$

解得： $x = -\frac{30}{11}$ ，

$\therefore M\left(-\frac{30}{11}, -2\right)$.

18. 如图，将一张边长为 4 cm 的正方形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 A 落在点 P 处，折痕经过点 D 交边 AB 于点 E 。

连接 BP ， CP ，若 $\angle BPC = 90^\circ$ ，则 AE 的长为 $\underline{\hspace{1cm}}\text{ cm}$ 。



【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】 如图，过点 P 作 $FG \perp AB$ 交 AB 于点 G ，交 CD 于点 F 。

$$x - 2 - \sqrt{x - 2} - 2 = 0,$$

$$\text{设 } \sqrt{x - 2} = y,$$

$$\text{原方程化为 } y^2 - y - 2 = 0,$$

$$\text{解得 } y_1 = 2, y_2 = -1,$$

$$\text{当 } y = 2 \text{ 时, } \sqrt{x - 2} = 2, \text{ 得 } x = 6,$$

$$\text{当 } y = -1 \text{ 时, } \sqrt{x - 2} = -1 \text{ 无解.}$$

检验: 把 $x = 6$ 代入原方程, 适合. $\therefore$ 原方程的解是 $x = 6$.

$$20. \text{解方程组: } \begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ 2x - y = 15 \end{cases}$$

$$\text{【答案】解: } \begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \text{ ①} \\ 2x - y = 15 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{由 ① 得 } x - 3y = 0 \text{ 或 } x - 2y = 0,$$

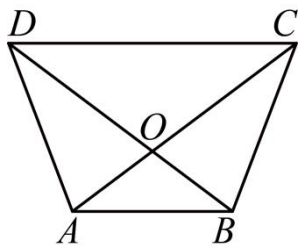
$$\text{所以原方程组化为 } \begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - y = 15 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y = 15 \end{cases},$$

$$\text{解两个方程组得 } \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases},$$

$$\text{所以原方程组的解为 } \begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 10 \\ y_2 = 5 \end{cases}.$$

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 36 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

21. (本小题 6 分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, AC 与 BD 交于点 O , 且 $OD = OC$.



(1) 求证: $AD = BC$;

(2) 设 $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 当 $CD = 2AB$ 时, 试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$.

【答案】(1) 证明: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle CDO = \angle ABO, \angle BAO = \angle DCO,$$

$$\therefore OD = OC$$

$$\therefore \angle CDO = \angle DCO$$

$$\therefore \angle ABO = \angle BAO$$

$$\therefore AO = OB$$

$$\therefore \angle AOD = \angle BOC$$

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC,$$

$$\therefore AD = BC.$$

$$(2) \because AB \parallel CD, CD = 2AB, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} = 2\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA} = \vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\vec{b} - \vec{a}$$

2. 由题意得, $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} = 2\vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, 进而可得答案.

22. (本小题 6 分) 【问题背景】2024 年 4 月 23 日是第 29 个“世界读书日”, 为给师生提供更加良好的阅读环境, 学校决定扩大图书馆面积, 增加藏书数量, 现需购进 20 个书架用于摆放书籍.

【素材呈现】

素材一: 有 A, B 两种书架可供选择, A 种书架的单价比 B 种书架单价高 20%;

素材二: 用 18000 元购买 A 种书架的数量比用 9000 元购买 B 种书架的数量多 6 个;

素材三: A 种书架数量不少于 B 种书架数量的 $\frac{2}{3}$.

【问题解决】

(1) 问题一: 求出 A, B 两种书架的单价;

(2) 问题二: 设购买 a 个 A 种书架, 购买总费用为 w 元, 求 w 与 a 的函数关系式, 并求出费用最少时的购买方案;

(3) 问题三: 实际购买时, 商家调整了书架价格, A 种书架每个降价 m 元, B 种书架每个涨价 $\frac{1}{3}m$ 元, 按问题二的购买方案需花费 21120 元, 求 m 的值.

【答案】(1) 【解】设 B 种书架的单价为 x 元, 则 $\frac{18000}{(1+20\%)x} - \frac{9000}{x} = 6$, 解得 $x = 1000$, 经检验, $x = 1000$

是所列方程的根, 且符合题意, $\therefore (1+20\%)x = 1200$. $\therefore$ A, B 两种书架的单价分别为 1200 元, 1000 元.

(2) 购买 a 个 A 种书架时, 购买总费用为 $w = 1200a + 1000(20 - a) = 200a + 20000$, 由题意得, $a \geq$

$\frac{2}{3}(20-a)$, 解得 $a \geq 8$. $\because 200 > 0$, $\therefore w$ 随着 a 的增大而增大, $\therefore$ 当 $a = 8$ 时, w 的值最小, 此时购买 B 种书架 $20 - 8 = 12$ (个) $\therefore$ 费用最少时购买 A 种书架 8 个, B 种书架 12 个.

(3) 由题意得 $(1200 - m) \times 8 + (1000 + \frac{1}{3}m) \times 12 = 21120$, 解得 $m = 120$.

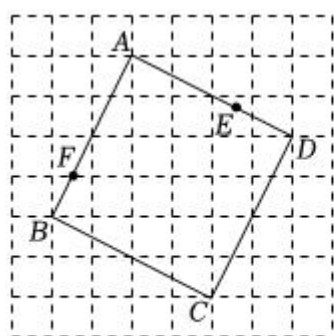
23. (本小题 8 分) 在每个小正方形的边长为 1 的网格中, 网格线的交点称为格点, 图中正方形 $ABCD$ 的顶点都是格点. 仅用无刻度的直尺画图, 每个任务的画线不得超过三条, 并回答相关问题.

(1) 直接写出正方形 $ABCD$ 的边长;

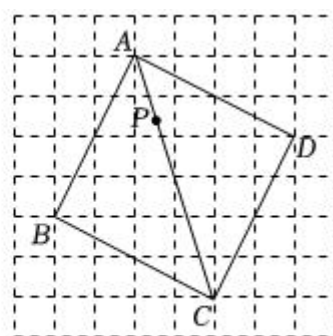
(2) 在图 (1) 中, F 是 AB 与网格线的交点, 画出矩形 $BFGC$;

(3) 在图 (1) 中, E 是 AD 上一点, 在 BC 上画点 H , 使四边形 $DEHC$ 的面积为 10;

(4) 在图 (2) 中, P 是 AC 上一点, 在 AC 上画点 Q , 使四边形 $BPDQ$ 为菱形.



(1)



(2)

【答案】正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{5}$.

见解答.

见解答.

见解答.

【解析】解: (1) 由勾股定理得, $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{5}$.

(2) 如图 (1), 取 CD 与网格线的交点 G , 使 $CG = BF$, 连接 FG ,

则矩形 $BFGC$ 即为所求.

(3) $\because$ 正方形 $ABCD$ 的面积为 $(2\sqrt{5})^2 = 20$, 四边形 $DEHC$ 的面积为 10,

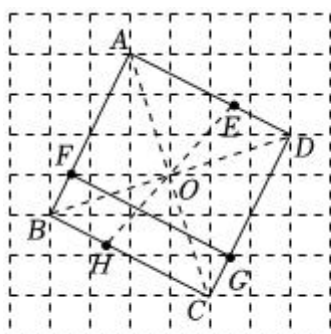
$\therefore EH$ 经过正方形 $ABCD$ 的对角线的交点.

如图 (1), 连接 AC , BD 相交于点 O , 连接 EO 并延长, 交 BC 于点 H ,

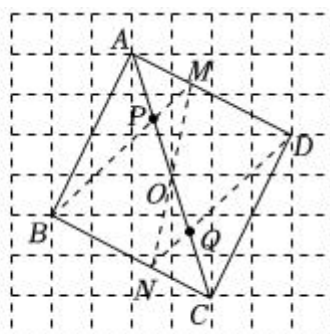
则点 H 即为所求.

(4) 如图 (2), 取 AC 的中点 O , 连接 BP 并延长, 交 AD 于点 M , 连接 MO 并延长, 交 BC 于点 N , 连接 DN ,

交AC于点Q,
则点Q即为所求.



(1)



(2)

24.(本小题 8 分)在平面直角坐标系中, 已知一次函数 $y = (2a - 3)x + 5 - b$ 的图象为直线 l , 它与 x 轴, y 轴分别交于 A , B 两点.

(1)如果把 l 向上平移 2 个单位后得到直线 $y = 5x + 1$, 求 a , b 的值;

(2)当直线 l 过点 $(m, 6 - b)$ 和点 $(m + 3, 4a - 7)$ 时, 且 $-3 < b < 8$, 求 a 的取值范围;

(3)若平面内有动点 $P(2n - 1, 4 - 2n)$, 不论 n 取何值, 点 P 均不在直线 l 上, 设 $\triangle PAB$ 的面积为 S . 求 S 的值 (用含字母 b 的式子表示).

【答案】解: (1)由题意得:
$$\begin{cases} 2a - 3 = 5 \\ 5 - b + 2 = 1 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \end{cases}$;

(2)由题意得:

$$\begin{cases} (2a - 3)m + 5 - b = 6 - b \\ (2a - 3)(m + 3) + 5 - b = 4a - 7 \end{cases}$$

则 $2a - b = -4$,

$$\text{即 } a = \frac{1}{2}b - 2,$$

当 $b = -3$ 时, 则 $a = -3.5$, 当 $b = 8$ 时, 则 $a = 2$,

$\because \frac{1}{2} > 0$, 故 a 随 b 的增大而增大且 $-3 < b < 8$,

$$\therefore -3.5 < a < 2,$$

$\because 2a - 3 \neq 0$, 即 $a \neq 1.5$,

$$\therefore -3.5 < a < 2 \text{ 且 } a \neq 1.5;$$

(3)设点 $P(x, y)$,

$$\text{则 } \begin{cases} x = 2n - 1 \\ y = 4 - 2n \end{cases}, \text{ 即 } y = -x + 3,$$

∴点 P 是直线 $y = -x + 3$ 上一动点,

∴不论 n 取何值, 点 P 均不在直线 l 上,

故上述两条直线平行,

即 $2a - 3 = -1$ 且 $5 - b \neq 3$,

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 2 \end{cases},$$

∴直线 l 的解析式为 $y = -x + 5 - b$, 直线 l 及直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴所交锐角都为 45° ,

∴平行线间的距离处处相等,

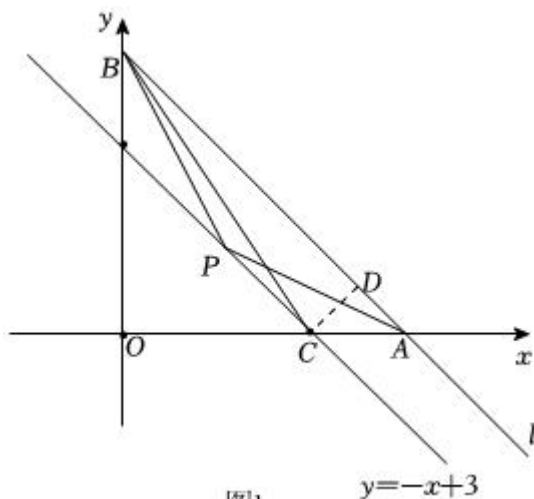
设直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴交点 C ,

令 $y = -x + 3 = 0$, $x = 3$, 则 $C(3, 0)$,

令 $y = -x + 5 - b = 0$, $x = 5 - b$, 则 $A(5 - b, 0)$,

令 $x = 0$, 则 $y = -x + 5 - b = 5 - b$, 则 $B(0, 5 - b)$

①当 $5 - b > 3$, 即 $b < 2$ 时, $AC = 5 - b - 3 = 2 - b$, $OB = 5 - b$,



$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle CAB} = \frac{1}{2} AC \cdot OB \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot OB \\ &= \frac{(5-b)(2-b)}{2} \\ &= \frac{b^2 - 7b + 10}{2}; \end{aligned}$$

②当 $5 - b < 3$, 即 $b > 2$ 时, $AC = 3 - (5 - b) = b - 2$, $OB = |b - 5|$,

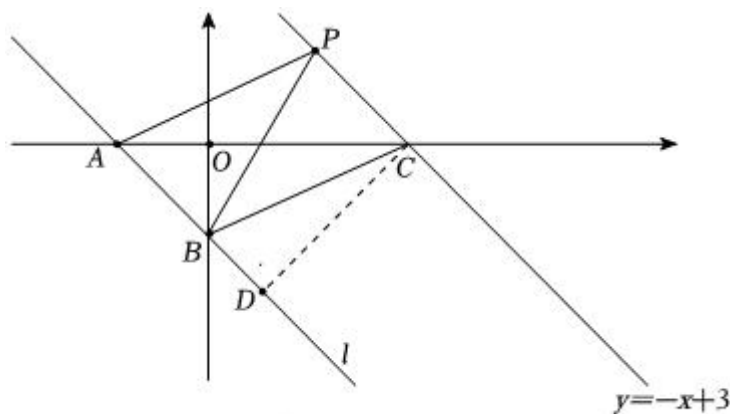


图2

$$\begin{aligned}
 S &= S_{\triangle CAB} \\
 &= \frac{1}{2} AC \cdot OB \\
 &= \frac{(5-b) \cdot (b-2)}{2}, \\
 &= \begin{cases} \frac{-b^2+7b-10}{2} & (2 < b \leq 5) \\ \frac{b^2-7b+10}{2} & (b > 5) \end{cases};
 \end{aligned}$$

综上, $S = \begin{cases} \frac{-b^2+7b-10}{2} & (2 < b \leq 5) \\ \frac{b^2-7b+10}{2} & (b < 2 \text{ 或 } b > 5) \end{cases};$

25. (本小题 8 分) 【问题提出】如图 1, E 是菱形 $ABCD$ 边 BC 上一点, $\triangle AEF$ 是等腰三角形, $AE = EF$, $\angle AEF = \angle ABC = \alpha$ ($\alpha \geq 60^\circ$), 探究 $\angle DCF$ 与 α 的数量关系.

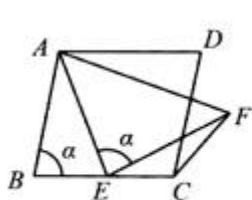


图 1

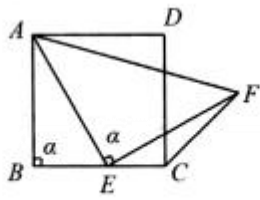


图 2

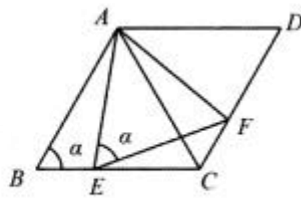


图 3

(1) 【问题探究】先将问题特殊化, 如图 2, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 直接写出 $\angle DCF$ 的大小: $\angle DCF = \underline{\hspace{1cm}}$;

(2) 再探究一般情形, 如图 1, 求 $\angle DCF$ 与 α 的数量关系;

(3) 【问题拓展】将图 1 特殊化, 如图 3, 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, $\frac{BE}{EC} = \frac{1}{2}$, $AE = 2\sqrt{7}$, 求菱形 $ABCD$ 的面积.

【答案】解: (1) 45° ;

当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 菱形 $ABCD$ 是正方形, $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore BA = BC$, $\angle B = \angle BCD = 90^\circ$,

在 AB 上截取 $AG = CE$, 连接 GE , 如图 2:

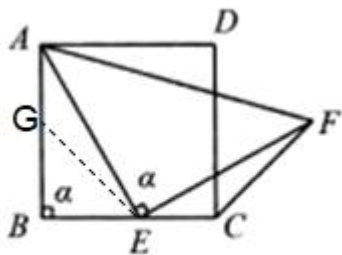


图 2

$$\because BA = BC, AG = CE,$$

$$\therefore BA - AG = BC - CE, \text{ 即 } BG = BE,$$

$$\text{又} \because \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BGE \text{ 是等腰直角三角形,}$$

$$\therefore \angle BGE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AGE = 180^\circ - \angle BGE = 135^\circ,$$

$$\because \angle AEC \text{ 是 } \triangle BAE \text{ 的外角,}$$

$$\therefore \angle AEC = \angle B + \angle BAE, \text{ 即 } \angle AEF + \angle CEF = \angle B + \angle BAE,$$

$$\text{又} \because \angle AEF = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle BAE,$$

$$\text{在 } \triangle ECF \text{ 和 } \triangle AGE \text{ 中,}$$

$$\begin{cases} CE = GA \\ \angle CEF = \angle GAE, \\ EF = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ECF \cong \triangle AGE (SAS),$$

$$\therefore \angle ECF = \angle AGE = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle DCF = \angle ECF - \angle ECD = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ.$$

故答案为: 45° ;

$$(2) \angle DCF = \frac{3}{2}\alpha - 90^\circ;$$

$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是菱形,}$$

$$\therefore BA = BC, AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle B + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \alpha,$$

在 AB 上截取 $AG = CE$, 连接 GE , 如图 1:

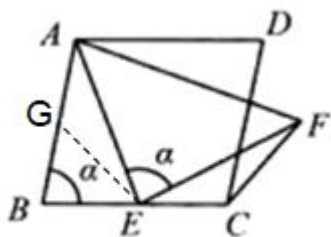


图 1

$$\because BA = BC, AG = CE,$$

$$\therefore BA - AG = BC - CE, \text{ 即 } BG = BE,$$

$$\therefore \angle BGE = \angle BEG = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2},$$

$$\therefore \angle AGE = 180^\circ - \angle BGE = 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ + \alpha}{2},$$

$\because \angle AEC$ 是 $\triangle BAE$ 的外角,

$$\therefore \angle AEC = \angle B + \angle BAE, \text{ 即 } \angle AEF + \angle CEF = \angle B + \angle BAE,$$

$$\text{又} \because \angle AEF = \angle B = \alpha,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle BAE,$$

在 $\triangle ECF$ 和 $\triangle AGE$ 中,

$$\begin{cases} CE = GA \\ \angle CEF = \angle GAE, \\ EF = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ECF \cong \triangle AGE (SAS),$$

$$\therefore \angle ECF = \angle AGE = \frac{180^\circ + \alpha}{2},$$

$$\therefore \angle DCF = \angle ECF - \angle ECD = \frac{180^\circ + \alpha}{2} - (180^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}\alpha - 90^\circ;$$

(3) 过点 E 作 $EG \perp AB$ 于 G , 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H , 如图:

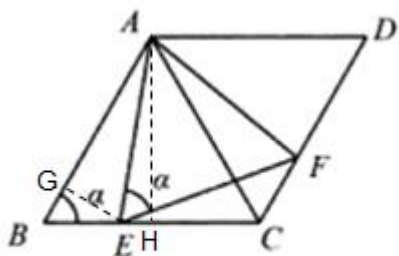


图 3

$$\text{当 } \alpha = 60^\circ \text{ 时, } \angle ABC = \angle AEF = 60^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是菱形, } \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle ABC = 60^\circ, AB = BC = AD = DC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\because \frac{BE}{EC} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 设 $BE = x (x > 0)$, 则 $CE = 2x, AB = BC = 3x$,

在 $Rt \triangle EBG$ 中, $\angle EGB = 90^\circ, \angle BEG = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$$\therefore BG = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}x, GE = \sqrt{BE^2 - BG^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

在 $Rt \triangle EAG$ 中, $\angle EGA = 90^\circ, AG = AB - BG = 3x - \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x, AE = 2\sqrt{7}$,

$$\therefore AG^2 + GE^2 = AE^2, \text{ 即 } \left(\frac{5}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = (2\sqrt{7})^2,$$

$$\because x > 0,$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore AB = BC = 3x = 6,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $AH \perp BC$ 于 H ,

$$\therefore BH = CH = \frac{1}{2}BC = 3,$$

在 $Rt \triangle ABH$ 中, $\angle AHB = 90^\circ$,

$$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = BC \cdot AH = 6 \times 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}.$$