

2024-2025 学年上海市闵行区八年级（下）期末数学模拟练习试题

考试范围：一次函数、代数方程、四边形、平面向量、概率

题号	一	二	三	四	总分
得分					

注意事项:

- 1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在试卷上无效。
- 3.考试结束后，本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 1.关于一次函数 $y = -(m^2 + 1)x - 2$ ，下列结论错误的是()
- A. y 的值随x值的增大而减小
 - B. 图象过定点(0, -2)
 - C. 函数图象经过第二、三、四象限
 - D. 当 $x > 0$ 时， $y > -2$

【答案】 D

【解析】 本题考查了一次函数的图象和性质，解题的关键是熟练掌握一次函数的图象和性质。当 $k > 0$ 时，图象经过一、三象限，y随x的增大而增大；反之，图象经过二、四象限，y随x的增大而减小。

【详解】 解： A、 $\because m^2 \geq 0$,
 $\therefore m^2 + 1 \geq 1$,
 $\therefore k = -(m^2 + 1) \leq -1$,
 $\therefore y$ 随x的增大而减小;
故 A 正确，不符合题意;
B、当 $x = 0$ 时， $y = -2$,
 $\therefore$ 该一次函数图象过定点(0, -2),
故 B 正确，不符合题意;
C、 $\because k = -(m^2 + 1) \leq -1$, $b = -2 < 0$,
 $\therefore$ 该函数图象经过第二、三、四象限,
故 C 正确，不符合题意;

D 、 $\because$ 当 $x = 0$ 时, $y = -2$, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $y < -2$,

故 D 不正确, 符合题意;

故选: D .

2. 下列函数中, 如果 $x > 0$, y 的值随 x 的值增大而增大, 那么这个函数是()

A. $y = -2x$ B. $y = \frac{2}{x}$ C. $y = -x + 1$ D. $y = -\frac{1}{x}$

【答案】 D

【解析】 此题主要考查了一次函数、正比例函数以及反比例函数的性质等知识. 分别利用一次函数和反比例函数的性质分析得出即可.

【详解】 解: A 、 $y = -2x$, y 随 x 的增大而减小, 故本选项不符合题意;

B 、 $y = \frac{2}{x}$, 当 $x > 0$, 则 y 随 x 的增大而减小, 故本选项不符合题意;

C 、 $y = -x + 1$, y 值随 x 值的增大而减小, 故本选项不符合题意;

D 、 $y = -\frac{1}{x}$, 当 $x > 0$ 时, y 值随 x 值的增大而增大, 故本选项符合题意;

故选: D .

3. 用换元法解方程 $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x} + 3 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x}{x+1} = y$, 那么原方程可化为

A. $y^2 + 3y - 1 = 0$; B. $y^2 - 3y + 1 = 0$;
C. $y^2 + y - 3 = 0$; D. $y^2 - y + 3 = 0$.

【答案】 A

【解析】 解: 设 $\frac{x}{x+1} = y$,

则 $y^2 + 3y - 1 = 0$,

故选: A .

设 $\frac{x}{x+1} = y$, 将其代入原方程即可解答.

此题考查了解分式方程, 利用了换元思想.

4. 在下列方程中, 有实数根的是()

A. $\sqrt{x-2} + 3 = 0$ B. $x^2 + 2x + 3 = 0$ C. $\sqrt{2x+3} = x$ D. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

【答案】 C

【解析】解：A. $\sqrt{x-2}+3=0$,

$$\sqrt{x-2}=-3,$$

∵算术平方根具有非负性,

∴此方程无实数根, 故本选项不符合题意;

$$B. x^2 + 2x + 3 = 0,$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0,$$

所以此方程无实数根, 故本选项不符合题意;

$$C. \sqrt{2x+3}=x,$$

$$\text{方程两边平方得: } 2x+3=x^2,$$

$$\text{即 } x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\text{解得: } x=3 \text{ 或 } -1,$$

经检验: $x=3$ 是原方程的解, $x=-1$ 不是原方程的解,

所以此方程有实数根, 故本选项符合题意;

$$D. \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1},$$

$$\text{方程两边都乘 } x-1, \text{ 得 } x=1,$$

经检验 $x=1$ 是增根,

即此方程无实数根, 故本选项不符合题意;

故选: C.

5. 如图, 点E、F、G、H分别是四边形ABCD边AB、BC、CD、DA的中点. 则下列说法:

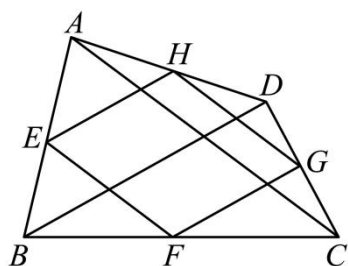
①若 $AC \perp BD$, 则四边形EFGH为矩形;

②若 $AC = BD$, 则四边形EFGH为菱形;

③若四边形EFGH是平行四边形, 则AC与BD互相平分;

④若四边形EFGH是正方形, 则AC与BD互相垂直且相等.

其中正确的个数是()



A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 C

【解析】

【详解】解：∵点E、F、G、H分别是四边形ABCD的边AB、BC、CD、DA的中点，

∴EH是△ABD的中位线，

∴ $EH = \frac{1}{2}BD$, $EH \parallel BD$,

同理 $GF = \frac{1}{2}BD$, $EF = \frac{1}{2}AC$, $GH = \frac{1}{2}AC$, $EF \parallel AC$

∴ $EH = GF$, $GH = EF$,

∴四边形EFGH是平行四边形，

①若 $AC \perp BD$ ，则 $EF \perp EH$ ，∴平行四边形EFGH是矩形，故①正确；

②若 $AC = BD$ ，则 $EH = GF = GH = EF$ ，则四边形EFGH是菱形，故②正确；

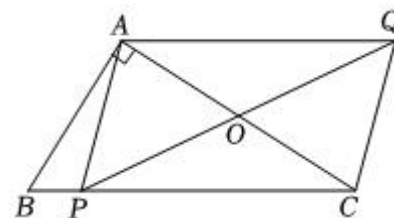
③若四边形EFGH是平行四边形，并不能推出AC与BD互相平分，故③错误；

④若四边形EFGH是正方形，则 $EF \perp EH$ ， $AC \perp BD$ ，故④正确；

故选 C.

本题主要考查了中点四边形，三角形中位线定理，熟知中点四边形的知识是解题的关键.

6.如图，在 $Rt \triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 5$ ，点P为BC边上任意一点，连接PA，将PA沿BC方向平移至CQ，连接AQ、PQ，则当PQ取得最小值时，BP的长为()



A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{17}{5}$ D. 2

【答案】 C

【解析】解：由条件可得 $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4$,

∵ 四边形 $APCQ$ 是平行四边形,

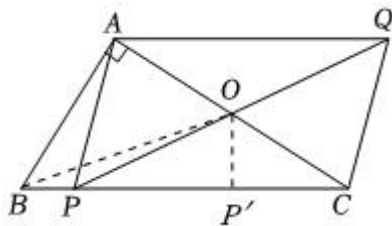
∴ $PO = QO$, $CO = AO$,

∴ PQ 最短也就是 PO 最短,

∴ 过 O 作 BC 的垂线 OP' , 垂足为 P' , 连接 BO ,

∴ 垂线段最短,

∴ 当点 P 在点 P' 处时, PO 最小, 即 PQ 最小,



∵ $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle BOC}$,

即 $\frac{1}{2}BC \times OP' = \frac{1}{2}AB \times AO$,

∵ $CO = AO = 2$, $BC = 5$, $AB = 3$,

∴ $OP' = \frac{6}{5}$,

∴ 则 PQ 的最小值为 $2OP' = \frac{12}{5} = 2.4$,

∴ $CP' = \sqrt{OC^2 - OP'^2} = \sqrt{2^2 - (\frac{6}{5})^2} = \frac{8}{5}$

∴ $BP' = BC - CP' = 5 - \frac{8}{5} = \frac{17}{5}$,

∴ 当 PQ 取得最小值时, BP 的长为 $\frac{17}{5}$.

故选: C.

二、填空题: 本题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分。

7. 直线 $y = 4x - 8$ 与 y 轴的交点坐标为_____.

【答案】 $(0, -8)$

【解析】解: 令 $x = 0$, 则 $y = -8$,

∴ 直线 $y = 4x - 8$ 与 y 轴的交点坐标为 $(0, -8)$,

故答案为: $(0, -8)$.

8. 已知一次函数的图象经过 $A(0, 2)$ 和 $B(3, 0)$ 两点, 那么这个一次函数的解析式是_____.

【答案】 $y = -\frac{2}{3}x + 2$

【解析】 解： 设函数解析式为 $y = kx + b$,

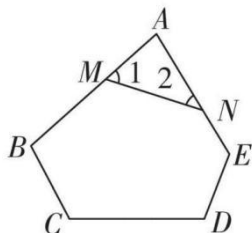
则 $\begin{cases} b = 2 \\ 3k + b = 0' \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k = -\frac{2}{3}, \\ b = 2 \end{cases}$

所以这个一次函数的解析式是 $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

故答案为: $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

9.如图, 在五边形 $ABCDE$ 中, 点 M, N 分别在边 AB, AE 上.若 $\angle 1 + \angle 2 = 100^\circ$, 则 $\angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 460°

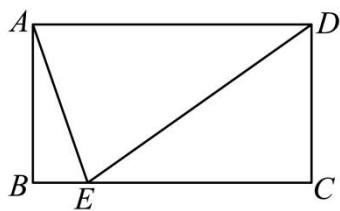
【解析】 $\because$ 在 $\triangle AMN$ 中, $\angle 1 + \angle 2 = 100^\circ$,

$\therefore \angle A = \angle 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = 80^\circ$.

又 $\because \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = (5 - 2) \times 180^\circ = 540^\circ$,

$\therefore \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540^\circ - 80^\circ = 460^\circ$.

10.如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 5$, $AB = 3$, 点 E 为 BC 上的一点, EA 平分 $\angle BED$, 则 BE 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 1

【解析】

解: $\because EA$ 平分 $\angle BED$,

$\therefore \angle AEB = \angle AED$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AD = 5$, $AB = 3$,

$\therefore AB = CD = 3, AD = BC = 5, AD \parallel BC, \angle C = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AED,$$

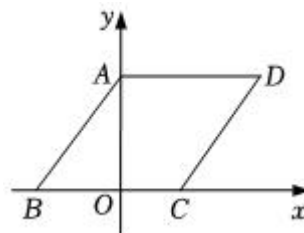
$$\therefore AD = ED = 5,$$

$$\therefore EC = \sqrt{DE^2 - CD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore BE = BC - EC = 5 - 4 = 1,$$

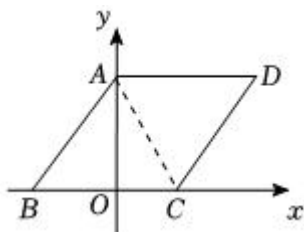
故答案为：1.

11.如图，在平面直角坐标系中，菱形 $ABCD$ 的顶点 A ， B ， C 在坐标轴上，若点 C 的坐标为 $(1,0)$ ， $\angle D = 60^\circ$ ，则点 D 的坐标为_____.



【答案】 $(2, \sqrt{3})$

【解析】解：连接 AC ，如图所示，



$\because \angle D = 60^\circ$ ，四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ， $DA = DC = AB = BC$ ，

$\therefore \triangle ACD$ ， $\triangle ABC$ 都是等边三角形，

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$ ，

$\therefore AO \perp BC$ ，

$\therefore \angle OAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ$ ，

$\because$ 点 C 的坐标为 $(1,0)$ ，

$\therefore OC = 1$

$\therefore AC = 2OC = 2$ ，

$\therefore$ 则 $AD = AC = 2$

$\therefore AO = \sqrt{AC^2 - OC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore D(2, \sqrt{3})$$

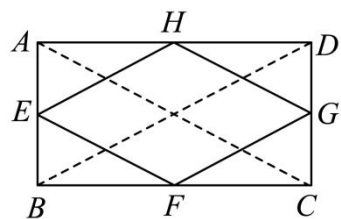
故答案为: $(2, \sqrt{3})$.

12. 顺次连接一个矩形各边中点得到的四边形是_____.

【答案】菱形

【解析】 本题考查了矩形的性质，菱形的判定，三角形中位线的性质，熟练掌握中位线的性质是解题的关键. 连接 AC 、 BD ，根据矩形的性质，以及三角形中位线的性质，可得 $EF = GH = FG = EH$ ，进而即可求解.

【详解】 解：如图，连接 AC 、 BD ，



$\because E$ 、 F 、 G 、 H 分别是矩形 $ABCD$ 的 AB 、 BC 、 CD 、 AD 边上的中点，

$$\therefore EF = GH = \frac{1}{2}AC, \quad FG = EH = \frac{1}{2}BD,$$

$\because$ 矩形 $ABCD$ 的对角线 $AC = BD$,

$$\therefore EF = GH = FG = EH,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

故答案为：菱形.

13. 已知 m 为不等式组 $\begin{cases} \frac{m+2}{3} \geq -1 \\ 1 - \frac{m}{3} > -\frac{1}{2} \end{cases}$ 的所有整数解，则关于 x 的方程 $\frac{3}{x} + \frac{6}{x-1} = \frac{x-m}{x(x-1)}$ 有增根的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】 解：解不等式 $\frac{m+2}{3} \geq -1$ ，得： $m \geq -5$,

解不等式 $1 - \frac{m}{3} > -\frac{1}{2}$ ，得： $m < 4.5$,

则不等式组的解集为 $-5 \leq m < 4.5$,

$\therefore$ 不等式组的所有整数解为 -5 、 -4 、 -3 、 -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 、 3 、 4 这 10 个，

将分式方程的两边都乘以 $x(x-1)$ ，得： $3(x-1) + 6x = x-m$,

$\therefore$ 分式方程的增根为 $x = 1$ 或 $x = 0$,

当 $x = 1$ 时， $m = -5$;

当 $x = 0$ 时， $m = 3$;

所以该分式方程有增根的概率为 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

故答案为: $\frac{1}{5}$

14. 如图 1 中的菱形沿对角线分成四个全等的直角三角形, 菱形的两条对角线长分别为 $2x$ 和 $4x - 2$ (其中 $2x$ 为菱形的短对角线的长度), 将这四个直角三角形拼成“赵爽弦图” (如图 2), 得到大小两个正方形, 若图 2 中阴影小正方形的面积为 1, 则 x 的值为_____.

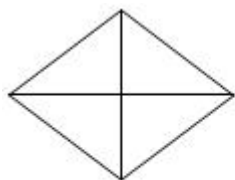


图1

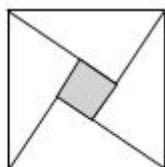


图2

【答案】 2

【解析】解: 由条件可知直角三角形的直角边分别为 x , $2x - 1$,

$\therefore$ 大正方形的面积为 $x^2 + (2x - 1)^2$,

$\therefore$ 阴影小正方形的面积为 1,

$$\therefore x^2 + (2x - 1)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2x - 1) = 1,$$

解得: $x = 2$ (负值已舍去),

故答案为: 2.

15. 在平面直角坐标系中, 有四个点 $O(0,0)$ 、 $A(4,0)$ 、 $B(1,3)$ 、 $C(x,3)$, 若以 O 、 A 、 B 、 C 为顶点的四边形是平行四边形, 则 $x =$ _____.

【答案】 -3 或 5

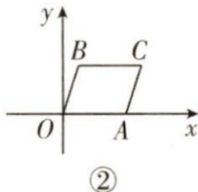
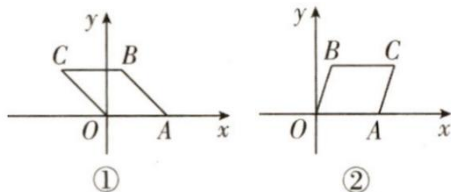
【解析】 $\because B(1,3)$, $C(x,3)$, $\therefore BC \parallel x$ 轴,

$\therefore$ 以 O 、 A 、 B 、 C 为顶点的四边形是平行四边形, $O(0,0)$, $A(4,0)$, $\therefore BC = OA = 4$,

① 当点 C 在点 B 左侧时, 如图 ①, 则 $x = 1 - 4 = -3$;

② 当点 C 在点 B 右侧时, 如图 ②, 则 $x = 1 + 4 = 5$.

综上所述, $x = -3$ 或 5.



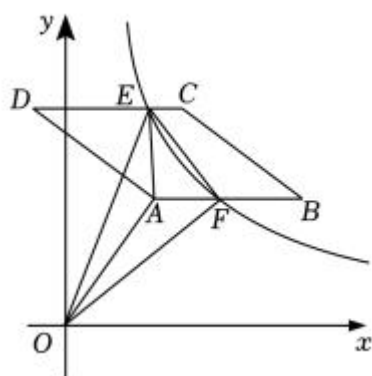
16. 与向量 $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF}$ 相等的向量是_____.

【答案】 $\vec{0}$

【解析】 解: $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} = \vec{0}$

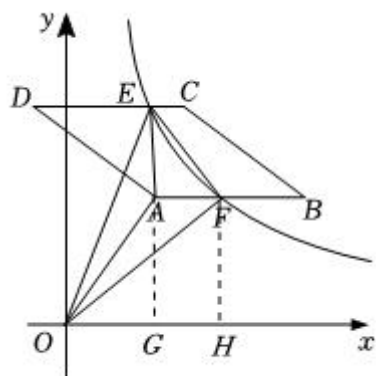
故答案为: $\vec{0}$.

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 菱形 $ABCD$ 的顶点 D 在第二象限, 其余顶点都在第一象限, $AB \parallel x$ 轴, $AO \perp AD$, $AO = AD$. 过点 A 作 $AE \perp CD$, 垂足为 E , $DE = 4CE$. 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 E , 与边 AB 交于点 F , 连接 OE 、 OF 、 EF . 则 $\frac{AF}{EC}$ 的值为_____



【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】 解: 如图, 过点 F 作 $FH \perp x$ 轴于点 H , 延长 EA 交 x 轴于点 G ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

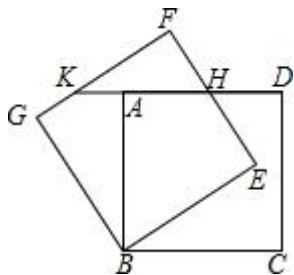
$\therefore CD \parallel AB$, $AB = CD = BC = AD$,

$\because AE \perp CD$, $AB \parallel x$ 轴,

$\therefore \angle D + \angle DAE = 90^\circ$, $EG \perp x$ 轴,

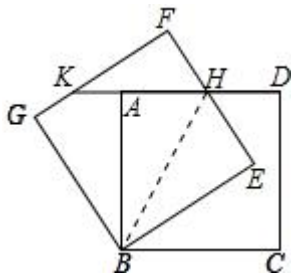
$\because OA \perp AD$,
 $\therefore \angle DAE + \angle GAO = 90^\circ$,
 $\therefore \angle GAO = \angle D$,
 又 $\because OA = OD$,
 $\therefore \triangle DEA \cong \triangle AGO (AAS)$,
 $\therefore DE = AG, AE = OG$,
 设 $CE = a$, 则 $DE = AG = 4CE = 4a, AD = AB = DC = DE + CE = 5a$,
 在 $Rt \triangle AED$ 中, 由勾股定理得: $AE = 3a$,
 $\therefore OG = AE = 3a, GE = AG + AE = 7a$,
 $\therefore A(3a, 4a), E(3a, 7a)$,
 $\because AB \parallel x$ 轴, $AG \perp x$ 轴, $FH \perp x$ 轴,
 $\therefore$ 四边形 $AGHF$ 是矩形,
 $\therefore FH = AG = 4a, AF = GH$,
 $\because E$ 点在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上,
 $\therefore k = 21a^2$,
 $\therefore y = \frac{21a^2}{x}$,
 $\because F$ 点在双曲线 $y = \frac{21a^2}{x}$ 的图象上, 且 F 点的纵坐标为 $4a$,
 $\therefore x = \frac{21a}{4}$, 即 $OH = \frac{21a}{4}$,
 $\therefore AF = GH = \frac{9}{4}a$,
 $\therefore \frac{AF}{EC} = \frac{9}{4}$

18. 如图, 正方形 $ABCD$ 绕点 B 逆时针旋转 30° 后得到正方形 $BEFG$, EF 与 AD 相交于点 H , 延长 DA 交 GF 于点 K . 若正方形 $ABCD$ 边长为 $\sqrt{3}$, 则 $AK =$ _____.



【答案】 $2\sqrt{3}-3$

【解析】 解：连接 BH ，如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 是正方形，

$$\therefore \angle BAH = \angle ABC = \angle BEH = \angle F = 90^\circ,$$

由旋转的性质得： $AB = EB$ ， $\angle CBE = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABE = 60^\circ,$$

在 $Rt \triangle ABH$ 和 $Rt \triangle EBH$ 中，

$$\begin{cases} BH = BH \\ AB = EB \end{cases},$$

$$\therefore Rt \triangle ABH \cong Rt \triangle EBH (HL),$$

$$\therefore \angle ABH = \angle EBH = \frac{1}{2} \angle ABE = 30^\circ, \quad AH = EH,$$

$$\therefore AH = AB \cdot \tan \angle ABH = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1,$$

$$\therefore EH = 1,$$

$$\therefore FH = \sqrt{3} - 1,$$

在 $Rt \triangle FKH$ 中， $\angle FKH = 30^\circ$ ，

$$\therefore KH = 2FH = 2(\sqrt{3} - 1),$$

$$\therefore AK = KH - AH = 2(\sqrt{3} - 1) - 1 = 2\sqrt{3} - 3,$$

故答案为： $2\sqrt{3}-3$ 。

三、计算题：本大题共 2 小题，共 10 分。

19. 解方程： $\frac{x}{x+3} - \frac{1}{x-3} = \frac{6}{9-x^2}$ 。

【答案】 解：方程的两边同乘以 $(x+3)(x-3)$ ，得 $x(x-3) - (x+3) = -6$ ，

解得 $x = 1$ 或 3 ，

检验：把 $x = 3$ 代入方程 $(x+3)(x-3) = 0$ ，

则 $x = 3$ 是原方程的增根，

把 $x = 1$ 代入方程 $(x + 3)(x - 3) \neq 0$,

则 $x = 1$ 是原方程的解,

所以原方程解是 $x = 1$.

20. 解方程: $2\sqrt{x+5} + 10 = x$.

【答案】 $\because 2\sqrt{x+5} + 10 = x$

$$\therefore 2\sqrt{x+5} = x - 10$$

$$\therefore 4(x+5) = (x-10)^2, \text{ 且 } x+5 \geq 0, x-10 \geq 0$$

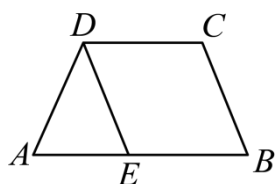
$$\therefore (x-4)(x-20) = 0, x \geq -5, x \geq 10$$

$$\therefore x_1 = 4, x_2 = 20, x \geq -5, x \geq 10$$

$\therefore x = 20$ 为方程的解.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 36 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

21. (本小题 6 分) 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, 点 E 在 AB 上, $ED \parallel BC$.



(1) 填空: $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \underline{\hspace{2cm}}$,

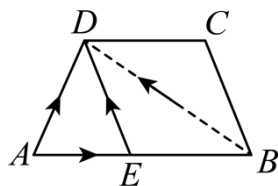
(2) 填空: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EA} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 在图中直接作出 $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{AB}$. (不写作法, 写结论)

【答案】 (1) $\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{AD}$

(3) 解: 如图, $\overrightarrow{BD}$ 即为所求,



$$\therefore \overrightarrow{\hspace{1cm}} = \overrightarrow{\hspace{1cm}} + \overrightarrow{\hspace{1cm}}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$$

$$\because \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}.$$

1.

本题考查向量计算，熟练掌握平行四边形法则是解题的关键.

连接 BD ，先证明四边形 $BCDE$ 是平行四边形，根据平行四边形法则计算即可；

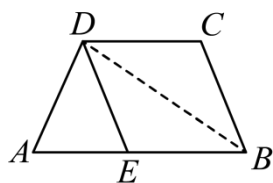
【详解】解： $\because$ 梯形 $ABCD$

$$\therefore AB \parallel CD$$

$$\because ED \parallel BC$$

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 是平行四边形，

连接 BD ，



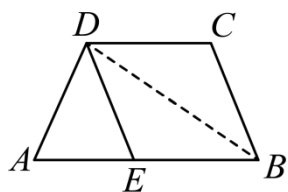
$$\therefore \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

2.

根据平行四边形法则计算即可；

解：如图，



$$\because \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$$

$\because$ 四边形 $BCDE$ 是平行四边形，

$$\therefore \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BC}$$

$$\because \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ED}$$

$$\therefore \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EA}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EA}$$

3. 连接 BD ，则 $\overrightarrow{BD}$ 即为所求.

22. (本小题 6 分)

某小区为美化小区环境，购买了两种规格的桂花树苗进行栽种，其中 A 种桂花树苗的价格为每株 75 元， B 种桂花树苗的价格为每株 100 元，如果购买这两种桂花树苗共 45 株，其中 A 种桂花树苗的数量不超过 B 种桂花树苗数量的 2 倍，设购买 A 种桂花树苗 x 株，购买 A 、 B 两种桂花树苗的总费用是 y 元.

(1) 求 y 关于 x 的函数关系式；

(2) 根据 (1) 的结论，请你设计一种最省钱的购买方案，并求出此种方案的总费用.

【答案】 (1) 解：由题意可得， $y = 75x + 100(45 - x) = -25x + 4500$

即 y 与 x 的函数关系式为 $y = -25x + 4500$;

(2) $\because$ 购买 A 种树苗的数量不超过 B 种树苗的数量的 2 倍，

$$\therefore x \leq 2(45 - x),$$

解得， $x \leq 30$,

$$\because y = -25x + 4500, k = -25 < 0,$$

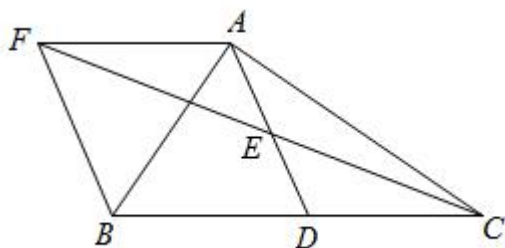
$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，

$$\therefore \text{当 } x = 30 \text{ 时，} y \text{ 有最小值，此时 } y = 30 \times (-25) + 4500 = 3750, 45 - x = 15,$$

答：购买 A 种树苗 30 棵； B 种树苗 15 棵时费用最少，最少费用为 3750 元.

23. (本小题 8 分)

如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 BC 边的中点，点 E 是 AD 的中点，延长 CE 至 F 点，使得 $CE = FE$ ，连接 AF 、 BF .



(1)求证：四边形 $AFBD$ 是平行四边形；

(2)当 $AB = AC$ 时，求证：四边形 $AFBD$ 是矩形.

【答案】(1)证明： $\because$ 点 E 是 AD 的中点，

$$\therefore AE = DE,$$

$$\because \angle AEF = \angle DEC, CE = FE$$

$$\therefore \triangle AFE \cong \triangle DCE \text{ (SAS) },$$

$$\therefore \angle AFE = \angle DCE, AF = CD,$$

$$\therefore AF \parallel CD, \text{ 即 } AF \parallel BD,$$

$$\because \text{点 } D \text{ 是 } BC \text{ 边的中点},$$

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore AF = BD,$$

$$\therefore \text{四边形 } AFBD \text{ 是平行四边形};$$

(2)证明： $\because AB = AC, BD = DC,$

$$\therefore AD \perp BC.$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ.$$

$$\because \text{四边形 } AFBD \text{ 是平行四边形},$$

$$\therefore \text{四边形 } AFBD \text{ 是矩形}.$$

24.(本小题 8 分)

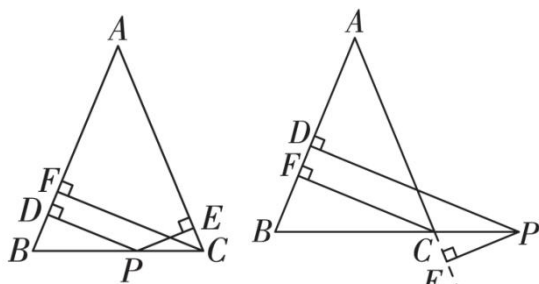


图 1

图 2

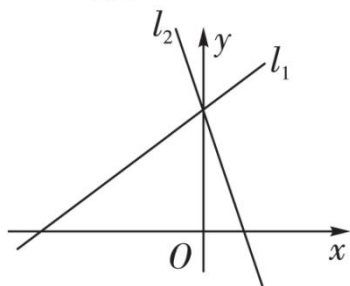


图 3

(1) 【问题情境】

张老师提出这样一个问题：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， P 为边 BC 上的任一点，过点 P 作 $PD \perp AB$ ， $PE \perp AC$ ，垂足分别为点 D ， E ，过点 C 作 $CF \perp AB$ ，垂足为 F 。求证： $PD + PE = CF$ 。

(2) 【变式探究】如图 2，当点 P 在 BC 的延长线上时，其余条件不变，求证： $PD - PE = CF$ 。

(3) 【结论运用】如图 3，在平面直角坐标系中有两条直线 $l_1: y = \frac{3}{4}x + 3$ ， $l_2: y = -3x + 3$ ，若直线 l_2 上的一点 M 到直线 l_1 的距离是 1，求点 M 的坐标。

【答案】(1)解：如图 1，连接 AP 。

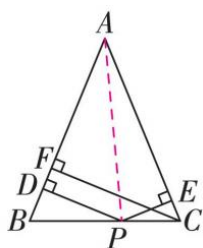


图 1

$\because PD \perp AB$ ， $PE \perp AC$ ， $CF \perp AB$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot PD, S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2}AC \cdot PE, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CF.$$

$$\because S_{\triangle ABP} + S_{\triangle ACP} = S_{\triangle ABC}, \therefore \frac{1}{2}AB \cdot PD + \frac{1}{2}AC \cdot PE = \frac{1}{2}AB \cdot CF.$$

又 $\because AB = AC$ ， $\therefore PD + PE = CF$ 。

(2)如图 2，连接 AP 。

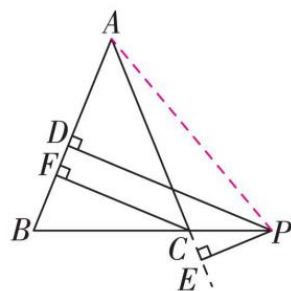


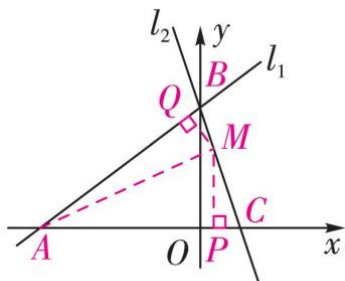
图 2

$\because PD \perp AB$ ， $PE \perp AC$ ， $CF \perp AB$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}AB \cdot PD, S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2}AC \cdot PE, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CF.$$

$$\because S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ACP} = S_{\triangle ABC}, \therefore \frac{1}{2}AB \cdot PD - \frac{1}{2}AC \cdot PE = \frac{1}{2}AB \cdot CF.$$

(3)如图 3, 设直线 l_1 分别交 x 轴、 y 轴于点 A 、 B , 直线 l_2 分别交 x 轴、 y 轴于点 C 、 D , 连接 AM ,



则 $A(-4,0)$, $B(0,3)$, $C(1,0)$,

①当点 M 在线段 BC 上时, 过点 M 分别作 $MP \perp x$ 轴, $MQ \perp AB$, 垂足分别为点 P , Q .

则 $S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2}AC \cdot MP$, $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}AB \cdot MQ$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot OB$.

$$\therefore \frac{1}{2}AC \cdot MP + \frac{1}{2}AB \cdot MQ = \frac{1}{2}AC \cdot OB,$$

$\therefore$ 点 M 的纵坐标为 2.

又∵点M在直线 $y = -3x + 3$ 上, ∴当 $y = 2$ 时, 代入可求得 $x = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(\frac{1}{3}, 2)$.

②当点 M 在线段 BC 外时, 同理可得 $|MP - MQ| = OB$,

即 $|MP - 1| = 3$, 解得 $MP = 4$ 或 $MP = -2$ (舍去), 即点 M 的纵坐标为 4,

代入 $y = -3x + 3$, 可得 $x = -\frac{7}{3}$,

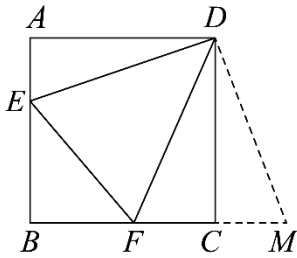
$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(-\frac{7}{3}, 4)$.

综上, 点 M 的坐标为 $(\frac{1}{3}, 2)$ 或 $(-\frac{1}{3}, 4)$.

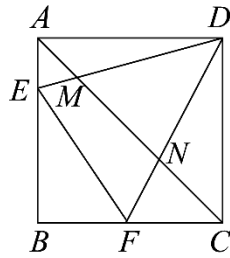
25. (本小题 8 分)

(1)如图①, 在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AB, BC 边上的动点, 且 $\angle EDF = 45^\circ$, 将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle DCM$, 可以证明 $\triangle DEF \cong \triangle DMF$, 进一步推出 AE, EF, FC 之间的数量关

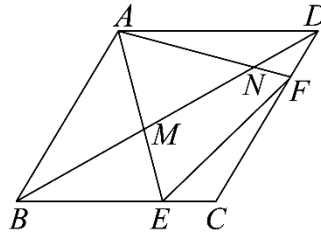
系为_____;



图①



图②



图③

(2)如图②正方形 $ABCD$, $\angle EDF = 45^\circ$, 猜想 AM , MN , CN 的数量关系, 并证明你的结论.

(3)如图③, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, 点 E , F 分别是边 BC , CD 上的动点(不与端点重合), 且 $\angle EAF = 60^\circ$, 连接 BD 分别与边 AE , AF 交于 M , N .当 $\angle DAF = 15^\circ$ 时, 直接写出 BM , MN , DN 之间的数量关系_____.

【答案】解: (1)结论: $EF = AE + FC$;

理由: $\because \triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle DCM$, $\angle EDF = 45^\circ$,

$\therefore \angle MDF = 45^\circ$, $\triangle DAE \cong \triangle DCM$,

$\therefore DE = DM$, $AE = CM$,

$\because \angle DCF = \angle DCM = 90^\circ$,

$\therefore F$ 、 C 、 M 三点共线,

在 $\triangle DEF$ 和 $\triangle DMF$ 中,

$$\begin{cases} DE = DM \\ \angle EDF = \angle MDF, \\ DF = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle DEF \cong \triangle DMF (SAS)$,

$\therefore EF = FM$,

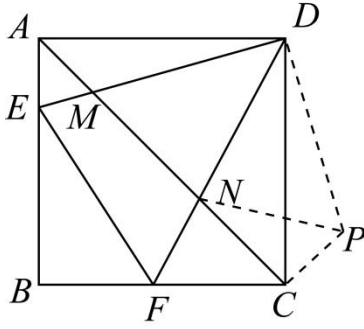
$\therefore EF = AE + CF$,

故答案为: $EF = AE + CF$;

(2) $CN^2 + AM^2 = MN^2$, 理由如下:

在正方形 $ABCD$ 中, $AD = CD$, $\angle ADC = 90^\circ$

将 $\triangle ADM$ 绕着点 D 逆时针顺序旋转 90° , 得到 $\triangle CDP$, 则 $\triangle ADM \cong \triangle CDP$,



$$\therefore \angle ADM = \angle CDP, AM = CP, DM = DP, \angle DAM = \angle DCP = 45^\circ = \angle DCN,$$

$$\therefore \angle PCN = \angle DCP + \angle DCN = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle EDF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PDN = \angle CDP + \angle CDN = \angle ADM + \angle CDN = 90^\circ - \angle EDF = 45^\circ = \angle MDN,$$

$$\because DN = DN, \angle PDN = \angle MDN, DM = DP,$$

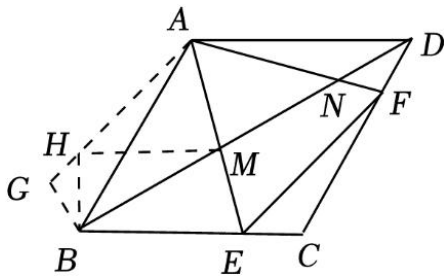
$$\therefore \triangle PDN \cong \triangle MDN (SAS),$$

$$\therefore PN = MN,$$

$$\because \angle PCN = 90^\circ,$$

$$\therefore CN^2 + CP^2 = PN^2, \text{ 即 } CN^2 + AM^2 = MN^2;$$

(3) 将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 120° , 此时 AD 与 AB 重合, F 转到点 G , 在 AG 上取 $AH = AN$, 连接 HM , HB , 如图,



$$\therefore \angle BAG = \angle DAF,$$

$$\text{又 } AH = AN, AB = AD,$$

$$\therefore \triangle ABH \cong \triangle ADN (SAS),$$

$$\therefore DN = BH, \angle ABH = \angle ADN,$$

$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是菱形, } \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle HBD = \angle ABH + \angle ABD = 60^\circ,$$

$$\because \angle DAF = 15^\circ, \angle EAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAM = \angle AMD = 75^\circ,$$

$$\because AH = AN, \quad \angle HAM = \angle NAM = 60^\circ, \quad AM = AM,$$

$$\therefore \triangle AHM \cong \triangle ANM (SAS),$$

$$\therefore \angle AMN = \angle AMH = 75^\circ, \quad MH = MN,$$

$$\therefore \angle HMB = 180^\circ - \angle AMN - \angle AMH = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BHM = 90^\circ,$$

$$\therefore BH^2 + MH^2 = BM^2,$$

$$\therefore DN^2 + MN^2 = BM^2.$$