

2024 学年第二学期初二数学教学质量调研试卷

(测试时间为 90 分钟，满分为 100 分)

考生注意：

1. 本试卷含三个大题，共 25 题。答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效。
2. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出解答的主要步骤。

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知一次函数 $y = -x + 1$ ，当 $y > 0$ 时，则 x 的取值范围是（ ）

- A. $x > 1$ B. $x < 1$ C. $x > -1$ D. $x < -1$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的性质，求不等式。

根据一次函数的表达式建立不等式，解不等式即可得到 x 的取值范围。

【详解】 解：当 $y > 0$ 时， $-x + 1 > 0$

解得 $x < 1$

故选：B。

2. 已知点 $A(-1, y_1)$ 、 $B(100, y_2)$ 、 $C(2025, y_3)$ 是一次函数 $y = -2x + b$ 的图像上的三点，则在 y_1 、 y_2 、 y_3 中最小的是（ ）

- A. y_1 B. y_2 C. y_3 D. 无法确定

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的增减性；根据一次函数的增减性判断即可。

【详解】 解：∵ 一次函数 $y = -2x + b$ 的 $k = -2 < 0$ ，

∴ y 随 x 的增大而减小。

∵ $-1 < 100 < 2025$

∴ $y_1 > y_2 > y_3$ ，

∴最小的值为 y_3 ,

故选: C.

3. 下列方程中, 有实数解的方程是 ()

A. $\sqrt{x+2} = -x$ B. $\sqrt{x-2} + 2 = 0$ C. $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+5} = 0$ D. $\sqrt{2-x} = x-3$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的非负性, 解根式方程. 逐一判断即可.

【详解】 解: 选项 A: $\sqrt{x+2} = -x$

$$\because \sqrt{x+2} \geq 0,$$

$$\therefore x+2 \geq 0, \quad -x \geq 0,$$

$$\text{即 } -2 \leq x \leq 0,$$

有实数解, 故符合题意;

选项 B: $\sqrt{x-2} + 2 = 0$

$$\because \sqrt{x-2} \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{x-2} + 2 \geq 2 \neq 0, \quad \text{不成立}$$

无实数解, 故不符合题意;

选项 C: $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+5} = 0$

$$\because \sqrt{x-5} \geq 0, \quad \sqrt{x+5} \geq 0$$

$$\therefore x-5 = 0 \text{ 且 } x+5 = 0,$$

$$\therefore x = 5 \text{ 且 } x = -5, \quad \text{不成立}$$

无实数解, 故不符合题意;

选项 D: $\sqrt{2-x} = x-3$

$$\because \sqrt{2-x} \geq 0,$$

$$\therefore 2-x \geq 0 \text{ 且 } x-3 \geq 0,$$

$$\text{即 } x \leq 2 \text{ 且 } x \geq 3, \quad \text{不成立}$$

无实数解, 故不符合题意;

故选 A.

4. 下列事件中必然发生的是 ()
- A. 同时掷三枚相同的骰子，朝上一面的三个数字之和为 19
- B. 一副洗好的扑克牌，从中任抽一张牌的点数是奇数
- C. 上海天天都是晴天
- D. 由三个数字 1、2、3 组成的任意一个三位数都是 3 的倍数

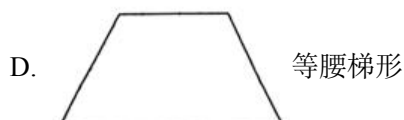
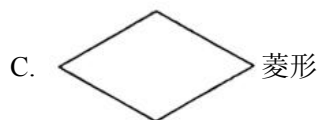
【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了事件类型的判断. 根据必然事件的定义，即在一定条件下必然会发生的事件，逐一分析各选项的可能性.

【详解】解：选项 A：三个骰子的最大点数之和为 $6 \times 3 = 18$ ，而 19 超过最大值，故为不可能事件；
选项 B：扑克牌有 52 张，其中奇数点数的牌有 28 张，从中任抽一张牌的点数是奇数，属于随机事件；
选项 C：天气存在不确定性，“天天都是晴天”为不可能事件；
选项 D：由数字 1、2、3 组成的三位数，其各位数字之和为 $1 + 2 + 3 = 6$ ，而 6 是 3 的倍数，因此所有排列结果均为 3 的倍数，属于必然事件；
故选：D.

5. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】轴对称图形是沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合；在平面内，一个图形绕某个点旋转 180° ，如果旋转前后的图形能互相重合，那么这个图形叫做中心对称图形.

【详解】A、平行四边形只是中心对称图形，不符合题意；
B、正三角形只是轴对称图形，不符合题意；
C、菱形既是轴对称图形，又是中心对称图形，符合题意；
D、等腰梯形只是轴对称图形，不符合题意；

故选：C.

【点睛】综合考查轴对称图形及中心对称图形的知识；掌握常见图形属于哪类对称图形是解决本题的关键.

6. 下列关于三角形的中位线、梯形的中位线的表述，正确的是（ ）

- A. 联结三角形两腰中点的线段叫做三角形的中位线
- B. 联结梯形两底边中点的线段叫做梯形的中位线
- C. 三角形的一条中位线一定与该三角形第三边上的中线互相平分
- D. 梯形的中位线一定将该梯形分成面积相等的两部分

【答案】C

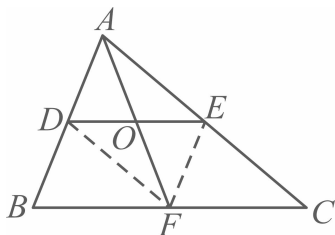
【解析】

【分析】本题考查三角形的中位线，梯形的中位线. 逐一分析各选项是否符合三角形和梯形中位线的定义及性质即可解答.

【详解】解： A：联结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线，故本选项表述错误；

B：联结梯形两腰中点的线段叫做梯形的中位线，故本选项表述错误；

C：如图，



DE 是 ABC 的中位线， AF 是 BC 边上的中线， DE 与 AF 相交于点 O ，

$\therefore DE$ 是中位线，

$\therefore$ 点 D ， E 分别是 AB ， AC 的中点，

$\therefore AF$ 是 BC 边上的中线，

$\therefore$ 点 F 是 BC 的中点，

$\therefore DF$ 是 ABC 的中位线，

$\therefore DF \parallel AC$ ， $DF = \frac{1}{2}AC$ ，

$\therefore AE = \frac{1}{2}AC$ ，

$\therefore DF \parallel AE$ ， $DF = AE$ ，

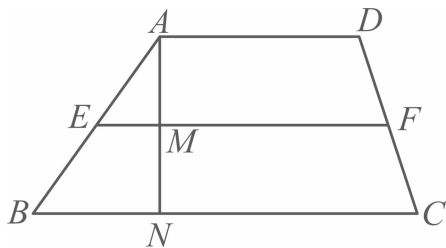
$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 是平行四边形，

$\therefore DE$ 与 AF 互相平分.

因此，在三角形中，任一中位线必与第三边上的中线互相平分. 故本选项表述正确；

D：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， EF 是梯形的中位线， AN 是梯形 $ABCD$ 的高， AN 交 EF 于

点 M ，设 $AD = a$ ， $BC = b$ ， $AN = 2h$



$\therefore EF$ 是梯形的中位线，

$$\therefore EF \parallel AD \parallel BC, EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(a + b), AM = MN = \frac{1}{2}AN = h,$$

$\therefore$ 四边形 $ADFE$ ， $EFCB$ 都是梯形，

$$\therefore S_{\text{梯形}ADFE} = \frac{1}{2}(AD + EF) \cdot AM = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \cdot h = \frac{1}{4}h(3a + b),$$

$$S_{\text{梯形}EFCB} = \frac{1}{2}(BC + EF) \cdot MN = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \cdot h = \frac{1}{4}h(a + 3b),$$

$$\therefore a \neq b,$$

$$\therefore 3a + b \neq a + 3b,$$

$$\therefore S_{\text{梯形}ADFE} \neq S_{\text{梯形}EFCB},$$

因此，梯形的中位线一定将该梯形分成面积相等的两部分的表述是错误的。

故选：C

二、填空题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

7. 若函数 $y = (k - 1)x + 1$ 是一次函数，则 k 的取值范围为_____.

【答案】 $k \neq 1$

【解析】

【分析】 根据一次函数的定义可得一次项系数不为 0，据此可得答案.

【详解】 $\because$ 函数 $y = (k - 1)x + 1$ 是一次函数，

$$\therefore k - 1 \neq 0,$$

$$\therefore k \neq 1.$$

故答案为： $k \neq 1$.

【点睛】 本题考查了一次函数的定义，掌握一次函数的定义是解题的关键. 一般地，形如 $y = kx + b$ (k ， b 是常数，且 $k \neq 0$) 的函数，叫做一次函数.

8. 将直线 $y = 2x - 5$ 沿 y 轴向上平移 4 个单位后，所得直线的截距为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数的平移，直线在 y 轴上的截距的含义，先求解平移后的解析式为 $y = 2x - 1$ ，再进一步求解即可.

【详解】 解：将直线 $y = 2x - 5$ 沿 y 轴向上平移 4 个单位后得到的直线解析式为： $y = 2x - 5 + 4 = 2x - 1$ ，

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时， $y = -1$ ，

$\therefore$ 所得直线的截距为 -1 ；

故答案为： -1 .

9. 用换元法解方程 $\frac{3x}{x-1} + \frac{2x-2}{x} + 3 = 0$ 时，如果设 $\frac{x}{x-1} = t$ ，那么将原方程变形后表示为关于 t 的一元二次方程的形式是_____.

【答案】 $3t^2 + 3t + 2 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程. 设 $\frac{x}{x-1} = t$ ，则原方程化为 $3t + \frac{2}{t} + 3 = 0$ ，再整理即可.

【详解】 解：设 $\frac{x}{x-1} = t$ ，则 $\frac{x-1}{x} = \frac{1}{t}$ ，

原方程化为： $3t + \frac{2}{t} + 3 = 0$ ，

即 $3t^2 + 3t + 2 = 0$ ，

故答案为： $3t^2 + 3t + 2 = 0$.

10. 一个多边形的每一个外角都等于 60° 度，则这个多边形的内角和为_____度.

【答案】 720

【解析】

【分析】 本题考查了正多边形的内角和和外角综合，熟练掌握相关知识是解题的关键；根据题意，得这个多边形的每一个内角 $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，且这个多边形的边数为 $360^\circ \div 60^\circ = 6$ ，再求出这个多边形的内角和，即可作答.

【详解】 解： $\because$ 一个多边形的每一个外角都等于 60° 度，

$\therefore$ 这个多边形的每一个内角 $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，且这个多边形的边数为 $360^\circ \div 60^\circ = 6$

则 $120^\circ \times 6 = 720^\circ$,

故答案为: 720.

11. 计算: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} =$ _____.

【答案】 $\vec{0}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了向量的线性运算, 先计算出 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, 再计算 $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}$ 即可得到答案.

【详解】 解: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$

$$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}$$

$$= \vec{0},$$

故答案为: $\vec{0}$.

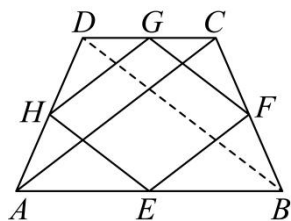
12. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 、 H 依次分别为各边中点, 已知对角线 AC 长 40, 则四边形 $EFGH$ 的周长为_____.

【答案】 80

【解析】

【分析】 本题考查的是等腰梯形的性质, 三角形中位线定理. 连接 BD , 根据等腰梯形的性质得到 $BD = AC$, 根据三角形中位线定理解答即可.

【详解】 解: 连接 BD ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,

$$\therefore BD = AC = 40,$$

$\therefore E$ 、 F 、 G 、 H 分别为各边中点,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC = 20, \quad GH = \frac{1}{2}AC = 20, \quad EH = \frac{1}{2}BD = 20, \quad GF = \frac{1}{2}BD = 20,$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的周长} = 20 + 20 + 20 + 20 = 80,$$

故答案为: 80.

13. 菱形 $ABCD$ 的边 AB 为 5, 对角线 AC 为 8, 则菱形 $ABCD$ 的面积为_____.

【答案】 24

【解析】

【分析】根据菱形的对角线互相垂直，再利用勾股定理求出另一条对角线的长度，根据菱形的面积计算方法求解即可.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，，

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\text{又} \because AC = 8,$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

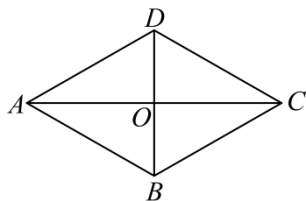
在 $Rt \triangle OAB$ 中， $AB = 5$ ，

$$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore BD = 2OB = 2 \times 3 = 6,$$

$$\text{菱形 } ABCD \text{ 的面积} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24.$$

故答案为：24.



【点睛】本题主要考查了菱形的性质、菱形面积的计算方法等知识，解题关键是利用勾股定理求菱形的对角线.

14. 如果正方形 $ABCD$ 的边长为 x 厘米，其面积为 $\sqrt{2}x$ 平方厘米，则正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 的长为 _____ 厘米.

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了正方形的性质，勾股定理，先根据正方形的性质求出 $x = \sqrt{2}$ ，再结合勾股定理进行列式计算，即可作答.

【详解】解：∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 x 厘米，其面积为 $\sqrt{2}x$ 平方厘米，

$$\therefore \angle A = 90^\circ, x^2 = \sqrt{2}x$$

$$\therefore x = \sqrt{2}$$

即 $AB = AD = \sqrt{2}$

则正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 的长 $= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$ (厘米),

故答案为: 2

15. 如方程 $(3x+2)^4 - m = 0$ 有一个解是 $x = 2$, 则这个方程的另一个实数解为_____.

【答案】 $-\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查解含参数的一元一次方程,。熟练掌握一元一次方程的解和正负数的偶次幂都为正数是解题的关键, 由于 $x = 2$ 是方程 $(3x+2)^4 - m = 0$ 的解, 将其代入即可得到 m 的值, 从而得到 $(3x+2)^4 = 8^4$, 进而可求得 x 的值.

【详解】 解: $\because x = 2$ 是方程 $(3x+2)^4 - m = 0$ 的解,

$$\therefore m = (3 \times 2 + 2)^4 = 8^4,$$

$$\therefore (3x+2)^4 = 8^4,$$

$$\therefore 3x+2 = 8 \text{ 或 } 3x+2 = -8,$$

$$\therefore x = 2 \text{ 或 } x = -\frac{10}{3},$$

$$\therefore \text{这个方程的另一个实数解为 } -\frac{10}{3},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{10}{3}.$$

16. 已知 a 、 b 、 c 分别为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三条边长, c 为斜边长, $\angle C = 90^\circ$, 我们把关于 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的形如

$y = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}$ 的一次函数称为“勾股一次函数”, 如点 $P(1, \sqrt{2})$ 在“勾股一次函数”的图像上, 且

$\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积为 4, 则 c 的值为_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了考查了一次函数图象上点的坐标特征以及勾股定理, 把点 P 坐标代入一次函数解析式中可得 $a+b=\sqrt{2}c$, 根据勾股定理和三角形面积计算公式可得 $\frac{1}{2}ab=4$, $a^2+b^2=c^2$, 则 $(a+b)^2-2ab=c^2$, 据此可得 $(\sqrt{2}c)^2-4 \times 4=c^2$, 解方程即可得到答案.

【详解】解：∵点 $P(1, \sqrt{2})$ 在“勾股一次函数” $y = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}$ 的图象上，

$$\therefore \sqrt{2} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c},$$

$$\therefore a + b = \sqrt{2}c,$$

又∵ a 、 b 、 c 分别为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三条边长， c 为斜边长， $\angle C = 90^\circ$ ， $\text{Rt}\triangle ABC$ 的面积是 4，

$$\therefore \frac{1}{2}ab = 4, \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

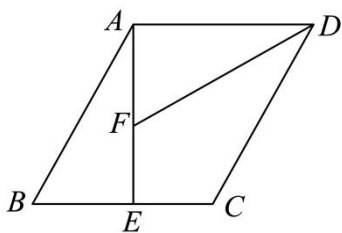
$$\therefore (a+b)^2 - 2ab = c^2,$$

$$\therefore (\sqrt{2}c)^2 - 4 \times 4 = c^2,$$

解得 $c = 4$ 或 $c = -4$ （负值舍去），

故答案为：4.

17. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 E ， DF 平分 $\angle ADC$ 交 AE 于点 F ，若 $AD = AE$ ， $AF = 5\sqrt{3}$ ， $BE = 3\sqrt{3}$ ，则 CD 的长为_____.

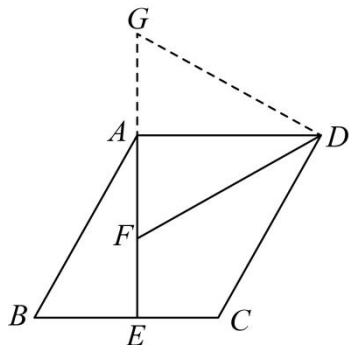


【答案】 $8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】此题考查了全等三角形的判定与性质，平行四边形的性质，等腰三角形的判定与性质. 延长 FA 到点 G 使得 $AG = BE$ ，可得 $\triangle ADG \cong \triangle EAB$ ，再利用平行四边形的性质得到 $\angle GFD = \angle GDF$ ，即可求解.

【详解】解：延长 FA 到点 G 使得 $AG = BE$ ，如图：



由题意可得： $\angle GAD = \angle AEB = 90^\circ$ ，

在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle EAB$ 中,

$$\begin{cases} AG = BE \\ \angle GAD = \angle AEB = 90^\circ, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADG \cong \triangle EAB (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BAE = \angle GDA, \quad GD = AB,$$

在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle ADC$, $AE \perp BC$, $CD = AB$,

$$\therefore \angle BAE + \angle B = \angle GDA + \angle ADC = 90^\circ, \quad \angle AFD + \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GDF = 90^\circ - \angle CDF, \quad \angle AFD = 90^\circ - \angle ADF,$$

$$\therefore DF \text{ 平分 } \angle ADC,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle CDF,$$

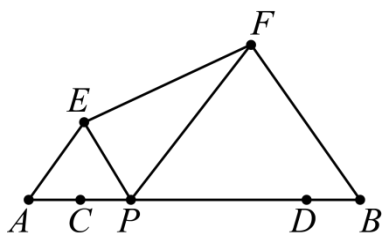
$$\therefore \angle AFD = \angle GDF,$$

$$\therefore GD = GF = 8\sqrt{3},$$

$$\therefore CD = AB = GD = 8\sqrt{3}.$$

故答案为: $8\sqrt{3}$.

18. 如图, 已知 C 、 D 是线段 AB 上两点, 且 $AC = BD = 1$, P 是线段 CD 上一动点, 在 AB 同侧分别作等边三角形 APE 和等边三角形 PBF , 若 G 为线段 EF 的中点, 当点 P 由点 C 移动到点 D 时, 则点 G 移动的路径长度 y 与线段 AB 的长 x ($x > 2$) 之间的函数关系式为_____.



【答案】 $y = \frac{x-2}{2} (x > 2)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形中位线定理, 等边三角形的性质, 平行四边形的性质与判定, 延长 AE , BF 交于 H , 连接 CH , DH , PH , 由等边三角形的性质可得 $\angle A = \angle FPB = 60^\circ$, $\angle APE = \angle B = 60^\circ$, 则可证明 $PE \parallel BH$, $PF \parallel AH$, 进而可证明四边形 $PEHF$ 是平行四边形, 则可推出点 G 为 PH 的中点, 分别取 CH , DH 的中点 M 、 N , 连接 MG , NG , 则由三角形中位线定理可得 $MG \parallel PC$, $GN \parallel PD$, 据此

可证明 M 、 G 、 N 三点共线，点 G 的运动路径即为线段 MN ，由三角形中位线定理可得 $y = \frac{1}{2}CD$ ，再由线段的和差关系可得答案.

【详解】解：如图所示，延长 AE ， BF 交于 H ，连接 CH ， DH ， PH ，

$\therefore \triangle PAE$ ， $\triangle PBF$ 都是等边三角形，

$\therefore \angle A = \angle FPB = 60^\circ$ ， $\angle APE = \angle B = 60^\circ$ ，

$\therefore PE \parallel BH$ ， $PF \parallel AH$ ，

$\therefore$ 四边形 $PEHF$ 是平行四边形，

$\therefore$ 点 G 为 EF 的中点，

$\therefore$ 点 G 为 PH 的中点，

如图所示，分别取 CH ， DH 的中点 M 、 N ，连接 MG ， NG ，

$\therefore MG$ ， NG 分别为 $\triangle HCP$ ， $\triangle HDP$ 的中位线，

$\therefore MG \parallel PC$ ， $GN \parallel PD$ ，

$\therefore M$ 、 G 、 N 三点共线，

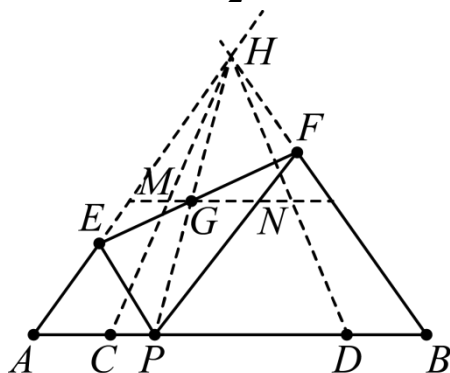
$\therefore$ 点 G 的运动路径即为线段 MN ，

同理可得 MN 是 $\triangle HCD$ 的中位线，

$\therefore MN = \frac{1}{2}CD$ ，

$\therefore y = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(AB - AC - BD) = \frac{x-2}{2}$ ，

故答案为： $y = \frac{x-2}{2} (x > 2)$.



三、解答题（本大题共 7 个题，共 46 分. 第 19、20、21、22 题，每题 5 分；第 23、24 题，每题 8 分；第 25 题 10 分）

19. 解方程： $3 - \sqrt{2x-3} = x$

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】先移项，两边平方，然后整理求得 x 的值，最后进行检验即可.

【详解】解：原方程化为： $3-x=\sqrt{2x-3}$

两边平方，得 $(3-x)^2=2x-3$,

整理，得 $x^2-8x+12=0$,

解得 $x_1=2, x_2=6$,

经检验： $x_1=2$ 是原方程的根， $x_2=6$ 是原方程的增根，

$\therefore$ 原方程的根为 $x=2$.

【点睛】本题主要考查解一元二次方程，二次根式的性质，解此题的关键在于熟练掌握其知识点.

20. 解方程组
$$\begin{cases} 3x-2y=8 \\ x^2+4xy+4y^2-16=0 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

【解析】

【分析】本题主要考查了解二元二次方程组，先根据 $x^2+4xy+4y^2-16=0$ 得到

$(x+2y+4)(x+2y-4)=0$ ，则可得到方程组 $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ x+2y=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ x+2y=-4 \end{cases}$ ，分别解这两个方程组即可

得到答案.

【详解】解： $\because x^2+4xy+4y^2-16=0$,

$$\therefore (x+2y)^2-16=0,$$

$$\therefore (x+2y+4)(x+2y-4)=0,$$

$$\therefore x+2y+4=0 \text{ 或 } x+2y-4=0,$$

$$\therefore x+2y=-4 \text{ 或 } x+2y=4,$$

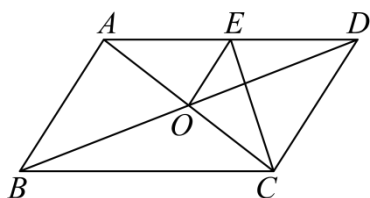
$$\therefore \begin{cases} 3x-2y=8 \\ x+2y=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 3x-2y=8 \\ x+2y=-4 \end{cases},$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} 3x-2y=8 \\ x+2y=4 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} 3x-2y=8 \\ x+2y=-4 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{原方程组的解为 } \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}.$$

21. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 和 BD 相交于点 O , E 为 AD 中点, 连接 CE 、 OE . 已知 $|\overrightarrow{OE}| = 2.5$, 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



(1) 用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{BC}$, 并求 $|\overrightarrow{DC}|$;

(2) 在图中作出 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CE}$.

【答案】(1) $-\vec{a}$, $-\vec{b} - \vec{a}$, 5

(2) 作图见解析

【解析】

【分析】本题考查了向量之间的加减运算和向量作图, 解题关键是理解向量的运算法则.

(1) 利用平行四边形的性质进行向量之间的转化, 再通过计算即可完成求解;

(2) 过 O 作 $OQ \parallel CE$, 过 E 作 $EQ \parallel AC$, 再利用平行四边形法则作出向量即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore OA = OC, OB = OD, AB \parallel CD, AB = CD, AD \parallel BC, AD = BC,$$

$\because E$ 为 AD 中点,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore |\overrightarrow{OE}| = 2.5,$$

$$\therefore |\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{CD}| = 5,$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = -\vec{a},$$

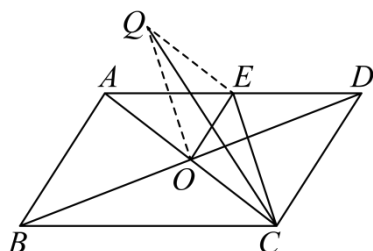
$$\therefore \overrightarrow{OB} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = -\vec{b} - \vec{a};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because OA + CE = CO + CE,$$

作图如下:



$$\text{则 } CQ = CO + CE = OA + CE,$$

$\therefore \overrightarrow{CQ}$ 即为所求.

22. 小杰、小明两人各持有四张分别写有数字 1、2、3、4 的相同卡片，他俩玩数字游戏，规则如下：两人同时随机各出一张卡片，若两张卡片上的数字之和是奇数，则小杰赢；若两张卡片上的数字之和是偶数，则小明赢。这时每人任出一张卡片，小杰、小明两人谁获胜的机会大？为什么？

【答案】小杰获胜的机会大，理由见详解

【解析】

【分析】本题考查的是概率公式，用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比，先算出共 6 种等可能情况，其中 2 个偶数，4 个奇数，再结合概率公式进行列式计算，即可作答。

【详解】解：小杰获胜的机会大，理由如下：

$$\text{依题意: } 2+1=3, 3+1=4; 3+2=5, 2+4=6, 1+4=5, 3+4=7,$$

共 6 种等可能情况，其中 2 个偶数，4 个奇数，

$$\text{即出现偶数的概率为 } \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \text{ 而出现奇数的概率为 } \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{1}{3} < \frac{2}{3}, \text{ 且两张卡片上的数字之和是奇数，则小杰赢；若两张卡片上的数字之和是偶数，则小明赢，}$$

∴小杰获胜的机会大.

23. 某市某小区共有市民 5400 人, “蓝天”医疗队进驻该小区进行一次全员专项健康检测, 若医疗队比计划每分钟多检测 5 人, 那么可以缩短 1.5 小时完成任务. 在这个基础上, 上级部门准备安排“蓝天”医疗队去增援另一小区检测, 现在要求“蓝天”医疗队再提早 1.5 小时完成任务, 那么“蓝天”医疗队现在每分钟还要多检测几人才能去增援另一小区?

【答案】10 人

【解析】

【分析】本题主要考查了分式方程的实际应用, 设原计划医疗队每分钟多检测 x 人, 根据若医疗队比计划每分钟多检测 5 人, 那么可以缩短 1.5 小时完成任务建立方程可求出 $x=15$, 设现在每分钟还要多检测 y 人, 根据要再提早 1.5 小时完成任务建立方程求解即可.

【详解】解: 设原计划医疗队每分钟检测 x 人,

由题意得, $\frac{5400}{x} - \frac{5400}{x+5} = 1.5 \times 60$,

解得 $x=15$ 或 $x=-20$ (舍去),

经检验, $x=15$ 是原方程的解, 且符合题意,

设现在每分钟还要多检测 y 人,

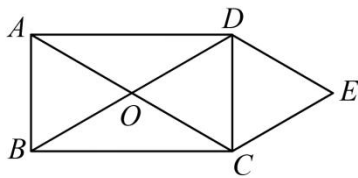
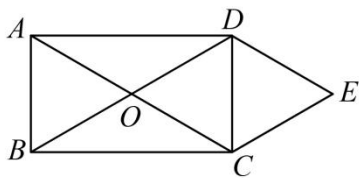
由题意得, $\frac{5400}{y+15+5} = \frac{5400}{15} - 2 \times 1.5 \times 60$,

解得 $y=10$,

经检验, $y=10$ 是原方程的解, 且符合题意,

答: 现在每分钟还要多检测 10 人才能去增援另一小区.

24. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O , $DE \parallel AC$, $CE \parallel BD$.



(1) 求证: 四边形 $OCED$ 是菱形;

(2) 延长 DE 、 BC 交于点 F , 联结 OE , 请先按要求完善图形, 再判断四边形 $OBFE$ 是什么特殊四边形? 并说明理由;

(3) 填空: 联结 BE , 如 $\angle AOB = 60^\circ$, $AB = 2$, 则 BE 的长为_____。(直接给出结果)

【答案】(1) 见解析 (2) 图见解析, 四边形 $OBFE$ 是等腰梯形, 理由见解析

(3) $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】本题主要考查了菱形的性质与判定，矩形的性质，勾股定理，等边三角形的性质与判定，等腰梯形的判定，平行四边形的性质与判定，含 30° 度角的直角三角形的性质，熟知相关知识是解题的关键.

(1) 可证明四边形 $OCED$ 是平行四边形，再由矩形的性质可得 $OD = OC$ ，则可证明平行四边形 $OCED$ 是菱形；

(2) 由菱形和矩形的性质分别得到 $OE \perp CD$ ， $OB = OC$ ， $BC \perp CD$ ，则可证明 $OE \parallel BC$ ，进而证明四边形 $OEFC$ 是平行四边形，得到 $EF = OC = OB$ ，则四边形 $OBFE$ 是等腰梯形；

(3) 过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 延长线于 H ，由矩形的性质可得 $OA = OB = OC$ ， $AC = 2OA$ ， $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $CD = AB = 2$ ，证明 AOB 是等边三角形，得到 $OA = AB = 2$ ，则 $OC = OA = 2$ ， $AC = 4$ ，由勾股定理可得 $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{3}$ ；证明 $\triangle CDE$ 是等边三角形，得到 $\angle DCE = 60^\circ$ ，则 $\angle ECH = 30^\circ$ ，可得 $EH = \frac{1}{2}CE = 1$ ， $CH = \sqrt{CE^2 - EH^2} = \sqrt{3}$ ，求出 $BH = BC + CH = 3\sqrt{3}$ ，则 $BE = \sqrt{BH^2 + EH^2} = 2\sqrt{7}$.

【小问 1 详解】

证明： $\because DE \parallel AC$ ， $CE \parallel BD$ ，

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是平行四边形，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore OD = OC$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $OCED$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解：四边形 $OBFE$ 是等腰梯形，理由如下：

$\because$ 四边形 $OCED$ 是菱形，

$\therefore OE \perp CD$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore OB = OC$ ， $BC \perp CD$ ，

$\therefore OE \parallel BC$ ，

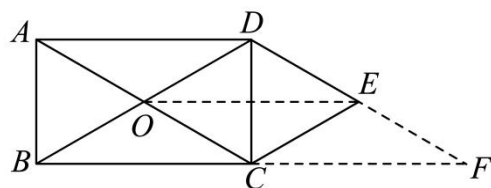
又 $\because OC \parallel DE$ ，

$\therefore$ 四边形 $OEFC$ 是平行四边形，

$\therefore EF = OC = OB$ ，

又 $\because OB$ 与 EF 不平行,

$\therefore$ 四边形 $OBFE$ 是等腰梯形;



【小问3详解】

解: 如图所示, 过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 延长线于 H ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore OA = OB = OC$, $AC = 2OA$, $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, $CD = AB = 2$,

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$,

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,

$\therefore OA = AB = 2$,

$\therefore OC = OA = 2$, $AC = 4$,

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{3}$;

$\because$ 四边形 $OCED$ 是菱形,

$\therefore DE = CE = OC = 2 = CD$,

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形,

$\therefore \angle DCE = 60^\circ$,

$\therefore \angle DCH = 180^\circ - \angle BCD = 90^\circ$,

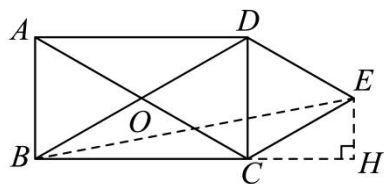
$\therefore \angle ECH = \angle DCH - \angle DCE = 30^\circ$,

$\therefore EH = \frac{1}{2}CE = 1$,

$\therefore CH = \sqrt{CE^2 - EH^2} = \sqrt{3}$,

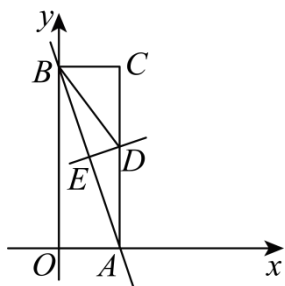
$\therefore BH = BC + CH = 3\sqrt{3}$,

$\therefore BE = \sqrt{BH^2 + EH^2} = 2\sqrt{7}$.



25. 如图, 在直角坐标平面内, 点 O 是坐标原点, 直线 $y = -3x + 6$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B , 过点 A

作 $CA \perp x$ 轴, 垂足为 A , 过点 B 作 $CB \perp y$ 轴, 垂足为 B , 两条垂线交于点 C .



(1) 填空: 线段 AC, BC, AB 的长分别是 $AC = \underline{\hspace{2cm}}$, $BC = \underline{\hspace{2cm}}$, $AB = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 折叠 $\triangle ABC$, 使点 A 与点 B 重合, 折痕 DE 交 AC 于点 D , 交 AB 于点 E .

①求点 D 的坐标;

②若经过点 D 的双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 与线段 BC 交于点 F , 那么在坐标平面内是否存在点 P , 使得四边形 $ADFP$ 是以 DF 为底的等腰梯形? 如存在, 请直接写出符合条件的点 P 坐标; 如不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $6, 2, 2\sqrt{10}$

(2) ①点 D 的坐标为 $\left(2, \frac{10}{3}\right)$ ②存在, $P\left(-\frac{8}{9}, \frac{26}{3}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 理解题意, 令 $y = 0$ 时, 则 $0 = -3x + 6$, 即 $AO = 2$, 令 $x = 0$ 时, 则 $y = 6$, 即 $BO = 6$, 再证明四边形 $OACB$ 是矩形, 则 $BC = OA = 2$, $AC = BO = 6$, 运用勾股定理得 $AB = \sqrt{BO^2 + AO^2} = 2\sqrt{10}$, 即可作答.

(2) ①理解题意, 设 $D(2, r)$, 则 $AD = BD = r$, $CD = 6 - r$, 根据勾股定理得 $BD^2 = CD^2 + BC^2$, 代入数值进行计算 $r = \frac{10}{3}$, 即可得点 D 的坐标;

②把点 D 的坐标 $\left(2, \frac{10}{3}\right)$ 代入反比例函数, 求出 $k = \frac{20}{3}$, 再求出点 F 的坐标为 $\left(\frac{10}{9}, 6\right)$, 因为四边形 $ADFP$ 是以 DF 为底的等腰梯形, 得 $FD \parallel AP$, $PF = AD$, 设直线 FD 的解析式为 $y = mx + b (m \neq 0)$, 把 $\left(\frac{10}{9}, 6\right)$,

$\left(2, \frac{10}{3}\right)$ 分别代入 $y = mx + b$, $y = -3x + \frac{28}{3}$, 因为 $FD \parallel AP$, 设直线 AP 的解析式为 $y = -3x + n$, 计算化

简得直线 AP 的解析式为 $y = -3x + 6$, 设 $P(r, -3r + 6)$, 结合点 F 的坐标为 $\left(\frac{10}{9}, 6\right)$, 得

$\left(r - \frac{10}{9}\right)^2 + (-3r + 6 - 6)^2 = \frac{100}{9}$, 运用公式法进行解方程, 进行下一步分析, 当 $r = -\frac{8}{9}$ 时, 则 PF, AD

不平行, 此时四边形 $ADFP$ 为等腰梯形, 再求出 $P\left(-\frac{8}{9}, \frac{26}{3}\right)$. 即可作答.

【小问 1 详解】

解: $\because y = -3x + 6$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ,

$\therefore$ 令 $y = 0$ 时, 则 $0 = -3x + 6$, 解得 $x = 2$, 即 $AO = 2$,

令 $x = 0$ 时, 则 $y = -3 \times 0 + 6 = 6$, 即 $BO = 6$,

$\therefore$ 过点 A 作 $CA \perp x$ 轴, 垂足为 A , 过点 B 作 $CB \perp y$ 轴, 垂足为 B , 两条垂线交于点 C .

$\therefore \angle CBO = \angle BOA = \angle OAC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $OACB$ 是矩形,

$\therefore BC = OA = 2, AC = BO = 6$,

则 $AB = \sqrt{BO^2 + AO^2} = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}$,

故答案为: $6, 2, 2\sqrt{10}$;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 得 $BC = OA = 2, AC = BO = 6, AB = 2\sqrt{10}$,

$\therefore$ 折叠 ABC , 使点 A 与点 B 重合, 折痕 DE 交 AC 于点 D , 交 AB 于点 E .

$\therefore AD = BD$,

设 $D(2, r)$,

则 $AD = BD = r, CD = 6 - r$,

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BD^2 = CD^2 + BC^2$,

即 $r^2 = (6 - r)^2 + 2^2$,

$\therefore r^2 = 36 - 12r + r^2 + 4$,

$\therefore r = \frac{10}{3}$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $\left(2, \frac{10}{3}\right)$.

②存在, 过程如下:

经过点 D 的双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 与线段 BC 交于点 F , 且点 D 的坐标为 $\left(2, \frac{10}{3}\right)$.

$$\therefore \frac{10}{3} = \frac{k}{2},$$

$$\therefore k = \frac{20}{3},$$

$$\therefore y = \frac{\frac{20}{3}}{x} = \frac{20}{3x},$$

点 F 的纵坐标等于点 B 的纵坐标, 即 $y_F = 6$,

$$\text{把 } y_F = 6 \text{ 代入 } y = \frac{20}{3x},$$

$$\text{得 } 6 = \frac{20}{3x},$$

$$\therefore x = \frac{10}{9},$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 的坐标为 } \left(\frac{10}{9}, 6\right),$$

$\therefore$ 四边形 $ADFP$ 是以 DF 为底的等腰梯形,

$$\therefore FD \parallel AP, PF = AD,$$

设直线 FD 的解析式为 $y = mx + b (m \neq 0)$,

把 $\left(\frac{10}{9}, 6\right), \left(2, \frac{10}{3}\right)$ 分别代入 $y = mx + b$,

$$\text{得 } \begin{cases} 6 = \frac{10}{9}m + b \\ \frac{10}{3} = 2m + b \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b = \frac{28}{3} \\ m = -3 \end{cases},$$

$$\therefore y = -3x + \frac{28}{3},$$

$\therefore OA = 2$, 且 A 点在 x 轴的正半轴上,

$$\therefore A(2, 0),$$

$$\therefore FD \parallel AP,$$

∴ 设直线 AP 的解析式为 $y = -3x + n$,

把 $A(2, 0)$ 代入 $y = -3x + n$ 得 $0 = -3 \times 2 + n$,

∴ $n = 6$,

∴ 直线 AP 的解析式为 $y = -3x + 6$,

即直线 AP 与直线 AB 重合,

设 $P(r, -3r + 6)$,

∵ $PF = AD$, 且点 D 的坐标为 $(2, \frac{10}{3})$.

∴ $PF = \frac{10}{3}$,

∴ 点 F 的坐标为 $(\frac{10}{9}, 6)$, $P(r, -3r + 6)$,

∴ $(r - \frac{10}{9})^2 + (-3r + 6 - 6)^2 = PF^2 = \frac{100}{9}$,

∴ $r^2 - \frac{20}{9}r + \frac{100}{81} + 9r^2 = \frac{100}{9}$,

∴ $10r^2 - \frac{20}{9}r - \frac{800}{81} = 0$,

$\Delta = \left(-\frac{20}{9}\right)^2 + 4 \times 10 \times \frac{800}{81} = \frac{400}{81} + \frac{32000}{81} = \frac{32400}{81}$,

$r = \frac{\frac{20}{9} \pm \sqrt{\frac{32400}{81}}}{20} = \frac{20 \pm 180}{180}$,

∴ $r_1 = \frac{20+180}{180} = \frac{10}{9}$ 或 $r_2 = \frac{20-180}{180} = -\frac{8}{9}$,

当 $r = \frac{10}{9}$ 时, 则 $PF \parallel AD$,

∵ $PF = AD$,

此时四边形 $ADFP$ 为平行四边形, 不符合题意, 故舍去,

当 $r = -\frac{8}{9}$ 时, 则 PF, AD 不平行,

即 $PF = AD$,

此时四边形 $ADFP$ 为等腰梯形, 符合题意,

$$\therefore -3 \times \left(-\frac{8}{9}\right) + 6 = \frac{8}{3} + 6 = \frac{26}{3},$$

$$\therefore P\left(-\frac{8}{9}, \frac{26}{3}\right).$$

【点睛】 本题考查了矩形的性质与判定，一次函数的解析式，反比例函数与一次函数的综合，等腰梯形的定义，勾股定理，一次函数与坐标轴的交点，折叠性质，难度较大，综合性较强，正确掌握相关性质内容是解题的关键.