

2024-2025 学年人教版八年级数学下学期期末模拟试卷 02

(考试时间：120 分钟 试卷满分：120 分)

注意事项：

1. 本试卷共 24 题，选择 10 题，填空 6 题，解答 8 题
2. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
4. 回答客观题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
5. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题。(共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分)

1. 函数 $y = \frac{\sqrt{x+2}}{2}$ 的自变量取值范围是 ()

- A. $x > -2$ B. $x < -2$ C. $x \geq -2$ D. $x \neq -2$

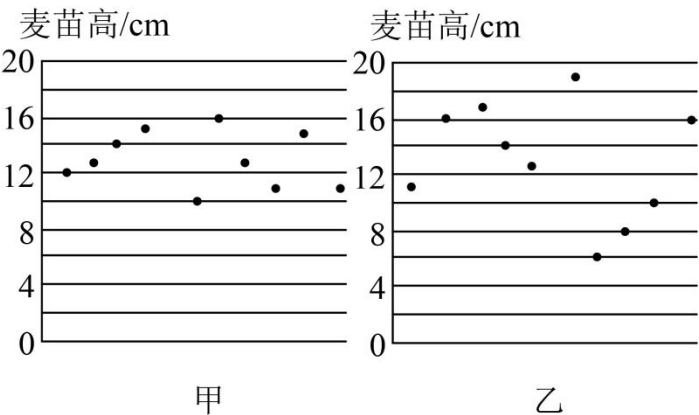
【答案】C

【分析】本题考查函数的自变量取值范围。根据二次根式的性质，被开方数大于或等于 0，可以求出 x 的范围。

【详解】解：根据题意得： $x+2 \geq 0$ ，解得： $x \geq -2$ 。

故选：C。

2. 为了考查甲、乙两块地中小麦的长势，分别从中随机抽出 10 株麦苗，测得麦苗高如图所示，若 $s_{\text{甲}}^2$ 和 $s_{\text{乙}}^2$ 分别表示甲、乙两块地麦苗高数据的方差，则 ()



- A. $s_{\text{甲}}^2 = s_{\text{乙}}^2$ B. $s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2$ C. $s_{\text{甲}}^2 > s_{\text{乙}}^2$ D. 不确定

【答案】B

【分析】 本题主要考查了方差与稳定性之间的关系，方差越小，越稳定，即波动越小，由统计图可知甲的麦苗高的波动情况比乙的麦苗高的波动情况小，据此可得答案.

【详解】 解：观察统计图可知，甲的麦苗高的波动情况比乙的麦苗高的波动情况小，故 $s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2$ ，
故选：B.

3. 下列二次根式是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{0.5}$ C. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ D. $\sqrt{6}$

【答案】 D

【分析】 本题考查了最简二次根式，熟练掌握最简二次根式的定义是解题的关键.

根据最简二次根式的定义逐项判断即可.

【详解】 解：A. $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2}$ 被方数含有能开的尽方的数，不是最简二次根式，故该选项不符合题意；
B. $\sqrt{0.5}$ 被方数是小数，不是最简二次根式，故该选项不符合题意；
C. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 被方数含有分母，不是最简二次根式，故该选项不符合题意；
D. $\sqrt{6}$ 是最简二次根式，故该选项符合题意；

故选：D.

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 的对边分别为 a ， b ， c ，下列条件不能判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形的是 ()

- A. $\angle A + \angle B = 90^\circ$ B. $a^2 = 3$ ， $b^2 = 4$ ， $c^2 = 5$
C. $a = 5$ ， $b = 12$ ， $c = 13$ D. $a^2 = c^2 - b^2$

【答案】 B

【分析】 本题考查了直角三角形的判定，三角形的内角和，勾股定理逆定理，根据直角三角形的判定逐项判断即可，掌握勾股定理逆定理及直角三角形的定义是解题的关键.

【详解】 解：A、 $\because \angle A + \angle B = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle C = 90^\circ$ ，
 $\therefore$ 能判定为直角三角形，不符合题意；

B、 $\because a^2 = 3$ ， $b^2 = 4$ ， $c^2 = 5$ ，
 $\therefore a^2 + c^2 \neq b^2$ ，
 $\therefore$ 不能判定为直角三角形，符合题意；

C、 $\because a = 5$ ， $b = 12$ ， $c = 13$ ，
 $\therefore a^2 = 25$ ， $b^2 = 144$ ， $c^2 = 169$ ，

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

$\therefore$ 能判定为直角三角形，不符合题意；

D、 $\because a^2 = c^2 - b^2$,

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

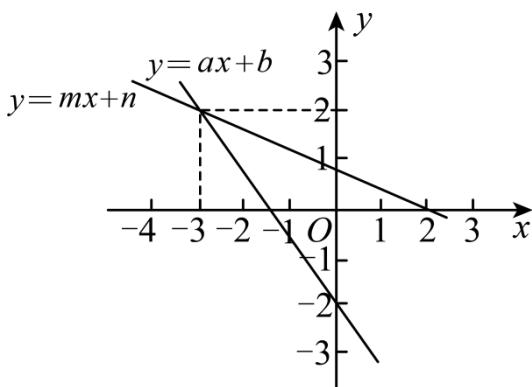
$\therefore$ 能判定为直角三角形，不符合题意；

故选：B.

5. 在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y = ax + b$ 与 $y = mx + n$ ($a < m < 0$) 的图象如图所示. 小星根据图象得到如下结论：①在一次函数 $y = mx + n$ 的图象中， y 的值随着 x 值的增大而减小；②关于 x, y 的二元一次

方程组 $\begin{cases} y - ax = b \\ y - mx = n \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ ；③关于 x 的一元一次方程 $mx + n = 0$ 的解为 $x = 2$ ；④当 $x = 0$ 时，

$ax + b = -2$. 其中正确的有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 D

【分析】 本题考查了一次函数的图像，结合一次函数的性质和图象，逐一判断即可解答，熟知一次函数的性质是解题的关键.

【详解】 解：①由函数图象可知，直线 $y = mx + n$ 从左至右呈下降趋势，所以 y 的值随着 x 值的增大而减小，故①正确；

②由函数图象可知，一次函数 $y = ax + b$ 与 $y = mx + n$ ($a < m < 0$) 的图象交点坐标为 $(-3, 2)$,

所以方程组 $\begin{cases} y - ax = b \\ y - mx = n \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ ，故②正确；

③由函数图象可知，直线 $y = mx + n$ 与 x 轴的交点坐标为 $(2, 0)$,

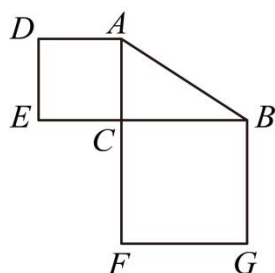
所以方程 $mx+n=0$ 的解为 $x=2$ ，故③正确；

④由函数图象可知，直线 $y=ax+b$ 过点 $(0,-2)$ ，

所以当 $x=0$ 时， $ax+b=-2$ ，故④正确；

故选：D.

6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，分别以 AC ， BC 为边作正方形. 若 $AB=5$ ，则正方形 $ADEC$ 和正方形 $BCFG$ 的面积和为 ()



A. 25

B. 36

C. 49

D. 64

【答案】A

【分析】本题考查勾股定理，根据勾股定理进行计算即可.

【详解】解：正方形 $ADEC$ 和正方形 $BCFG$ 的面积之和为 $AC^2 + BC^2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，

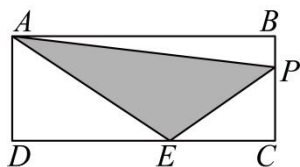
$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

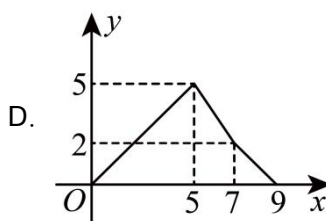
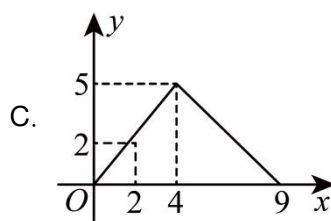
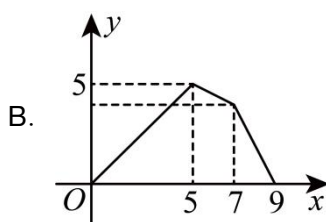
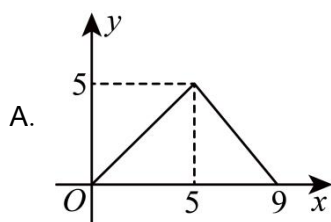
$$\because AB=5,$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = 5^2 = 25.$$

故选：A.

7. 如图，在长方形 $ABCD$ 中， $AB=5$ ， $AD=2$ ， E 为边 CD 上一点，且 $DE=3$ ，动点 P 从点 A 出发，沿路径 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E$ 运动，则三角形 APE 的面积 y 与点 P 经过的路径长 x 之间的函数关系用图象表示大致是 ()





【答案】D

【分析】本题考查了动点问题函数图象. 求出 CE 的长, 然后分三种情况讨论: ①点 P 在 AB 上运动时, 利用三角形的面积公式列式得到 y 与 x 的关系式; ②点 P 在 BC 上运动时, 根据 $S_{APE} = S_{\text{梯形}ABCE} - S_{ABP} - S_{ECP}$ 式整理得到 y 与 x 的关系式; ③点 P 在 CE 上运动时, 利用三角形的面积公式列式得到 y 与 x 的函数关系, 根据解析式即可得到函数的图象.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是长方形,

$$\therefore BC = AD = 2, \quad CD = AB = 5,$$

$$\therefore CE = CD - DE = 5 - 3 = 2,$$

当点 P 在 AB 上运动, 即 $0 \leq x \leq 5$ 时, $AP = x$,

$$S_{APE} = \frac{1}{2} AP \cdot AD = \frac{1}{2} x \cdot 2 = x,$$

$$\therefore y = x (0 \leq x \leq 5);$$

当点 P 在 BC 上运动, 即 $5 < x \leq 7$ 时,

$$BP = x - 5, \quad CP = 5 + 2 - x = 7 - x,$$

$$\therefore S_{APE} = S_{\text{梯形}ABCE} - S_{ABP} - S_{ECP}$$

$$= \frac{1}{2} (AB + CE) \cdot BC - \frac{1}{2} AB \cdot BP - \frac{1}{2} CE \cdot CP$$

$$= \frac{1}{2} \times (5 + 2) \times 2 - \frac{1}{2} \times 5 (x - 5) - \frac{1}{2} \times 2 (7 - x)$$

$$= -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2},$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2} (5 < x \leq 7);$$

当点 P 在 CE 上运动, 即 $7 < x \leq 9$ 时, $CP = x - 5 - 2 = x - 7$,

$$EP = EC - CP = 2 - (x - 7) = 9 - x,$$

$$\therefore S_{\triangle APE} = \frac{1}{2} EP \cdot AD = \frac{1}{2} (9 - x) \times 2 = 9 - x,$$

$$\therefore y = 9 - x (7 < x \leq 9);$$

综上所述, $\triangle APE$ 的面积 y 与点 P 经过的路径长 x 之间的函数关系式为 $y = \begin{cases} x (0 \leq x \leq 5) \\ -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2} (5 < x \leq 7) \\ 9 - x (7 < x \leq 9) \end{cases}$,

$\therefore$ 当 $x = 5$ 时, $y = 5$;

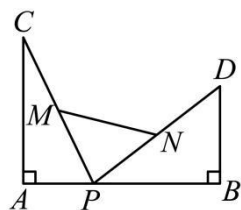
当 $x = 7$ 时, $y = 2$;

当 $x = 9$ 时, $y = 0$.

$\therefore$ 选项 D 的图象符合题意.

故选: D.

8. 如图, P 是线段 AB 上一动点, $CA \perp AB, DB \perp AB, AB = 4, AC = 3, DB = 2, M, N$ 分别是 PC, PD 的中点, 随着点 P 的运动, MN 的长 ()



A. 随着点 P 的位置变化而变化

B. 保持不变, 长为 $\frac{5}{2}$

C. 保持不变, 长为 $\sqrt{5}$

D. 保持不变, 长为 $\frac{\sqrt{17}}{2}$

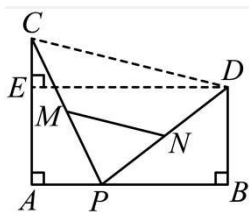
【答案】D

【分析】本题考查了勾股定理, 矩形的判定和性质, 中位线性质, 掌握以上概念及计算是关键.

如图所示, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 连接 CD , 可得四边形 $ABDE$ 是矩形, $DE = AB = 4$,

$CE = AC - AE = 3 - 2 = 1$, 在 $Rt\triangle CDE$ 中, 由勾股定理得到 $CD = \sqrt{17}$, 由题意可得 MN 是中位线, 由此即可求解.

【详解】解: 如图所示, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 连接 CD ,



$\because CA \perp AB, DB \perp AB,$

$\therefore \angle A = \angle B = \angle AED = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 是矩形,

$\therefore DE = AB = 4, AE = BD = 2,$

$\therefore CE = AC - AE = 3 - 2 = 1,$

在 $Rt\triangle CDE$ 中, $CD = \sqrt{DE^2 + CE^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17},$

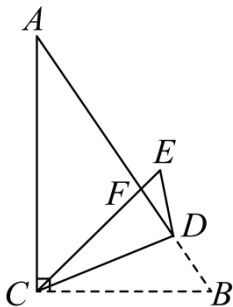
在 $\triangle CDP$ 中, 点 M, N 分别是 PC, PD 的中点, 则 MN 是中位线,

$\therefore MN = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{17}}{2},$

$\therefore$ 随着点 P 的运动, MN 的长保持不变, 长为 $\frac{\sqrt{17}}{2},$

故选: D .

9. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, $AB = 15$, 将边 BC 沿 CD 翻折, 点 B 落在点 E 处, 连接 CE 交 AB 于点 F , 则 EF 的最大值为 ()



A. $\frac{18}{5}$

B. $\frac{12}{5}$

C. $\frac{9}{5}$

D. $\frac{6}{5}$

【答案】C

【分析】 本题考查了勾股定理与折叠问题、垂线段最短, 熟练掌握折叠的性质是解题关键. 先利用勾股定理可得 $BC = 9$, 再根据折叠的性质可得 $CE = BC = 9$, 从而可得 $EF = 9 - CF$, 则当 CF 的值最小时, EF 取得最大值, 然后根据垂线段最短可得当 $CF \perp AB$ 时, CF 的值最小, 利用三角形的面积公式可求出 CF 的最小值, 由此即可得.

【详解】 解: $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, $AB = 15$,

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 9,$$

由折叠的性质得: $CE = BC = 9$,

$$\therefore EF = CE - CF = 9 - CF,$$

$\therefore$ 当 CF 的值最小时, EF 取得最大值,

由垂线段最短可知, 当 $CF \perp AB$ 时, CF 的值最小,

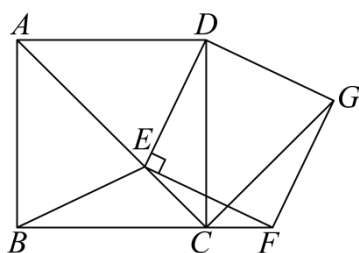
$$\text{此时 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CF = \frac{1}{2} AC \cdot BC,$$

$$\therefore CF = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{12 \times 9}{15} = \frac{36}{5},$$

$$\therefore EF \text{ 的最大值为 } 9 - \frac{36}{5} = \frac{9}{5},$$

故选: C.

10. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 为正方形. $AB = 2\sqrt{2}$, E 为对角线 AC 上一点, 连接 DE , 过点 E 作 $EF \perp DE$, 交 BC 的延长线于点 F , 以 DE, EF 为邻边作矩形 $DEFG$, 连接 CG . 下列结论: ① $BE = EF$; ② 矩形 $DEFG$ 是正方形; ③ $CG = AE$; ④ CG 平分 $\angle DCF$. 其中结论正确的序号有 ()



A. ①③④

B. ①②④

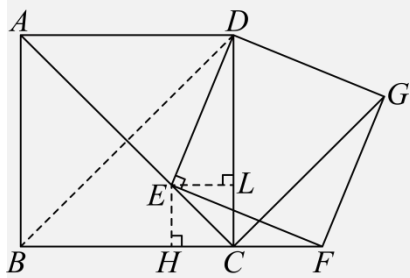
C. ①②③

D. ①②③④

【答案】D

【分析】连接 BD , 作 $EH \perp CB$ 于点 H , $EL \perp CD$ 于点 L , 由正方形的性质得 $CB = CD = AD$, AC 垂直平分 BD , 则 $BE = ED$, 因为 CA 平分 $\angle BCD$, 所以 $EH = EL$, 再推导出 $\angle HEF = \angle LED$, 进而证明 $\triangle HEF \cong \triangle LED$, 得 $EF = ED$, 所以 $BE = EF$, 可判断①正确; 由四边形 $DEFG$ 是矩形, $EF = ED$, 证明四边形 $DEFG$ 是正方形, 可判断②正确; 再证明 $\triangle CDG \cong \triangle ADE$, 得 $CG = AE$, 可判断③正确; 可证明 $\angle DCG = \angle DAE = 45^\circ$, 则 $\angle FCG = \angle DCG = 45^\circ$, 可判断④正确, 于是得到问题的答案.

【详解】解: 连接 BD , 作 $EH \perp CB$ 于点 H , $EL \perp CD$ 于点 L , 则 $\angle EHF = \angle ELD = \angle ELC = 90^\circ$,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$, $CB = CD = AD$, AC 垂直平分 BD ,

$\because E$ 为 AC 上一点,

$\therefore BE = ED$,

$\because CB = CD$, $CA \perp BD$,

$\therefore CA$ 平分 $\angle BCD$,

$\therefore EH = EL$,

$\because EF \perp DE$,

$\therefore \angle DEF = 90^\circ$,

$\because \angle HEL = 180^\circ - \angle EHF - \angle BCD - \angle ELC = 90^\circ$,

$\therefore \angle HEF = \angle LED = 90^\circ - \angle FEL$,

在 $\triangle HEF$ 和 $\triangle LED$ 中,

$$\begin{cases} \angle HEF = \angle LED \\ EH = EL \\ \angle EHF = \angle ELD \end{cases},$$

$\therefore \triangle HEF \cong \triangle LED (ASA)$,

$\therefore EF = ED$,

$\therefore BE = EF$,

故①正确;

$\because$ 四边形 $DEFG$ 是矩形, $EF = ED$,

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是正方形, 故②正确;

$\therefore \angle EDG = \angle ADC = 90^\circ$, $GD = ED = BE = EF$,

$\therefore \angle CDG = \angle ADE = 90^\circ - \angle CDE$,

在 $\triangle CDG$ 和 $\triangle ADE$ 中,

$$\begin{cases} CD = AD \\ \angle CDG = \angle ADE, \\ GD = ED \end{cases}$$

$\therefore \triangle CDG \cong \triangle ADE$ (SAS),

$\therefore CG = AE$, $\angle DCE = \angle DAE = 45^\circ$, 故③正确;

$\therefore \angle DCG = \angle DAE = 45^\circ$,

$\because \angle DCF = 90^\circ$,

$\therefore \angle FCG = \angle DCG = 45^\circ$,

$\therefore CG$ 平分 $\angle DCF$,

故④正确.

故选: D.

【点睛】此题重点考查正方形的性质、等腰直角三角形的性质、角平分线的性质、全等三角形的判定与性质等知识.

二、填空题。(共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

11. 计算: $\left(\sqrt{6} - \sqrt{\frac{3}{8}}\right) \times \sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{2} / \frac{3}{2}\sqrt{3}$

【分析】本题考查了二次根式的混合运算, 二次根式的性质化简, 掌握相关运算法则是解题关键. 先根据乘法分配律展开, 再计算乘法, 然后化为最简二次根式计算即可.

【详解】解: $\left(\sqrt{6} - \sqrt{\frac{3}{8}}\right) \times \sqrt{2}$
 $= \sqrt{6} \times \sqrt{2} - \sqrt{\frac{3}{8}} \times \sqrt{2}$
 $= \sqrt{12} - \sqrt{\frac{3}{4}}$
 $= 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{3\sqrt{3}}{2},$

故答案为: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

12. 已知某人要种植培育的种子有四种类型, 分别是甲、乙、丙、丁, 对于每一种种子发芽天数与稳定性

(方差) 如下表所示, 在同时考虑稳定性和快速发芽的情况下, 它应该选择的种子类型是_____.

种类	甲	乙	丙	丁
平均数	2.2	2.2	3.1	2.7
方差	0.87	1.75	1.75	0.87

【答案】 甲

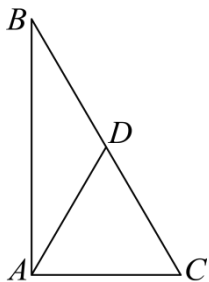
【分析】 本题考查了平均数和方差. 平均数反映了一组数据的总体趋势, 但是平均数容易受到极端数值的影响; 方差体现了一组数据的波动性, 方差越大数据的波动越大, 所以同时考虑稳定性和快速发芽的情况下, 应选择平均数和方差都较小的类型.

【详解】 解: $\because$ 甲发芽的平均天数最少, 方差最小,

$\therefore$ 同时考虑稳定性和快速发芽的情况下, 应选择甲.

故答案为: 甲.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是 BC 边上的中线, 且 $BC + AD = 18$, 则 BC 的长为_____.



【答案】 12

【分析】 本题考查了直角三角形斜边上的中线是斜边的一半, 掌握直角三角形的性质是解题的关键, 根据直角三角形的性质可知 $AD = \frac{1}{2}BC$, 再根据已知条件即可解答.

【详解】 解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,

$\because AD$ 是 BC 边上的中线,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because BC + AD = 18,$$

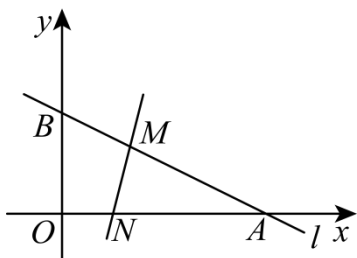
$$\therefore \frac{3}{2}BC = 18,$$

$$\therefore BC = 12,$$

即 BC 的长为 12,

故答案为: 12.

14. 如图, 直线 l 与 x 轴交于点 $A(6,0)$, 与 y 轴交点 $B(0,3)$, 点 $M(a,2)$ 是直线 l 上一点, 过点 M 的直线 MN 交边 OA 点 N , 若直线 MN 将 AOB 分成面积相等的两部分, 则点 N 的坐标是_____.



【答案】 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

【分析】 本题主要考查了一次函数与几何综合, 先根据点 A 和点 B 的坐标求出 AOB 的面积, 再利用待定系数法直线 l 解析式, 进而得到点 M 的坐标, 再由直线 MN 将 AOB 分成面积相等的两部分得到 $\triangle AMN$ 的面积, 据此利用三角形面积计算公式列式求解即可.

【详解】 解: $\because$ 直线 l 与 x 轴交于点 $A(6,0)$, 与 y 轴交点 $B(0,3)$,

$$\therefore OA = 6, OB = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9;$$

设直线 l 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} 6k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 3,$$

$\because$ 点 $M(a,2)$ 是直线 l 上一点,

$$\therefore 2 = -\frac{1}{2}a + 3, \text{ 解得 } a = 2,$$

$$\therefore M(2,2),$$

$\because$ 直线 MN 将 AOB 分成面积相等的两部分,

$$\therefore S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}AN \cdot y_M = \frac{1}{2} \times 9,$$

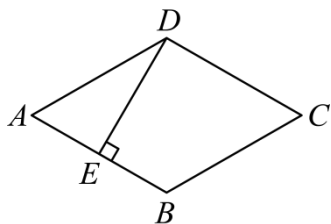
$$\therefore AN = \frac{9}{2},$$

$$\therefore ON = OA - AN = \frac{3}{2},$$

$$\therefore N\left(\frac{3}{2}, 0\right),$$

故答案为: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

15. 如图, 菱形 $ABCD$ 的边长是 2cm , $DE \perp AB$ 于点 E . 若 $\angle A = 60^\circ$, 则菱形 $ABCD$ 的面积为 _____ cm^2 .



【答案】 $2\sqrt{3}$

【分析】 本题考查求菱形面积, 涉及菱形性质, 勾股定理, 含 30° 角的直角三角形的性质等知识, 熟练掌握直角三角形中含 30° 角所对的边是斜边的一半是解决问题的关键. 根据菱形 $ABCD$ 的边长是 2cm , $\angle A = 60^\circ$, 得到 $\angle ADE = 30^\circ$, $AE = \frac{1}{2}AD = 1$, $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{3}$, 从而得到菱形 $ABCD$ 的面积为 $AB \cdot DE$ 即可解答.

【详解】 解: $\because DE \perp AB$, $\angle A = 60^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 则 $\angle ADE = 30^\circ$,

$\because$ 菱形 $ABCD$ 的边长是 2cm ,

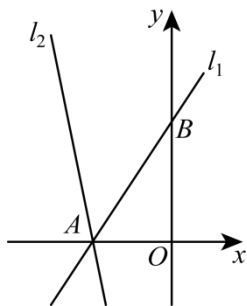
$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AE = \frac{1}{2}AD = 1$,

$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积为 $AB \cdot DE = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} (\text{cm}^2)$,

故答案为: $2\sqrt{3}$.

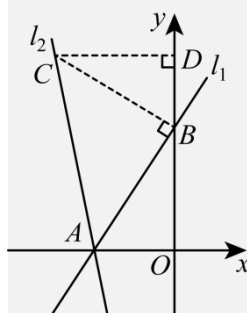
16. 已知直线 $l_1: y = \frac{3}{2}x + 3$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 直线 l_2 也经过 A 点, 位置如图所示, 且与直线 l_1 所夹锐角为 45° , 则直线 l_2 的函数表达式为 _____.



【答案】 $y = -5x - 10$

【分析】 本题考查了待定系数法求一次函数表达式，一次函数的性质，全等三角形的判定与性质，等腰直角三角形的判定与性质，作出合适的辅助线构造等腰直角三角形是解题的关键. 过点 B 作 $CB \perp AB$ ，交 l_2 于 C ，过 C 作 $CD \perp y$ 轴于点 D ，由 $\angle BAC = 45^\circ$ 可推出 $AB = BC$ ，结合 $\angle OAB + \angle ABO = 90^\circ = \angle ABO + \angle CBD$ ，从而证明 $\triangle BDC \cong \triangle AOB$ (AAS)，得到 $BD = OA$ ， $CD = OB$ ，然后利用直线 l_1 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，求出 A 、 B 的坐标，得到 CD 、 OD 的长度，从而得到 C 点坐标，最后利用待定系数法即可求得直线 l_2 的函数表达式.

【详解】 解：如图，过点 B 作 $CB \perp AB$ ，交 l_2 于 C ，过 C 作 $CD \perp y$ 轴于点 D



$$\because \angle BAC = 45^\circ, \quad \angle ABC = 90^\circ$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形

$$\therefore AB = BC$$

$$\because \angle OAB + \angle ABO = 90^\circ = \angle ABO + \angle CBD$$

$$\therefore \angle OAB = \angle CBD$$

$$\because \angle AOB = \angle BDC = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle BDC \cong \triangle AOB \text{ (AAS)}$$

$$\therefore BD = OA, \quad CD = OB$$

$$\because \text{直线 } l_1: y = \frac{3}{2}x + 3 \text{ 与 } x \text{ 轴交于点 } A, \text{ 与 } y \text{ 轴交于点 } B$$

$$\therefore A(-2, 0), \quad B(0, 3)$$

$$\therefore BD = OA = 2, \quad CD = OB = 3$$

$$\therefore OD = OB + BD = 3 + 2 = 5$$

$\therefore C$ 点的坐标为 $(-3, 5)$

设直线 l_2 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$

$\because$ 直线 l_2 经过 $A(-2, 0)$, $C(-3, 5)$

$$\therefore \begin{cases} -2k + b = 0 \\ -3k + b = 5 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -5 \\ b = -10 \end{cases}$$

$\therefore l_2$ 的解析式为 $y = -5x - 10$.

故答案为: $y = -5x - 10$.

三、解答题 (共 8 小题, 共 72 分)

17. 计算题:

$$(1) \sqrt{18} - 3\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{8}};$$

$$(2) \sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) - (2 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2).$$

【答案】(1) $\frac{7\sqrt{2}}{4}$

(2) $4 + \sqrt{10}$

【分析】 本题主要考查了二次根式的混合运算:

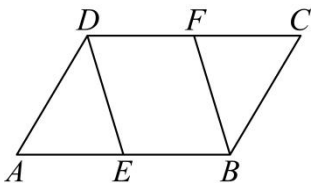
(1) 先化简二次根式, 再进行加减运算即可;

(2) 先利用乘法分配律及平方差公式计算, 再合并即可.

【详解】 (1) 解: 原式 $= 3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$
 $= \frac{7\sqrt{2}}{4};$

(2) 解: 原式 $= \sqrt{10} + 5 - [(\sqrt{5})^2 - 2^2]$
 $= \sqrt{10} + 5 - 1$
 $= 4 + \sqrt{10}.$

18. 如图, $\square ABCD$ 在中, E, F 分别是 AB, CD 的中点. 求证: 四边形 $EBFD$ 是平行四边形.



【答案】见解析

【分析】本题主要考查了平行四边形的判定和性质，熟练掌握平行四边形的判定方法，是解题的关键。根据平行四边形的性质得出 $AB = CD$ ， $AB \parallel CD$ ，根据中点定义得出 $EB = \frac{1}{2}AB$ ， $FD = \frac{1}{2}CD$ ，证明 $EB = FD$ ，即可证明结论。

【详解】证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, \quad AB \parallel CD,$$

$$\therefore EB \parallel FD,$$

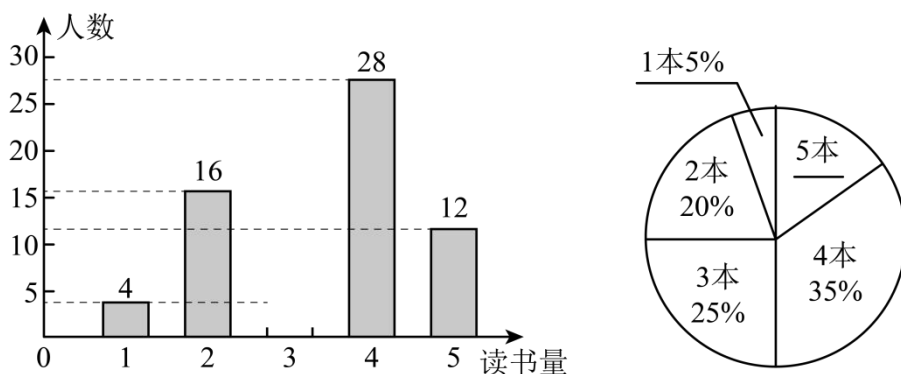
∵ E ， F 分别是 AB ， CD 的中点，

$$\therefore EB = \frac{1}{2}AB, \quad FD = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore EB = FD,$$

∴ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形。

19. 某校对八年级学生 10 月份“读书量”进行了随机抽样调查，并对所有随机抽取学生的“读书量”（单位：本）进行了统计，绘制了如下两幅不完整的统计图。



(1) 请补全两幅统计图；

(2) 求本次所抽取的学生 10 月份“读书量”的平均数；

(3) 已知该校八年级有 500 名学生，请你估计该校八年级学生中，10 月份“读书量”为 5 本的学生有多少？

【答案】(1) 见解析；

(2) 本次所抽取的学生 10 月份“读书量”的平均数为 3.35 本；

(3) 该校八年级 500 名学生中，10 月份“读书量”为 5 本的学生大约有 75 人。

【分析】本题考查条形统计图、扇形统计图，加权平均数以及样本估计总体，掌握条形统计图、扇形统计图中的数量关系以及加权平均数的计算方法是正确解答的关键。

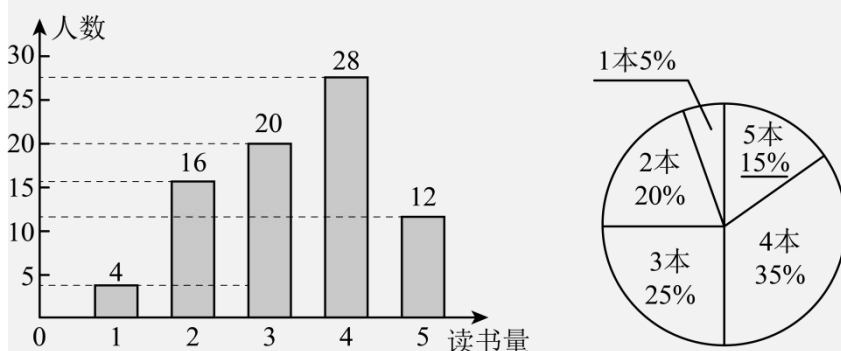
(1) 从两个统计图可知，样本中读书量是 1 本的学生有 4 人，占被调查人数的 5%，由频率 = 频数 ÷ 总数即

可求出样本容量，进而求出样本中读书量为 3 本的学生人数，补全条形统计图，求出样本中读书量为 5 本的学生占调查人数的百分比即可补全扇形统计图；

(2) 根据加权平均数的计算方法进行计算即可；

(3) 样本估计总体，用样本中读书量为 5 本的学生所占的百分比估计总体中读书量为 5 本的学生所占的百分比，再根据频率=频数÷总数进行计算即可。

【详解】(1) 解： $4 \div 5\% = 80$ 人，样本中读书量为 3 本的学生人数为 $80 \times 25\% = 20$ 人，
样本中读书量为 5 本的学生人数占被调查人数的百分比为 $12 \div 80 = 15\%$ ，
补全的条形统计图、扇形统计图如图所示：



(2) 解： $1 \times 5\% + 2 \times 20\% + 3 \times 25\% + 4 \times 35\% + 5 \times 15\% = 3.35$ 本，

答：本次所抽取的学生 10 月份“读书量”的平均数为 3.35 本；

(3) 解 $500 \times 15\% = 75$ 人，

答：该校八年级 500 名学生中，10 月份“读书量”为 5 本的学生大约有 75 人。

20. 已知一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象经过 $(2, 2), (-4, -1)$ 两点.

(1) 求这个一次函数的解析式；

(2) 这个一次函数的图象与 x 轴， y 轴分别交于点 A 和点 B，点 P 在直线 AB 上，点 O 的坐标为 $(0, 0)$ ，且

$S_{\triangle AOP} = \sqrt{5}AB$ ，求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x + 1$

(2) $P(8, 5)$ 或 $(-12, -5)$

【分析】 本题考查的是利用待定系数法求解一次函数的解析式，勾股定理，一次函数的几何应用；

(1) 把点 $(2, 2), (-4, -1)$ 代入 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，再进一步求解即可；

(2) 先求解 $A(-2, 0)$ ， $B(0, 1)$ ，再利用面积公式建立方程求解即可

【详解】(1) 解: 将点 $(2,2), (-4,-1)$ 代入 $y=kx+b(k \neq 0)$ 得:

$$\begin{cases} -4k+b=-1 \\ 2k+b=2 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} k=\frac{1}{2}, \\ b=1 \end{cases}$

$\therefore$ 一次函数解析式为: $y=\frac{1}{2}x+1$.

(2) 解: 当 $x=0$, 则 $y=1$; 当 $y=0$, 则 $x=-2$;

$\therefore A(-2,0), B(0,1)$,

$\therefore OA=2, OB=1$,

$$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\triangle AOP}=\sqrt{5}AB=5,$$

$$\therefore S_{\triangle AOP}=5=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot|y_P|=\frac{1}{2}\times 2\cdot|y_P|,$$

$$\therefore|y_P|=5,$$

$$\therefore y_P=\pm 5,$$

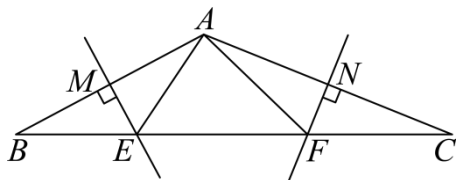
$\therefore$ 点 P 在直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 上,

$$\therefore \frac{1}{2}x+1=5 \text{ 或 } \frac{1}{2}x+1=-5,$$

$$\therefore x=8, x=-12,$$

$$\therefore P(8,5) \text{ 或 } (-12,-5).$$

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 边 AB 的垂直平分线分别交 BC, AB 于点 E, M , 边 AC 的垂直平分线交 BC, AC 于点 F, N , $\triangle AEF$ 的周长是 12.



(1) 求 BC 的长;

(2) 若 $\angle B + \angle C = 45^\circ$, $AF = 4$, 求 $\triangle AEF$ 的面积.

【答案】(1)12

(2) 6

【分析】 本题考查的是线段的垂直平分线的性质、等边对等角、勾股定理、三角形的内角和定理，掌握线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解题的关键.

(1) 根据线段垂直平分线的性质得到 $BE = AE$, $FA = FC$, 根据三角形的周长公式计算即可;

(2) 根据角之间的数量关系, 得到 $\angle EAF = 90^\circ$, 设 $AE = x$, 则 $EF = 12 - x - 4 = 8 - x$, 再根据勾股定理求解即可.

【详解】 (1) 解: $\because ME$ 是边 AB 的垂直平分线, NF 是 AC 的垂直平分线,

$$\therefore BE = AE, \quad FA = FC,$$

$$\therefore BC = BE + EF + FC = AE + EF + AF = 12;$$

(2) 解: $\because \angle B + \angle C = 45^\circ$,

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\because BE = AE, \quad FA = FC,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle B, \quad \angle FAC = \angle C,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle BAC - (\angle EAB + \angle FAC) = \angle BAC - (\angle B + \angle C) = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$$

设 $AE = x$, 则 $EF = 12 - x - 4 = 8 - x$.

$$\because AE^2 + AF^2 = EF^2,$$

$$\therefore x^2 + 4^2 = (8 - x)^2,$$

$$\therefore x = 3,$$

$$\therefore AE = 3, \quad AF = 4,$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6.$$

22. 观察下列式式子的化简过程:

$$\textcircled{1} \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1;$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \sqrt{3}-\sqrt{2};$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}; \dots$$

(1) 请直接写出第四个等式, 并猜想第 n 个等式;

(2) 求 $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} \cdots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2023}}$ 的值.

【答案】(1) $\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \sqrt{5}-2$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

(2) 22.

【分析】本题考查二次根式的混合运算，平方差公式的应用，正确得出 $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 是解题的关键.

(1) 仿照解题过程的典例所揭示的规律，将分母有理化；

(2) 仿照解题过程的典例所揭示的规律，将分母有理化；

(3) 由 $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$ 将原式化简，再进行加减运算即可.

【详解】(1) 解：第四个等式为 $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{(\sqrt{5}+\sqrt{4})(\sqrt{5}-\sqrt{4})} = \sqrt{5}-2$,

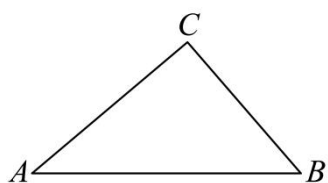
$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \sqrt{5}-2;$$

$$(2) \because \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})} = \frac{1}{2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} \cdots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2023}} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5}) + \cdots + \frac{1}{2}(\sqrt{2025}-\sqrt{2023}) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{2025}-\sqrt{2023}) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2025}-1) \\ &= \frac{1}{2}(45-1) \\ &= 22. \end{aligned}$$

23. 【定义新知】

如果三角形有一边上的中线长恰好等于这边的长，那么称这个三角形为“奇异三角形”.



【应用探究】

(1)如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = \sqrt{3}$, $AC = 2$, 求证: $\triangle ABC$ 是“奇异三角形”;

(2)已知, 等腰 $\triangle ABC$ 是“奇异三角形”, $AB = AC = 20$, 求底边 BC 的长. (结果保留根号)

【答案】(1)见解析

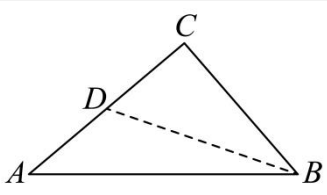
(2)底边 BC 的长为 $10\sqrt{6}$ 或 $8\sqrt{5}$.

【分析】本题属于三角形综合题, 主要考查了等腰三角形的性质与判定, 勾股定理, 二次根式的化简以及中线定义的综合应用, 解决问题的关键是运用等腰三角形三线合一的性质以及勾股定理进行计算求解. 解题时注意: 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合.

(1) 取 AC 的中点 D , 连接 BD , 利用勾股定理求得 $BD = 2 = AC$, 即可得出 $\triangle ABC$ 是“奇异三角形”;

(2) 需要分两种情况: ①当腰上的中线 $BD = AC$ 时, 则 $AB = BD$, 过 B 作 $BE \perp AD$ 于 E , 根据等腰三角形的性质以及勾股定理, 即可求得 BC 的长; ②当底边上的中线 $AD = BC$ 时, 则 $AD \perp BC$, 且 $AD = BC = 2BD$, 根据等腰三角形的性质以及勾股定理, 列出方程, 即可求得 BC 的长.

【详解】(1) 解: 如图, 取 AC 的中点 D , 连接 BD ,



$$\because AC = 2,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AC = 1,$$

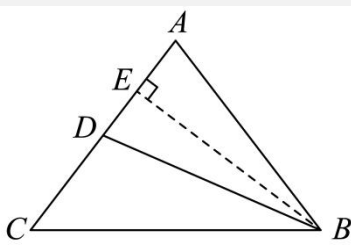
$$\because BC = \sqrt{3}, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore BD = \sqrt{CD^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 = AC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是“奇异三角形”;

(2) 解: 分两种情况:

如图, 当腰上的中线 $BD = AC$ 时, 则 $AB = BD$, 过 B 作 $BE \perp AD$ 于 E ,



$$\because AB = AC = 20,$$

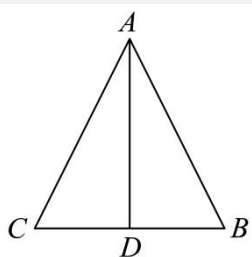
$$\therefore BD = 20, \quad ED = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{4}AC = 5,$$

$$\therefore CE = 10 + 5 = 15,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \text{ 中, } BE^2 = BD^2 - DE^2 = 375,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BCE \text{ 中, } BC = \sqrt{BE^2 + CE^2} = \sqrt{375 + 225} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6};$$

如图, 当底边上的中线 $AD = BC$ 时, 则 $AD \perp BC$, 且 $AD = BC = 2BD$,



设 $BD = x$, 则 $x^2 + (2x)^2 = 20^2$,

$$\therefore x^2 = 80,$$

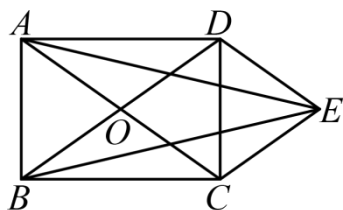
又 $\because x > 0$,

$$\therefore x = \sqrt{80} = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore BC = 2x = 8\sqrt{5}.$$

综上所述, 底边 BC 的长为 $10\sqrt{6}$ 或 $8\sqrt{5}$.

24. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $DE \parallel AC$, $CE \parallel BD$.



(1) 求证: 四边形 $OCED$ 为菱形;

(2) 求证: $AE = BE$;

(3) 若 $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$, 则菱形 $OCED$ 的面积为_____.

【答案】(1) 见解析

(2) 见解析

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】(1) 先证明四边形 $OCED$ 是平行四边形, 再利用矩形的性质得出 $OC = OD$, 即可得出答案;

(2) 由 (1) 可得 $DE = CE$, $\angle ODE = \angle OCE$, 再根据矩形的性质可证 $\angle ADO = \angle ACB$, 进而得到 $\angle ADE = \angle BCE$, 结合 $AD = BC$, 可证 $\triangle ADE \cong \triangle BCE$ (SAS), 即可得出结论;

(3) 连接 OE 交 CD 于点 F , 利用矩形的性质结合勾股定理求出 $BC = \sqrt{2}$, $CD = 1$, 再根据四边形 $OCED$ 是菱形, 证明 OF 是 $\triangle BCD$ 的中位线, 求出 $OF = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 进而求出 $OE = 2OF = \sqrt{2}$, 最后由菱形 $OCED$ 的面积公式计算即可.

【详解】(1) 证明: $\because DE \parallel AC, CE \parallel BD$,

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是平行四边形,

$\because$ 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O ,

$\therefore OC = OD$,

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是菱形;

(2) 证明: 由 (1) 知四边形 $OCED$ 是菱形;

$\therefore DE = CE$,

$\therefore \angle CDE = \angle DCE$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

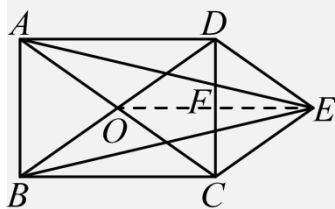
$\therefore \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADC + \angle CDE = \angle BCD + \angle DCE$, 即 $\angle ADE = \angle BCE$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BCE$ (SAS),

$\therefore AE = BE$;

(3) 解: 连接 OE 交 CD 于点 F ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ, CD = AB$,

$\because AB = 1, AC = \sqrt{3}$,

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{2}, CD = 1$,

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是菱形;

$\therefore OE$ 垂直平分 CD , 即点 F 是 CD 的中点,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore OB = OD$, 即点 O 是 BD 的中点,

$\therefore OF$ 是 $\triangle BCD$ 的中位线,

$$\therefore OF = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore OE = 2OF = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{菱形 } OCED \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}CD \cdot OE = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点睛】 此题考查了矩形的性质, 三角形全等的判定与性质, 勾股定理, 三角形中位线, 菱形的判定与性质, 熟练掌握矩形的性质和菱形的判定方法是解题关键.

25. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于点 P 与图形 W 给出如下定义: N 为图形上任意一点, P, N 两点间距离的最小值称为点 P 与图形 W 的“近点距离”. 特别的, 当点 P 在图形 W 上时, 点 P 与图形 W 的“近点距离”为零. 如图 1, 点 $A(3,1), B(3,5)$.

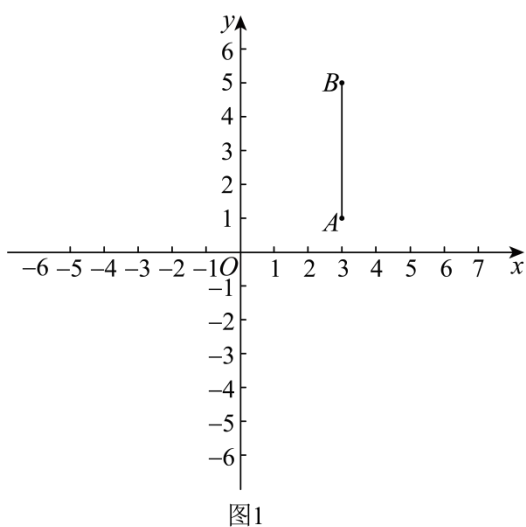


图1

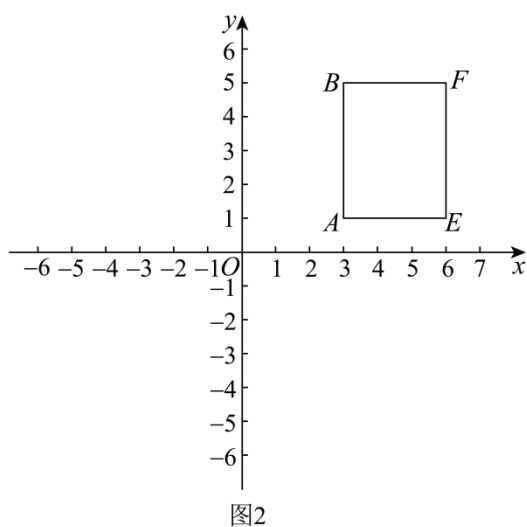


图2

(1) 点 $C(4,1)$ 与线段 AB 的“近点距离”是_____；点 $D(1,0)$ 与线段 AB 的“近点距离”是_____；

(2) 点 P 在直线 $y = x + 2$ 上, 如果点 P 与线段 AB 的“近点距离”为 2, 那么点 P 的坐标是_____

(3) 如图 2, 将线段 AB 向右平移 3 个单位, 得到线段 EF , 连接 AE, BF , 若直线 $y = x + b$ 上存在点 G , 使得点 G 与四边形 $ABFE$ 的“近点距离”小于或等于 $\sqrt{3}$, 直接写出 b 的取值范围.

【答案】 (1) 1, $\sqrt{5}$;

(2) $(1,3)$ 或 $(3+\sqrt{2}, 5+\sqrt{2})$;

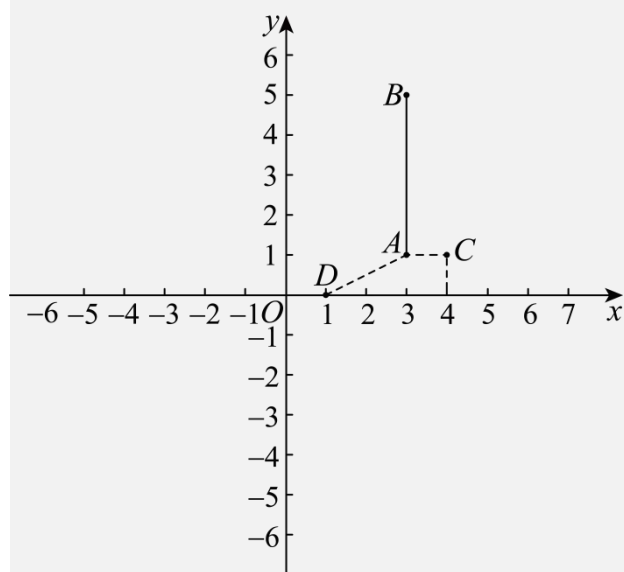
$$(3) -5 - \sqrt{6} \leq b \leq 2 + \sqrt{6}.$$

【分析】(1) 画出图形，直接利用新定义结合勾股定理可得答案；

(2) 画出图形，分两种情况利用数形结合的方法，一次函数的性质与勾股定理理解答即可；

(3) 如图，过 B 作 $BG \perp$ 直线 $y = x + b$ ，则线段 GB 的长度为点 G 与四边形 $ABFE$ 的“近点距离”，求解直线 GT 为 $y = -x + 8$ ，过 G 作 $GV \perp x$ 轴于 V ，过 E 作 $EG \perp$ 直线 $y = x + b$ ，则线段 EG 的长度为点 G 与四边形 $ABFE$ 的“近点距离”由平移可得 $E(6, 1)$ ，同理可得直线 GE 为 $y = -x + 7$ ，再进一步解答即可.

【详解】(1) 解：如图：



$$\because C(4, 1), A(3, 1),$$

$\therefore$ 点 $C(4, 1)$ 与线段 AB 的“近点距离”是 1,

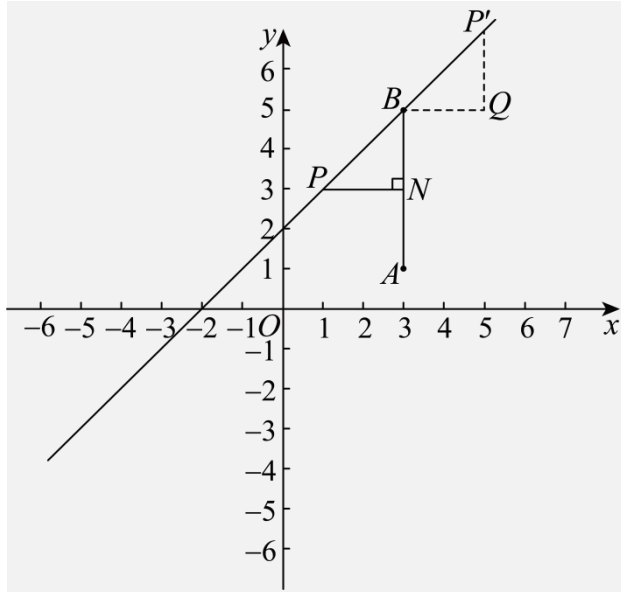
$$\because D(1, 0), A(3, 1),$$

$$\therefore AD = \sqrt{(3-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5},$$

$\therefore$ 点 $D(1, 0)$ 与线段 AB 的“近点距离”是 $\sqrt{5}$,

故答案为：1, $\sqrt{5}$;

(2) 解：如图，当 P 在 AB 左边时，



当 $PN \perp AB$ 时, P, N 两点间距离最小,

$\therefore$ 点 P 与线段 AB 的“近点距离”为 2,

$\therefore PN = 2$,

$\therefore x_N = 3$,

$\therefore x_P = 1$,

$\therefore y_P = 1 + 2 = 3$,

$\therefore P(1, 3)$,

当 P 在 AB 的右边时, 如图中的 P ,

$\therefore AP' = 2$,

过 B 作 x 轴的平行线, 过 P' 作 x 轴的垂线, 交点为 Q ,

$\therefore$ 直线 $P'B$ 为 $y = x + 2$,

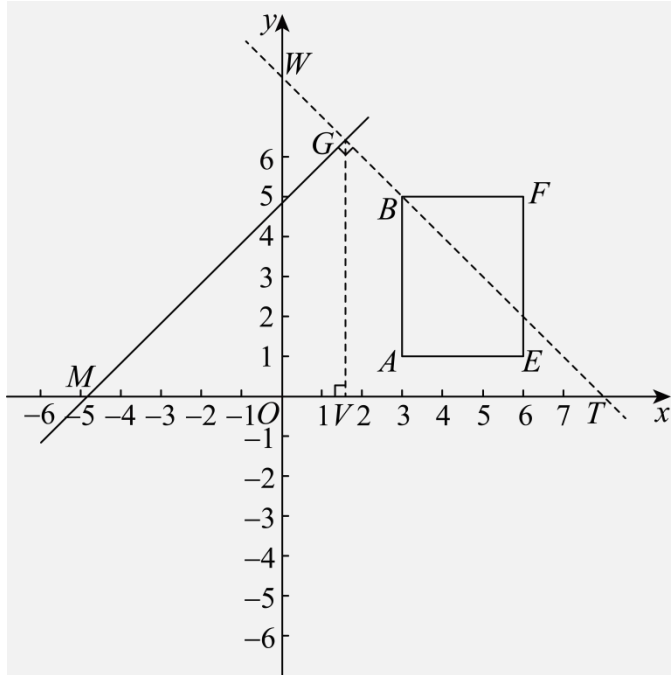
$\therefore \triangle BQP'$ 为等腰直角三角形,

$\therefore BQ = P'Q = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$,

$\therefore P'(3 + \sqrt{2}, 5 + \sqrt{2})$,

故答案为: $(1, 3)$ 或 $(3 + \sqrt{2}, 5 + \sqrt{2})$;

(3) 解: 如图, 过 B 作 $BG \perp$ 直线 $y = x + b$, 则线段 GB 的长度为点 G 与四边形 $ABFE$ 的“近点距离”,



$\because$ 一次函数 $y = x + b$,

$\therefore \angle GMT = 45^\circ = \angle GTM$,

$\therefore \angle OWT = \angle OTW = 45^\circ$,

$\therefore$ 设 $OT = OW = n$,

$\therefore W(0, n), T(n, 0)$,

设直线 GT 为 $y = ex + f$,

$$\therefore \begin{cases} 3e + f = 5 \\ f = n \\ ne + f = 0 \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} e = -1 \\ f = 8 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 GT 为 $y = -x + 8$,

$\therefore T(8, 0)$,

当 $BG = \sqrt{3}$ 时, $GT = 5\sqrt{2} + \sqrt{3}$,

过 G 作 $GV \perp x$ 轴于 V ,

$$\therefore GV = MV = TV = \frac{\sqrt{2}}{2}(5\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 5 + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore 5 + \frac{\sqrt{6}}{2} = -x_G + 8,$$

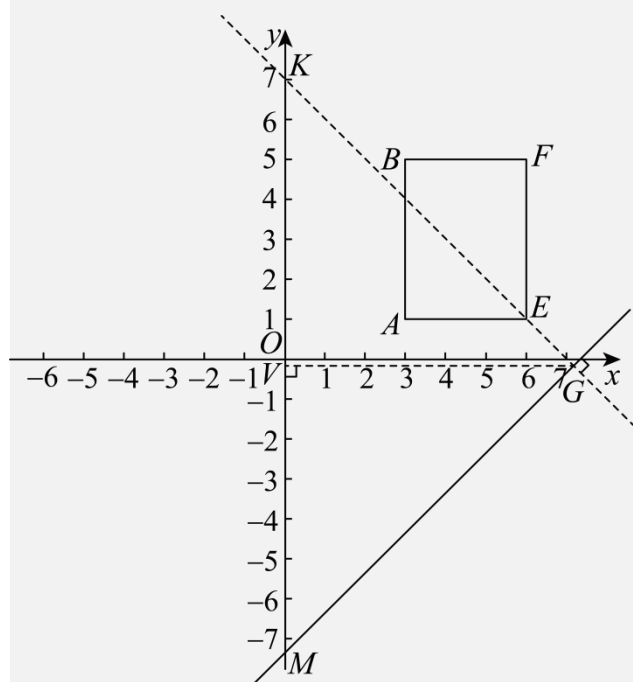
$$\therefore x_G = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore G\left(3-\frac{\sqrt{6}}{2}, 5+\frac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

$$\therefore 5+\frac{\sqrt{6}}{2}=3-\frac{\sqrt{6}}{2}+b$$

$$\therefore b=2+\sqrt{6};$$

如图，过 E 作 $EG \perp$ 直线 $y=x+b$ ，则线段 EG 的长度为点 G 与四边形 $ABFE$ 的“近点距离”，



$\therefore$ 由平移可得 $E(6,1)$,

同理可得直线 GE 为 $y=-x+7$,

$$\therefore K(0,7),$$

$$\therefore KE=6\sqrt{2},$$

当 $EG=\sqrt{3}$ 时，则 $KG=6\sqrt{2}+\sqrt{3}$,

过 G 作 $GV \perp y$ 轴于 V ,

$$\therefore GV=KV=MV=\frac{\sqrt{2}}{2}(6\sqrt{2}+\sqrt{3})=6+\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore x_G=6+\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore y_G=-6-\frac{\sqrt{6}}{2}+7=1-\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore G\left(6+\frac{\sqrt{6}}{2}, 1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right),$$

$$\therefore 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} = 6 + \frac{\sqrt{6}}{2} + b,$$

解得 $b = -5 - \sqrt{6}$;

$\therefore$ 直线 $y = x + b$ 上存在点 G , 使得点 G 与四边形 $ABFE$ 的“近点距离”小于或等于 $\sqrt{3}$, b 的取值范围为 $-5 - \sqrt{6} \leq b \leq 2 + \sqrt{6}$.

【点睛】 本题考查了新定义的含义, 一次函数的几何应用, 勾股定理的应用, 等腰直角三角形的判定与性质, 二次根式的运算, 平移的性质, 理解题意是解题的关键.

26. 【模型建构】

如图 1, 已知线段 AB , CD 所在直线交于点 O , 其所夹角为 α . 小明在学习了平移之后, 将图 1 中的线段 AB , CD 其中的一条线段经过不同的平移变换后, 得到多个以点 A, B, C, D 其中三个点为顶点的平行四边形. 例如: 图 2 是将线段 AB 沿 $A \rightarrow D$ 方向平移线段 AD 的长度得到 $\square ADEB$, 图 3 是将线段 CD 沿 $C \rightarrow A$ 方向平移线段 CA 的长度得到 $\square ACDE$.

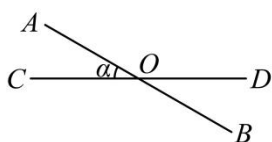


图1

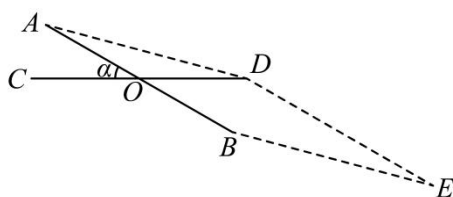


图2

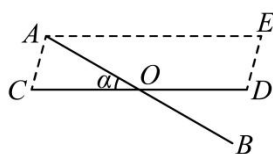


图3

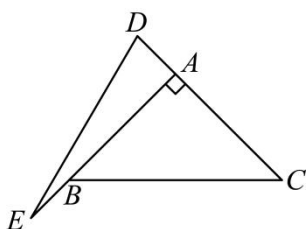


图4

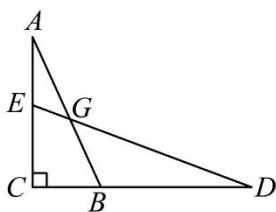


图5

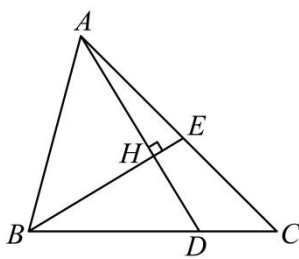


图6

【模型应用】

(1) 小明受到上述模型建构的启发, 运用两种方法构造出平行四边形解决下面问题:

如图 4, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 D, E 分别在 CA, AB 延长线上, 且 $AD = BE$, $\angle DEA = 15^\circ$, 求证: $DE = BC$.

方法一: 过点 E 作 $EF \parallel BC$, 且 $EF = BC$, 连接 CF, DF , 将证明 $DE = BC$, 转化为证明 $DE = EF$;

方法二: 过点 C 作 $CF \parallel DE$, 且 $CF = DE$, 连接 BF, EF , 将证明 $DE = BC$, 转化为证明 $BC = CF$.

请你依照小明的解题思路, 任选一种方法, 写出证明过程.

(2) 小明又尝试将(1)中问题进行变式提出了新问题, 请你应用【模型建构】构造平行四边形的方法或者按

照自己的思路解答下面问题:

如图 5, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, E 为 AC 上一点, D 为 CB 延长线上一点, 且 $AE = BC$, $AC = BD$, 连接 DE 交 AB 于点 G , 求 $\angle AGE$ 的度数.

(3) 如图 6, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 45^\circ$, D, E 分别是边 BC, AC 上的点, 且 $AD \perp BE$ 于点 H , 若 $AE = 3\sqrt{2}$, $BD = 5$, $AD = 3\sqrt{5}$, 请直接写出 BE 的长.

【答案】(1) 见解析; (2) 45° ; (3) $2\sqrt{7}$

【分析】(1) 先根据等腰直角三角形的性质得到 $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$; 方法一: 如图 1, 过点 E 作 $EF \parallel BC$, 且 $EF = BC$, 连接 CF, DF , 证明四边形 $BCFE$ 是平行四边形. 得到 $CF = BE = AD$, $BE \parallel CF$, 再证明 $\triangle DAE \cong \triangle FCD$ (SAS), $DE = DF$, 进而证明 $\triangle DEF$ 是等边三角形, 利用等边三角形的性质得到 $DE = EF$ 即可.

方法二: 如图 2, 过点 C 作 $CF \parallel DE$, 且 $CF = DE$, 四边形 $CDEF$ 是平行四边形. 由 $CD = EF$, $CD \parallel EF$ 证明 $\triangle DAE \cong \triangle BEF$ (SAS), 得到 $DE = BF$, $\angle BFE = \angle DEA = 15^\circ$, 再证明 $\triangle BCF$ 是等边三角形得到 $BC = CF$ 即可.

(2) 方法一: 如答图 3, 过点 D 作 $DH \parallel AB$, 且 $DH = AB$, 连接 AH, EH , 证明四边形 $ABDH$ 是平行四边形, 得到 $AH = BD$, $AH \parallel BD$, 再证明 $\angle HDE = 45^\circ$ 得到即可得结论;

方法二: 如答图 4, 过点 A 作 $AH \parallel ED$, 且 $AH = ED$, 连接 BH, DH , 证明四边形 $AEDH$ 是平行四边形得到 $AE = DH$, $AE \parallel DH$, 再证明 $\triangle ABC \cong \triangle BHD$ (SAS), 得到 $AB = BH$, $\angle ABC = \angle BHD$, 进而求得 $\angle BAH = 45^\circ$ 即可;

(3) 如答图 5, 过点 B 作 $BF \parallel AD$, 且 $BF = AD = 3\sqrt{5}$, 连接 AF, EF , 作 $EM \perp AF$ 于点 M , 证明四边形 $ADBF$ 是平行四边, 得到 $AF = BD = 5$, $AF \parallel BD$, 进而 $\angle MAE = \angle C = 45^\circ$, 则 $ME = AM = \frac{\sqrt{2}}{2}AE = 3$, 在 $\text{Rt}\triangle EFM$ 中, 利用勾股定理分别求解即可.

【详解】解: (1) 证明: $\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$,
 $\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$,

方法一: 如图 1, 过点 E 作 $EF \parallel BC$, 且 $EF = BC$, 连接 CF, DF ,

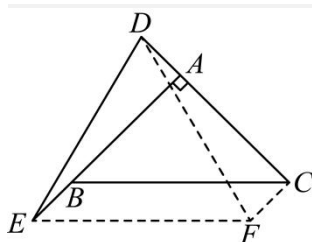


图1

四边形 $BCFE$ 是平行四边形.

$$\therefore CF = BE = AD, \quad BE \parallel CF,$$

$$\therefore \angle DCF = 180^\circ - \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\because AB = AC, \quad AD = BE,$$

$$\therefore AB + BE = AC + AD,$$

$$\text{即 } AE = CD,$$

$$\because \angle DAE = \angle FCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle FCD (\text{SAS}),$$

$$\therefore DE = DF,$$

$$\because EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle AED + \angle BEF = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle DEF$ 是等边三角形.

$$\therefore DE = EF = BC.$$

方法二: 如图 2, 过点 C 作 $CF \parallel DE$, 且 $CF = DE$, 连接 BF, EF ,

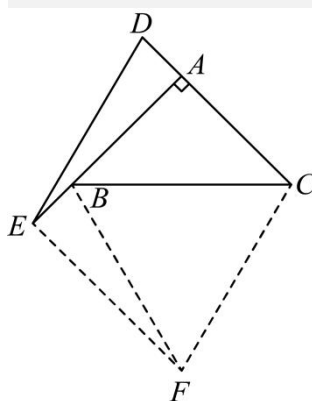


图2

$\therefore$ 四边形 $CDEF$ 是平行四边形.

$$\therefore CD = EF, \quad CD \parallel EF,$$

$$\therefore \angle BEF = 180^\circ - \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\because AB = AC, \quad AD = BE,$$

$$\therefore AB + BE = AC + AD,$$

$$\text{即 } AE = CD,$$

$$\therefore AE = EF,$$

$$\because \angle BEF = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle BEF (\text{SAS}),$$

$$\therefore DE = BF, \quad \angle BFE = \angle DEA = 15^\circ,$$

$$\therefore BF = CF, \quad \angle ABF = \angle BEF + \angle BFE = 105^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle ABF - \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle BCF \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore BC = CF = DE.$$

(2) 方法一: 如图 3, 过点 D 作 $DH \parallel AB$, 且 $DH = AB$, 连接 AH, EH ,

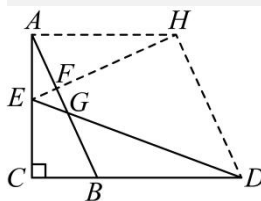


图3

$\therefore$ 四边形 $ABDH$ 是平行四边形,

$$\therefore AH = BD, \quad AH \parallel BD,$$

$$\therefore \angle EAH = 180^\circ - \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle FAH = 90^\circ,$$

$$\because AC = BD,$$

$$\therefore AC = AH,$$

$$\because AE = BC, \quad \angle EAH = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle CBA (\text{SAS}),$$

$$\therefore AB = EH, \quad \angle AHE = \angle CAB,$$

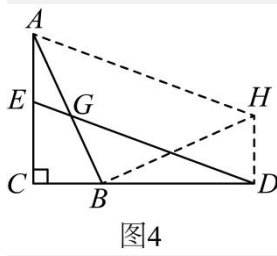
$$\therefore EH = DH, \quad \angle AHE + \angle FAH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HDE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle HDE = 45^\circ;$$

方法二：如图 4，过点 A 作 $AH \parallel ED$ ，且 $AH = ED$ ，连接 BH, DH ，



$\therefore$ 四边形 $AEDH$ 是平行四边形，

$$\therefore AE = DH, \quad AE \parallel DH,$$

$$\therefore \angle BDH = 180^\circ - \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HBD + \angle BHD = 90^\circ,$$

$$\because AE = BC,$$

$$\therefore BC = DH,$$

$$\because AC = BD, \quad \angle BDH = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BHD \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AB = BH, \quad \angle ABC = \angle BHD,$$

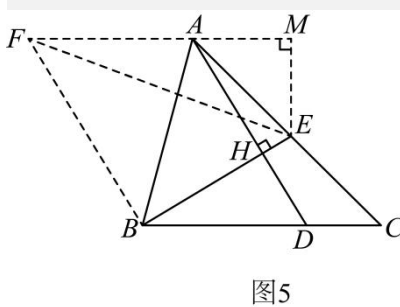
$$\therefore \angle ABC + \angle HBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle BAH = 45^\circ;$$

(3) 如图 5，过点 B 作 $BF \parallel AD$ ，且 $BF = AD = 3\sqrt{5}$ ．连接 AF, EF ，作 $EM \perp AF$ 于点 M，



$\therefore$ 四边形 $ADBF$ 是平行四边形.

$$\therefore AF = BD = 5, \quad AF \parallel BD,$$

$$\therefore \angle MAE = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore ME = AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AE = 3,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle EFM$ 中，

$$\text{由勾股定理，得 } EF = \sqrt{FM^2 + EM^2} = \sqrt{(5+3)^2 + 3^2} = \sqrt{73}.$$

$\therefore AD \perp BE$ 于点 H ,

$\therefore \angle AHE = \angle FBE = 90^\circ$,

$\therefore$ Rt $\triangle EBF$ 中, 有 $BE = \sqrt{EF^2 - BF^2} = \sqrt{73 - (3\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{7}$.

【点睛】 本题考查平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、等腰直角三角形的性质、勾股定理, 熟练掌握平行四边形的性质应用和全等三角形的性质, “一题多解”的方法运用是解答的关键.